Clase 11 - Ley de Faraday. Aplicaciones.

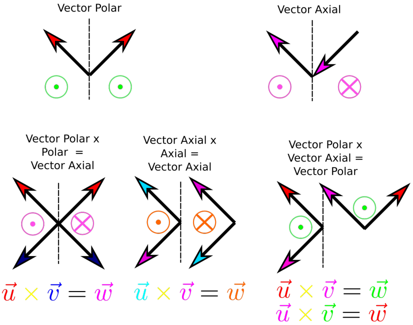
Prof. Juan Mauricio Matera

12 de abril de 2019

Repaso y motivación.

- El campo **electrostático** $\vec{E}$ es generado por las cargas eléctricas.
- Este satisface las ecuaciones
  - La Ley de Gauss: $\int\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathcal{S}}}{\varepsilon_0}$ para cualquier superficie cerrada $\mathcal{S}$
  - La Ley de campo conservativo: $\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ para cualquier curva $\mathcal{C}$.
- El campo magnético $\vec{B}$ es originado por corrientes eléctricas.
- El campo magnético en **sistemas estacionarios** satisface
  - La Ley de Gauss: $\int\int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 0$ para cualquier superficie cerrada $\mathcal{S}$
  - La Ley de Ampère: $\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \mu_0 i_{\mathcal{C}}$ para cualquier curva $\mathcal{C}$, cualquier superficie $\mathcal{S}$ limitada por $\mathcal{C}$, donde $i_{\mathcal{C}}$ es la **corriente neta** rodeada por $\mathcal{C}$.

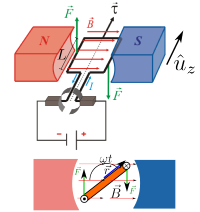
Vectores Polares vs Vectores Axiales



Vectores Polares	Vectores Axiales
$\vec{r}$	$d\vec{\mathcal{S}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$
$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{E}$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times \check{r}}{r^2}$
$\vec{p}$	$\vec{M} = i\vec{\mathcal{S}}$

En presencia de campos eléctricos y magnéticos,

- Una partícula de carga q con velocidad $\vec{v}$ sufre una fuerza $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
- un elemento de **corriente estacionaria** $id\vec{\ell}$ sufre una fuerza magnética $d\vec{F} = id\vec{\ell} \times \vec{B}$.
- Un momento magnético $\vec{M}$ sufre un torque $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$ y una fuerza $\vec{F} = \nabla(\vec{M} \cdot \vec{B})$ que tiende a alinear $\vec{M}$ con $\vec{B}$ y **arrastrarlo** hacia las zonas con mayor intensidad de campo.



$$\vec{\tau} = 2\vec{r} \times \vec{F}$$
$$= 2riB|\sin(\omega t)|L\hat{u}_z$$

- Con estas herramientas analizamos el **motor eléctrico**.
- Al circular corriente por un solenoide, en presencia de un campo magnético estático uniforme, este sufre un torque

$$\vec{\tau} = N(i\vec{\mathcal{S}}) \times \vec{B}$$

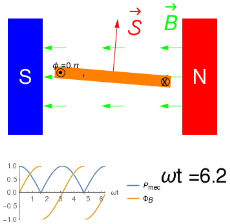
donde $\vec{\mathcal{S}}$ es la superficie de una espira, orientada según la circulación de i, N es el número de espiras, y $\vec{B}$ es el campo externo.

- Si la espira es forzada a girar en un eje **perpendicular** a $\vec{B}$ con velocidad angular $\vec{\omega}$, la **potencia mecánica sobre** el motor es

$$P_{\mathrm{mec}} = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} = Ni\vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{S}} \times \vec{B} = iN\|\vec{S}\|\|\vec{B}\|\omega\|\sin(\omega t)\| = Ni\left\|\frac{\partial \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{B}}{\partial t}\right\|$$

- Desde un punto de vista eléctrico, la **potencia eléctrica consumida** P_e por un elemento de un circuito eléctrico (como un motor) tiene la

El Motor Eléctrico y el Generador Eléctrico



- Debido al **principio de conservación de la energía**, en un motor

$$P_e = P_{dis} + P_{mec}$$

donde P_{dis} es la **potencia disipada** vía efecto Joule, y P_{mec} es el **trabajo mecánico por unidad de tiempo** que realiza el elemento sobre su entorno.

