

Clase 4 - Ley de Gauss y cálculo de campos eléctricos. Potenciales. Energía Potencial Electrostática.

Prof. Juan Mauricio Matera

20 de Marzo de 2019

Repaso

Repaso de la clase anterior

- ▶ Campo eléctrico de una carga puntual en $\vec{r}_0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\hat{r} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

- ▶ Modelo del **dipolo eléctrico**

- ▶ Distribución de carga no trivial, con **carga neta nula**.
- ▶ Caracterizado por $\vec{p}$ el **momento dipolar eléctrico**.
- ▶ Para dos cargas de igual magnitud $|q|$ y signo contrario, separadas por una distancia d , $\vec{p} = |q|\vec{d}$.
- ▶ Los medios materiales se **polarizan** en presencia de campos externos, es decir, adquieren **momento dipolar**.
- ▶ Torque sobre un dipolo $\mathcal{T} = \vec{p} \times \vec{E}$. Los dipolos **se alinean** con el campo eléctrico externo.
- ▶ Campo eléctrico de un **Dipolo Eléctrico**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

- ▶ Método de las líneas de campo
 - ▶ Consiste en dibujar las **líneas integrales** del campo eléctrico.
 - ▶ Estas líneas presentan las mismas simetrías que el campo eléctrico.
 - ▶ En todo punto son tangentes al campo eléctrico.
 - ▶ La **densidad de líneas** en torno a un punto da cuenta de la magnitud del campo.
 - ▶ Salen de cargas positivas y terminan en cargas negativas.
 - ▶ Dos líneas sólo se cruzan sobre las cargas eléctricas.
 - ▶ Permite visualizar el campo eléctrico.
 - ▶ Método cualitativo para **estimar** el campo eléctrico en torno a distribuciones de carga.

- ▶ Concepto de Flujo de un campo vectorial

$$\Phi = \int_S \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Interpretaciones:

- ▶ Proporcional al número de líneas de campo que atraviesan una superficie.
- ▶ Cantidad de sustancia / partículas / energía que atraviesa una superficie por unidad de tiempo.

- ▶ Teorema de Gauss:

$$\int_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{W} d\Omega$$

con S una superficie cerrada y Ω el volumen que esta encierra.

$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$ es la **divergencia** del campo $\vec{W}$.

- ▶ Identidad matemática.
- ▶ Relaciona el flujo de un campo con la integral de su divergencia (asumiendo que esté definida).
- ▶ La divergencia de un campo es **independiente** de la elección de los ejes de coordenadas (es una **magnitud escalar**).

- ▶ Ley de Gauss “El **flujo del campo eléctrico** a través de una **superficie cerrada** es proporcional a la carga que encierra dicha superficie”.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

con $\varepsilon_0 = 8.85\text{pFm}^{-1}$

- ▶ Es una ley fundamental de la naturaleza.
- ▶ Expresa un hecho experimental
- ▶ El teorema de Gauss permite expresar esta ley en **forma diferencial**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- ▶ La **Ley de Coulomb** es una **consecuencia** de la **Ley de Gauss** y de la **simetría esférica** de las cargas puntuales.

► Campos en conductores y Ley de Gauss

- El campo en el interior de un **conductor en equilibrio** se anula.
- El campo sobre la superficie de un **conductor en equilibrio** es normal a esta.
- Debido a la **Ley de Gauss** la carga en un **conductor en equilibrio** sólo puede alojarse en su superficie.
- Justo sobre la superficie de un **conductor en equilibrio**, el campo eléctrico viene dado por $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ donde σ es la **densidad superficial de carga** en el punto, y $\hat{n}$ la **normal exterior** al conductor.

Cálculo de Campos Eléctricos en sistemas simétricos.

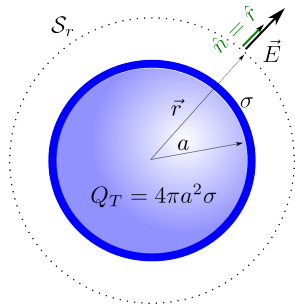
El método que utilizamos para recuperar la Ley de Coulomb puede utilizarse para calcular campos eléctricos en sistemas que presentan un grado de simetría suficientemente grande:

1. Examinamos las simetrías, y determinamos las posibles componentes no nulas del campo eléctrico.
2. Proponemos una “forma” para el campo eléctrico, en función de algunos parámetros a determinar.
3. Para calcular su valor en un punto, elegimos una **superficie gaussiana** $\mathcal{S}$ que pase por el punto, tal que el campo eléctrico sea, o bien 1. **normal** y **constante**, o bien 2. **paralelo** en todos sus puntos.
4. Usamos la ley de Gauss para determinar los parámetros en función de la carga encerrada.
5. Calculamos la carga encerrada por $\mathcal{S}$ y remplazamos.

Ejemplo 1: Campo por una distribución esférica de carga

Una distribución de carga esférica tiene las siguientes simetrías:

- ▶ Es invariante ante *rotaciones* alrededor de cualquier eje que contenga al centro de la distribución.
- ▶ Es invariante ante cualquier *reflexión* respecto a un plano que contenga al centro de la distribución.



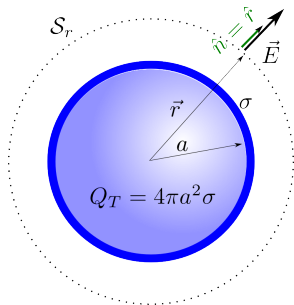
1. Proponemos una forma para el campo eléctrico:
 - a. El campo es **radial**
 - b. La componente radial sólo puede depender de la distancia entre el punto de observación y el centro de la distribución.

2.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\hat{r}$$

, con $\hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$, donde $\vec{r}_0$ es el centro de la distribución.

3. Para calcular el campo en el punto $\vec{r}$, elegimos una **superficie gaussiana esférica** $\mathcal{S}$, centrada en $\vec{r}_0$, y de radio $|\vec{r} - \vec{r}_0|$. De esta manera, el campo propuesto es siempre normal a la superficie, y su componente normal es constante.



4. Por la ley de Gauss,

$$E(r)4\pi r^2 = Q(r)/\varepsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

con $Q(r)$ la carga encerrada por la superficie gaussiana de radio r .

5. Consideramos dos casos:

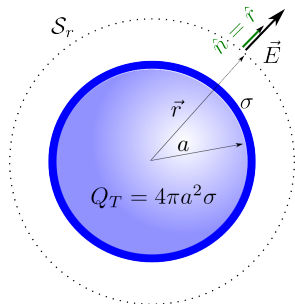
- Para una **distribución superficial** de carga sobre una esfera de radio R ,

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi R^2 \sigma & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

(recordar el resultado obtenido mediante la ley de Coulomb)

- Para una distribución volumétrica de carga $\rho(r)$:

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$



Ejercicio: calcular el campo eléctrico para la distribución
 $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$

4. Por la ley de Gauss,

$$E(r)4\pi r^2 = Q(r)/\varepsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

con $Q(r)$ la carga encerrada por la superficie gaussiana de radio r .

5. Consideramos dos casos:

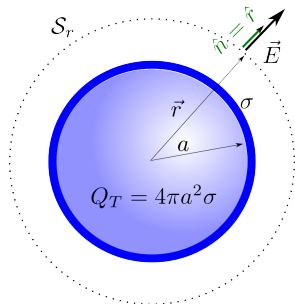
- Para una **distribución superficial** de carga sobre una esfera de radio R ,

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi R^2 \sigma & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

(recordar el resultado obtenido mediante la ley de Coulomb)

- Para una distribución volumétrica de carga $\rho(r)$:

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$



Ejercicio: calcular el campo eléctrico para la distribución
 $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$

Ejemplo 2: Campo generado por un plano cargado

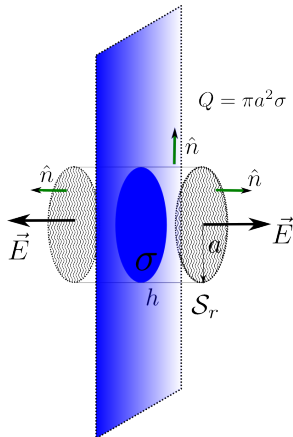
1. Simetrías:

- ▶ Traslaciones paralelas al eje.
- ▶ rotaciones en torno a cualquier eje perpendicular.
- ▶ Reflexiones respecto al plano.
- ▶ Reflexiones respecto a planos perpendiculares.