- En el caso del motor, $P_{dis} = i^2 R =$ donde R es la **resistencia eléctrica** del solenoide, y

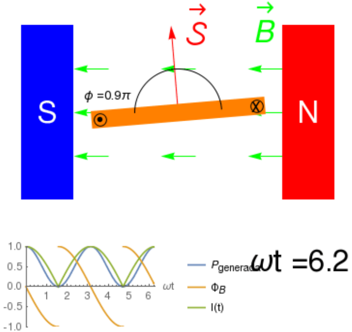
$P_{mec} = i\frac{d\Phi_B}{dt}$ donde $\Phi_B = N\vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{B} = \|\vec{\mathcal{S}}\|\|\vec{B}\| \cos(\omega t)$ es el **Flujo Magnético** que atraviesa cada espira del solenoide. De esta manera

$$P_e = i(\Delta V_R - \mathcal{E}_{ind})$$

con $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ la **Fuerza Electromotriz** inducida en el solenoide.

Generador Eléctrico

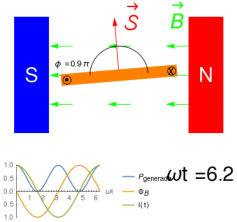
- Es el **mecanismo básico** detrás de toda la **generación de energía eléctrica**, desde las dínamos de bicicleta hasta las centrales termoeléctricas.



Fuerza de Lorentz $\Rightarrow \mathcal{E}_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$

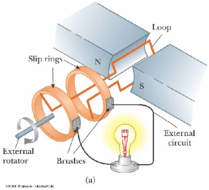
- Si el solenoide es **forzado** a girar en sentido opuesto, $\mathcal{E}_{ind}$ 0 y por lo tanto el motor **genera** energía eléctrica.
- Decimos entonces que tal dispositivo es un **Generador** de energía Eléctrica.
- La corriente que circula en un generador no está fija desde afuera: es forzada a moverse por la Fuerza de Lorentz.
- Debido a que la $\mathcal{E}_{ind}$ no es

Alternadores



$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

- Cambiando la forma de los contactos, de manera que la corriente siempre circule **en el mismo sentido**, el generador producirá una FEM



$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{ind} &= -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \\
&= -NB\frac{\cos(\omega t)}{\partial t} \\
&= -N\omega B \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

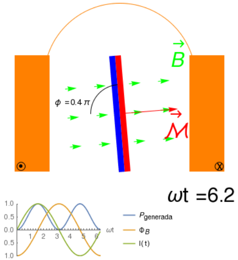
Decimos entonces que el sistema produce una **FEM alterna**, y se lo llama **Alternador**.

Alternador invertido: Solenoide fijo e iman rotante

- Es posible construir un alternador en el que son los imanes los que se mueven, en lugar del solenoide, comprobandose que también

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

donde la variación de Φ_B es debida al cambio en $\vec{B}$.



- Observamos que en este caso, $\mathcal{E}_{ind}$ existe aún sin un transporte neto de carga en el solenoide, por lo que no podemos explicarla en términos de la **Fuerza de Lorentz** sobre los portadores: estos se mueven **como si** estuvieran en presencia de un **campo eléctrico** externo $\vec{E}$. En tal caso,

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

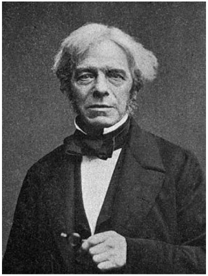
- $\mathcal{E}_{ind}$ no depende ni de los **portadores**

Ley de Fadaray

Michel Faraday

- Fue el primero en unificar la descripción de los fenómenos eléctrostáticos.
- En 1821 creo el primer **motor eléctrico**
- en 1834 publicó las leyes de la electroquímica.
- Introdujo las nociones de líneas de campo, y acción a distancia.

Cosmos - Episodio 10



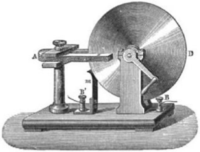
Michel Faraday
1791 - 1867

Ley de Faraday

- En 1932, Faraday realizó una serie de experimentos, cuyos resultados se reducen en la Ley de Inducción que lleva su nombre:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{C}} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

donde $\mathcal{C}$ es un **camino conductor**, $\vec{v}_{\mathcal{C}}$ es la velocidad con que se desplaza $\mathcal{C}$, y $\mathcal{S}$



$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{C}} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