2. Forma del campo. Asumiendo que el origen está sobre el plano, con el eje z perpendicular a este, $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{u}_z$, el campo será de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{u}_z \quad E(-z) = -E(z)$$

3. Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de radio a y altura h , con el eje perpendicular al plano.
- ▶ El campo es siempre perpendicular a las “tapas” del cilindro, y paralelo a la superficie lateral.

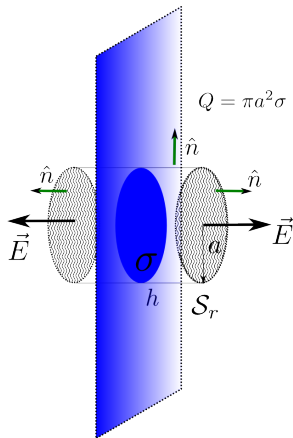


Por la **Ley de Gauss**,

$$E(z)\pi a^2 + E(-z)\pi a^2 = 2E(z)\pi a^2 = \frac{\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} \text{ luego,}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{z}{|z|} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

con $\hat{n} = \frac{z}{|z|} \hat{u}_z$ el **vector normal** a la distribución de carga, **orientado** según el **punto de observación**.



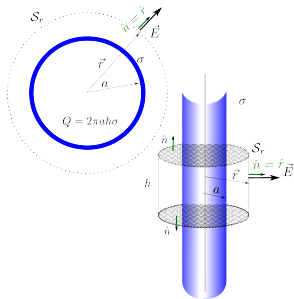
Notar que este resultado es consistente con el obtenido para un **disco** sobre su eje, a una distancia z mucho menor que su radio a :

$$\vec{E}_{\text{disco}}(z\hat{n}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) \hat{n} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \hat{n} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} = \vec{E}_{\text{plano}}(z\hat{n})$$

Ejemplo 3: Campo de una superficie cilíndrica

1. Simetrías:

- ▶ Traslaciones en la dirección del eje del cilindro
- ▶ Rotaciones alrededor del eje
- ▶ Reflexiones respecto de un plano que contenga al eje
- ▶ Reflexiones respecto de un plano perpendicular al eje



- ### 2. Forma del campo. Asumiendo que el origen está sobre el eje de simetría, con el eje z sobre ese eje, y $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{u}_z$, el campo será de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

- ### 3. Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de radio r y altura h , concéntrico con el eje de la distribución de carga.
- ▶ El campo es siempre paralelo a las “tapas” del cilindro. Toda la contribución proviene de la superficie lateral.
 - ▶ La carga encerrada será $2\pi a h \sigma$

4. Por la **Ley de Gauss**

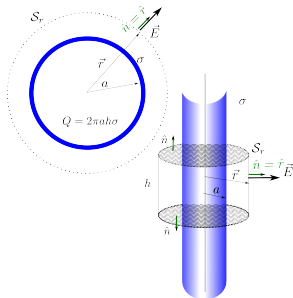
$$E(r)2\pi rh = \frac{2\pi ah\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 r}$$

ó, en función de la carga encerrada por unidad de longitud,

$$E(r) = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \lambda(r) = \begin{cases} 2\pi a\sigma & r > a \\ 0 & 0 < r < a \end{cases}$$

Este resultado es consistente con aquel obtenido para el hilo infinito, mediante la ley de Coulomb.

- Ejercicio: ver que el resultado sigue siendo válido para una **distribución volumétrica de carga** $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ reemplazando $\lambda(r) = 2\pi \int_0^r \rho(r')r' dr'$



El potencial electrostático

El campo electrostático es **Conservativo**

- Una forma conveniente de expresar el campo de una carga puntual es en términos del **gradiente** de una función escalar:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\nabla \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

(recordemos que $\nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$ y que $\nabla\phi(|\vec{r}|) = \phi'(r)\hat{r}$)

- Que un campo vectorial $\vec{W}$ pueda expresarse como el gradiente de una función escalar ϕ tiene como consecuencia que, para cualquier curva $\mathcal{C}$ que inicia en el punto $\vec{r}_i$ y termina en el punto $\vec{r}_f$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} -\nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(\vec{r}_i) - \phi(\vec{r}_f)$$

- Además, si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = 0$
- Decimos por lo tanto que tal campo es **Conservativo**.

Partiendo de que el **campo electrostático** de una carga puntual es **conservativo**, vemos que (por el **principio de superposición lineal**) el **campo electrostático** debido a **cualquier** distribución de cargas también lo es. De esta manera,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

y, para cualquier par de puntos $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$, y curva limitada por estos,

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} -\nabla V(\ell) \cdot d\vec{\ell} = V(\vec{r}_i) - V(\vec{r}_f) = -\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$$

Llamamos a $\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) = -\Delta V(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$ la **diferencia de potencial electrostático** entre dichos puntos.

Interpretación física

Supongamos que una partícula de carga q , inicialmente en reposo, es **arrastrada** a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ en presencia de un campo electrostático, por una fuerza $\vec{F}$, de forma muy lenta. De esta manera, $\vec{F} \approx -q\vec{E}$ en cada punto de la trayectoria. El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es entonces

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_{\mathcal{C}} -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) \end{aligned}$$

De esta manera, podemos definir a la **diferencia de potencial** entre dos puntos $\vec{r}_f$ y $\vec{r}_i$ como *el trabajo por unidad de carga requerido para llevar una carga de prueba, de forma **cuasi-estática**, desde el punto $\vec{r}_i$ hasta el punto $\vec{r}_f$.*

- Identificamos entonces a $-q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$ con el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga que se desplaza entre esos puntos.
- En ausencia de otras fuerzas, $W_E = -q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$ es igual al cambio en la energía cinética de una partícula al moverse del punto $\vec{r}_i$ al punto $\vec{r}_f$.

Unidades y medida de diferencias de potencial

- ▶ La unidad de diferencia de potencial en el sistema internacional es el **Volt** $V = \text{Joule Coulomb}^{-1}$.
- ▶ Las diferencias de potencial se miden con instrumentos llamados **Voltímetros**



- ▶ Observese que un **voltímetro** necesita **dos** terminales: una a ubicar en $\vec{r}_i$ (el cable negro) y otra en $\vec{r}_f$ (cable rojo).

El potencial electrostático

En general, dado un punto $\vec{r}_0$, podemos definir la función $V_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = V(\vec{r}, \vec{r}_0)$ a la que llamamos **potencial electrostático referido a $\vec{r}_0$** .

- ▶ La diferencia de potencial entre dos puntos viene dada por $\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) = V_{\vec{r}_0}(\vec{r}_f) - V_{\vec{r}_0}(\vec{r}_i)$
- ▶ Es fácil ver que la relación entre los potenciales electrostáticos referidos a puntos distintos viene dada por

$$V_{\vec{r}_0'}(\vec{r}_f) = V_{\vec{r}_0}(\vec{r}_f) - V_{\vec{r}_0}(\vec{r}_0')$$

- ▶ Independientemente del **referencial** elegido, $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V_{\vec{r}_0}(\vec{r})$
- ▶ El potencial $V(\vec{r}) = V_\infty(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ corresponde al potencial de una carga puntual ubicada en $\vec{r}_0$ **referido** a un punto infinitamente lejano.
- ▶ Debido a la **Ley de Gauss**, el potencial electrostático satisface la **Ecuación de Poisson**:

$$-\nabla^2 V = \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

donde ∇^2 es el **Operador Laplaciano** $\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$