- Si $\mathcal{C}$ se mueve, pero $\vec{B}$ es constante, recuperamos la Ley de Fuerza de Lorentz.
- Si $\mathcal{S}$ (y por lo tanto $\mathcal{C}$ es constante, pero $\vec{B}$ varía en el tiempo, las cargas se mueven como en presencia de un campo eléctrico **No Conservativo**.
- Si $\mathcal{C}$ no coincide con un **camino conductor**, la segunda igualdad sigue siendo válida, pero no podemos hablar de Fuerza Electromotriz inducida.
- Si $\mathcal{S}$ es constante, la expresión se reduce a la Ley de Maxwell-Faraday

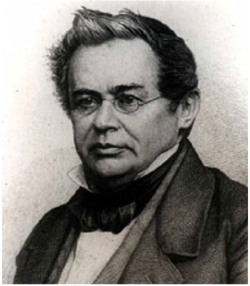
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

- Vía el teorema de Stokes, esta ley puede expresarse en forma equivalente como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

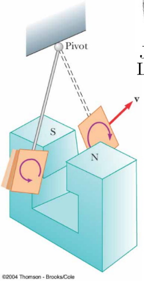
Ley de Lenz

- El signo negativo frente a la derivada temporal puede deducirse de la consistencia de la teoría con la conservación de la energía: En presencia de un conductor, una variación de $\vec{B}$ induciría una $\mathcal{E}_{ind}$ que originaría una corriente, que a su vez produciría un campo $\vec{B}'$, que incrementaría aún más la variación del flujo magnético, y el proceso nunca se detendría.
- Henrich Lenz llegó a esta conclusión y la enunció de esta manera: "Una variación de Φ_B inducirá una $\mathcal{E}_{ind}$ de manera que el campo magnético asociado a la corriente se opondrá a la variación de flujo magnético que le dió origen".

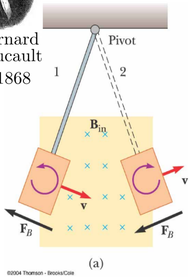


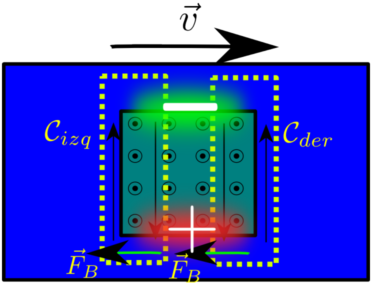
Heinrich Lenz
1804 - 1865

Corrientes de Foucault

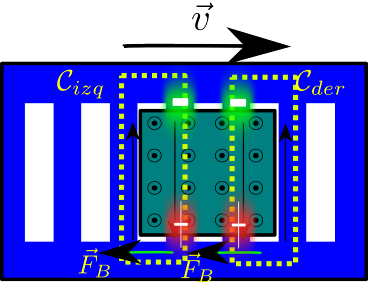


Jean Bernard
Léon Foucault
1819 - 1868

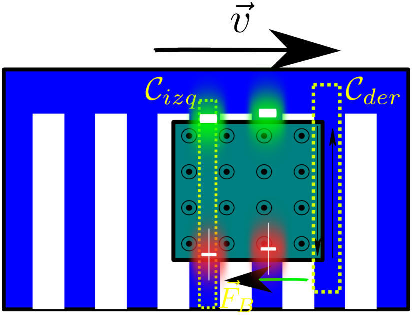




- En la zona cubierta por el imán, debido al campo magnético y a la velocidad del conductor, se establece una separación de carga.
- En los bordes laterales, donde el campo magnético cambia, se establecen corrientes, según la **Ley de Lenz**.
- El campo se acopla sólo a las corrientes inmersas en él, resultando en una fuerza neta de arrastre.

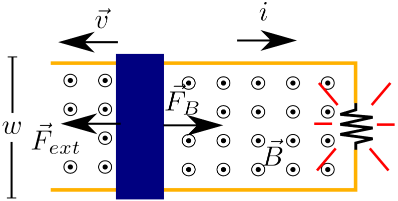


- La presencia de huecos no modifica el resulta



- En el caso del péndulo con forma de peine, debido a que la **Ley de Faraday** sólo aplica a caminos conductores, sólo predice la acción de una fuerza cuando el borde del imán pasa por uno de los dientes, por lo que el efecto es mucho menor.