Superficies Equipotenciales

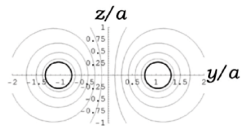
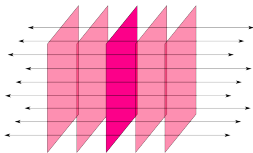
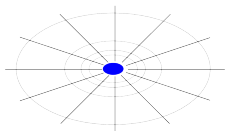
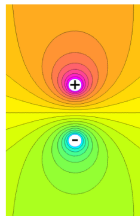
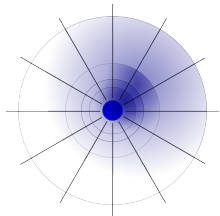
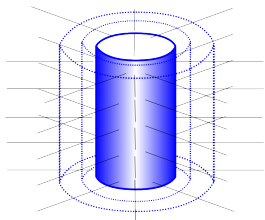
Definición

Una superficie equipotencial es el **lugar geométrico** formado por los puntos del espacio donde el **potencial electrostático** toma un valor constante.

► Propiedades

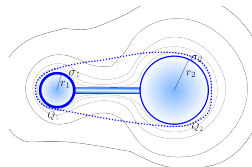
- Son ortogonales al campo electrostático $\Rightarrow$ son cruzadas ortogonalmente por las líneas de campo electrostático.
- Toda superficie equipotencial cerrada, encierra una cierta cantidad de carga neta.
- Alrededor de una carga puntual, tienden a la forma esférica concéntrica a la carga.
- Para una distribución localizada con carga neta no nula, tienden a una forma esférica para distancias grandes a la distribución.
- Los conductores definen **volumenes equipotenciales**: cualquier superficie interior a un conductor es una equipotencial.

Ejemplos



Efecto punta

- ▶ Sobre la superficie de un conductor, la densidad de carga superficial es **inversamente proporcional** al radio de curvatura.
- ▶ Como consecuencia de esto, los campos sobre la superficie de un conductor son más intensos cerca de las **puntas** de un conductor.



Consideremos dos esferas conductoras de radios r_1 y r_2 , alajeadas entre sí, y unidas por un hilo delgado.



- ▶ Ambas esferas están al mismo potencial $V_1 = V_2$
- ▶ La distribución de cargas sobre cada una de ellas no es influenciada por la otra (simetría esférica). Luego, $V_i = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$ (referido a infinito)
- ▶ $\Rightarrow \frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}$. La carga neta es proporcional al radio.
- ▶ $\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi r_i^2} \Rightarrow \sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2$. La densidad superficial de carga es **inversamente proporcional** al radio.
- ▶ El campo eléctrico en la superficie del conductor es proporcional a σ .
- ▶ Las superficies equipotenciales no cambian mucho si consideramos que el volumen alrededor del cable que une las esferas está "relleno" de conductor.

Conexión a tierra

- ▶ La **conexión a tierra** puede considerarse un caso extremo del **efecto punta**: al conectar un conductor a otro enormemente más grande (la tierra) todas las cargas se escapan a este último, dando como resultado un potencial nulo.

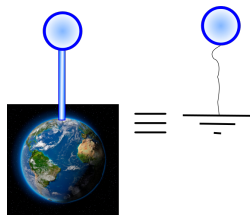
- ▶ La carga total se conserva:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \text{cte.}$$

- ▶ $\Rightarrow Q_i = Q_T \frac{r_i}{r_1 + r_2}.$

- ▶ Si $r_2 \rightarrow \infty,$

$$Q_1 \rightarrow 0 \Rightarrow V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \rightarrow 0 \text{ (referido a infinito).}$$



Energía Electrostatica

Energía Electroestática de un sistema de cargas puntuales

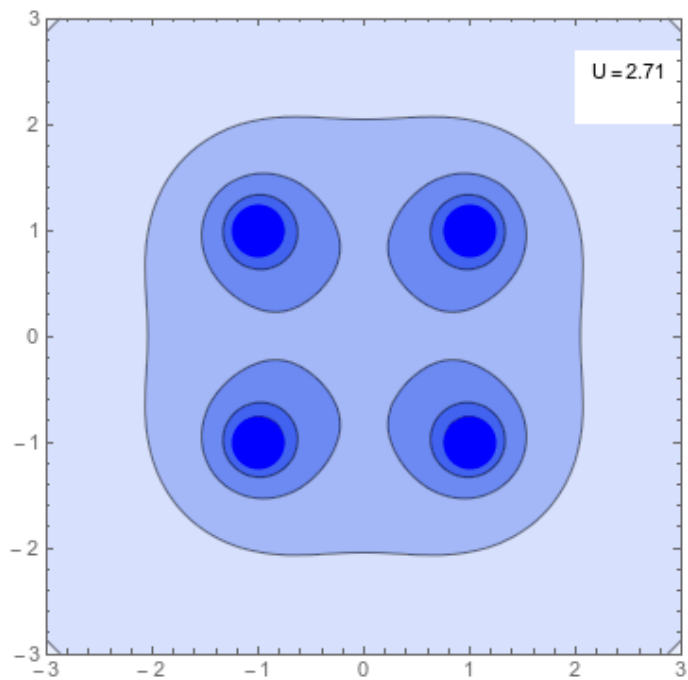
Dada una cierta distribución de **cargas puntuales** $\{q_i\}$ ubicadas en los puntos $\vec{r}_i$ podemos calcular el trabajo mínimo necesario para producirla, suponiendo que traemos las cargas que la forman **una a una** desde el infinito. Este trabajo será la suma de los trabajos W_i requeridos para traer la partícula i-esima desde infinito hasta su posición. De esta manera la **energía potencial electrostática** U_{pe} de un sistema de cargas puntuales viene dada por

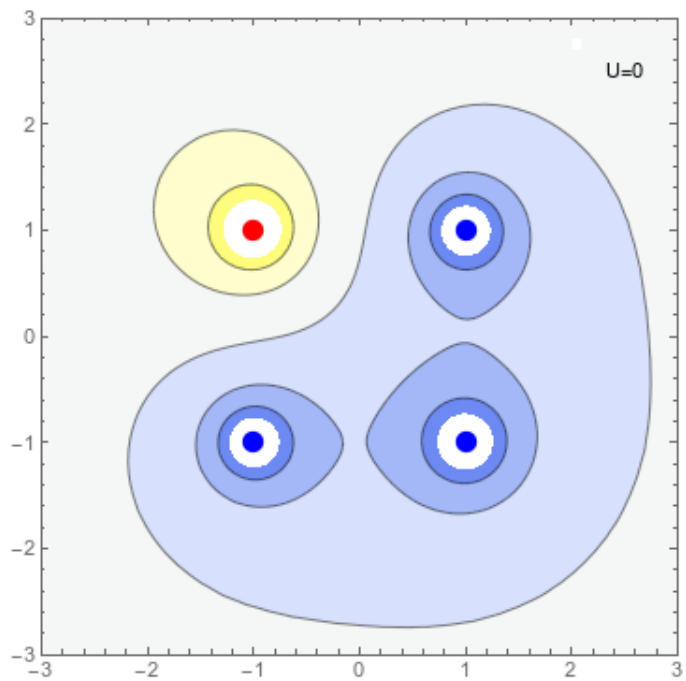
$$U_{pe} = \sum_i W_i$$

$$W_i = q_i V_i(\vec{r}_i) \quad V_i(\vec{r}_i) = \sum_{j < i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Luego,

$$U_{pe} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$





Densidad de Energía Electroestática

En general, para distribuciones **continuas** de carga, se puede mostrar que

$$U_{\text{pe}} = \int \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2}{2} d^3r$$

Por este motivo, se suele denominar a $\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2}{2}$ la **densidad de energía electrostática**.