Freno Magnético



$\mathcal{E} = Bwv$ $\qquad i = \frac{Bwv}{R}$

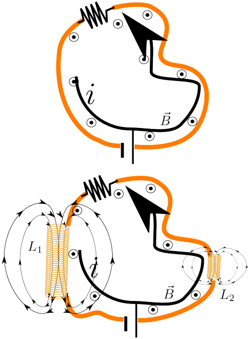
$|F_B| = Biw = \frac{B^2w^2v}{R}$

$P_e = i^2R = \frac{B^2w^2v^2}{R}$

$= F_Bv = P_{mec}$

Autoinductancia e Inductancia Mutua

Autoinducción

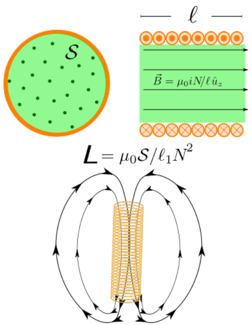


- Todo circuito cerrado, por el que circula una corriente produce un campo magnético.
- El flujo magnético a través del área que encierra el circuito es proporcional a la corriente que por él circula.

$$\Phi_B = Li$$

  donde L es una constante positiva conocida como **autoinductancia** del circuito. Nótese que Φ_B debe ser evaluado en el sentido de la circulación de la corriente.
- Si en el circuito la corriente varía a razón $\frac{di}{dt}$, la **Ley de Inducción de Faraday** implica la existencia de una $\mathcal{E}_{ind}$ o **fuerza contra-electromotriz** en el circuito tal que

- Típicamente, L para un circuito **corto** respecto a la sección de los conductores puede despreciarse. Sin embargo, si en el circuito se incluyen **solenoides** es posible lograr flujos magnéticos relativamente grandes y en forma localizada. En tal caso, se define la autoinducción L del elemento como aquella que se obtendría al incluir ese elemento en un circuito de autoinducción despreciable.
- Para un solenoide, $L = \frac{\Phi_B}{i} = \mathcal{S}\mu_0 nN = \mathcal{S}\mu_0 N^2/\ell$.



Inducción Mutua

- Dados dos circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, el campo debido a la corriente que circula por $\mathcal{C}_1$ induce un flujo en $\mathcal{C}_2$ tal que

$$\Phi_B^{(2)} = M_{12} i_1 \, .$$

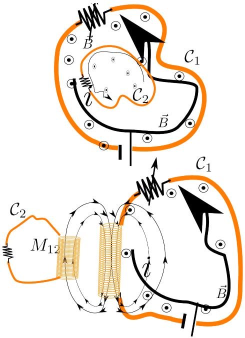
  Llamamos la **Inductancia Mutua** M_{12} a la constante

- Por el **principio de acción y reacción**,

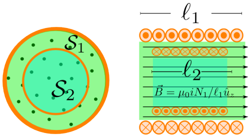
$$\Phi_B^{(1)} = M_{21} i_2$$

  con $M_{21} = M_{12}$.

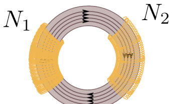
- De esta manera, por la **Ley de Faraday** una variación en la corriente en el circuito $\mathcal{C}_1$ inducirá una $\mathcal{E}_{ind}$ en el circuito $\mathcal{C}_2$



- En general, la inducción mutua entre conductores es relativamente pequeña, salvo que los circuitos incluyan solenoides acoplados magnéticamente.
- Este es el principio básico de los **transformadores de corriente alterna**.
- Para dos solenoides enrollados sobre un mismo eje, con secciones $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2 < \mathcal{S}_1$, número de espiras N_1 y N_2 y longitudes ℓ_1y $\ell_2 < \ell_1$,
  $M_{12} = M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \mathcal{S}_2/\ell_2$



$M_{12} = \mu_0 \mathcal{S}_2/\ell_1 N_1 N_2$



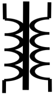
$M_{12} = \mu N_1 N_2 \mathcal{S}/\ell$

Representación de componentes inductivos en circuitos

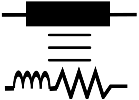
Autoinductancias

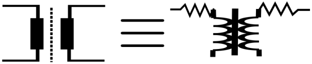
Transformadores

ideal



real





Unidades de Inductancia y Autoinductancia

- En el sistema internacional la unidad de Inductancia (y de inductancia mutua) es el Henry o Henrio (H). Algunos valores aproximados de L son
- Cables, $L \approx 10^{-7}\mathrm{H/m}$
- Lámpara incandescente, $L \approx 100\mathrm{mH}$
- Lámpara fluorescente $\approx 1\mathrm{H}$
- Motor eléctrico $\approx 10\mathrm{H}$