

Clase 19 - Radiación Electromagnética. Electromagnetismo en medios materiales.

Prof. Juan Mauricio Matera

12 de noviembre de 2025

Energía y cantidad de movimiento en OEM

Energía y Cantidad de Movimiento en Ondas Electromagnéticas

- ▶ Como las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento.
- ▶ La Densidad de Energía contenida en los campos puede expresarse como

$$\mathcal{U}_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2$$

ó, en el caso de una onda plana, $|\vec{E}| = |\vec{B}|/c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{B}|$

$$\mathcal{U}_{EM}^{(\text{onda plana})} = \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)^2$$

- ▶ De manera que el **promedio temporal** de la **Densidad de Energía Electromagnética** viene dado por

$$\langle u_{EM}^{(\text{onda plana})} \rangle_{\text{onda plana}} = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2}{2}$$

- ▶ Por satisfacer la **Ecuación de Ondas 1D**, el **promedio temporal** de la **Densidad de Energía** es igual a su **promedio espacial**.

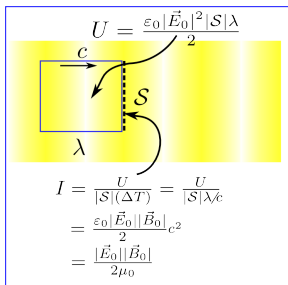
Flujo de energía. El vector de Poynting

- ▶ Al igual que como definimos la **Densidad de Flujo de energía** en ondas mecánicas, definimos el **Vector de Poynting** como el vector Densidad de Flujo

$$\begin{aligned}\vec{S} &= c\hat{k}\mathcal{E} = c\hat{k}\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E} \\ &= c\epsilon_0\vec{E} \times (c\vec{B}) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\end{aligned}$$

- ▶ La intensidad de la **radiación electromagnética** viene dada por el **módulo del valor medio del Vector de Poynting**:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{|\vec{E}_0||\vec{B}_0|}{2\mu_0} = \langle \mathcal{U} \rangle c$$



Teorema de Poynting

$$W_j = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad \text{Trabajo neto de los campos}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

$$= -\nabla \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

$$= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial t}$$

$$\text{Vector de Poynting} \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Densidad de energía

Eléctrica

Magnética

$$\mathcal{U}_E = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

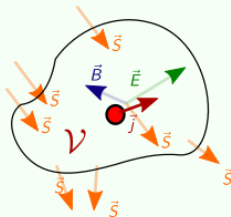
$$\mathcal{U}_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_{\text{ext}} + \vec{S}_j + \frac{\vec{E}_j \times \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ext}} \times \vec{B}_j}{\mu_0}$$

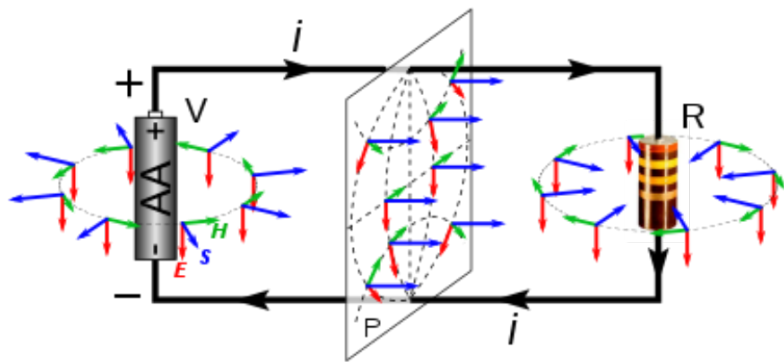


John Poynting

1852 - 1914



Flujo del vector de Poynting en un circuito



- ▶ La **Densidad de Cantidad de Movimiento** del Campo EM viene dada por

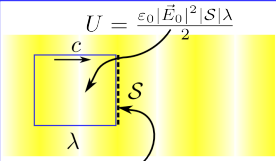
$$\mathcal{P} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

- ▶ Luego, integrando en todo el espacio,

$$\vec{p} = \int \mathcal{P} dV$$

es la cantidad de movimiento asociada al campo electromagnético.

- ▶ Una onda electromagnética transporta energía y cantidad de movimiento al propagarse.



$$U = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 |S| \lambda}{2}$$

$$I = \frac{U}{|S|(\Delta T)} = \frac{U}{|S| \lambda c}$$

$$= \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2 c^2}$$

$$= \frac{|\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2 \mu_0}$$

Presión de Radiación

Cuando una superficie interactúa con radiación electromagnética, esta sufre una **presión de radiación**.

- ▶ Si la absorción es completa (absorción completa)

$$\langle \vec{F} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \hat{k} \cdot \vec{S} c \langle \vec{P} \rangle$$

$$-\langle \vec{F} \rangle \cdot \vec{n} = S \cos(\theta) c \frac{|\langle \vec{S} \rangle|}{c^2} = S P_{\text{rad}}$$

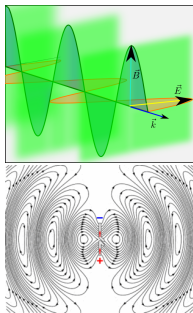
donde $P_{\text{rad}} = \cos(\theta) \frac{I}{c}$
es la **Presión de Radiación**, o sea, la cantidad de movimiento absorbida



- ▶ Si la reflexión es completa, la radiación es reemitida en sentido contrario, luego

$$P_{\text{rad}} = 2 \cos(\theta) \frac{I}{c}$$

Intensidad de una onda general

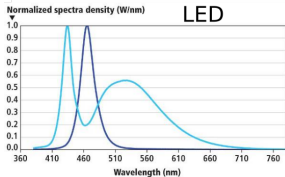
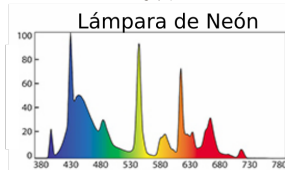
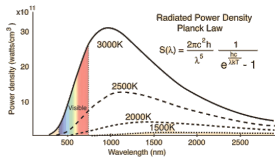


- ▶ Toda onda electromagnética es la superposición de ondas planas monocromáticas polarizadas.
- ▶ Su intensidad (promedio espacial, en un volumen a^3) es entonces

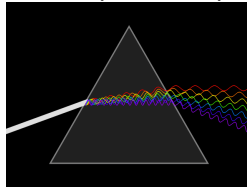
$$I = \sum_p \int I_{p,\lambda}(\vec{r}) d\lambda$$

con

$$I_{p,\lambda} \approx \frac{(2\pi)^3}{a^3 \lambda^3} \int |\vec{E}_p(\frac{2\pi}{\lambda} \check{k})|^2 d\check{k}$$



- ▶ La cantidad $S(\lambda) = I_{1,\lambda} + I_{2,\lambda}$ se conoce como *Espectro de potencia* y representa cómo se distribuye la energía electromagnética en las diferentes longitudes de onda.
- ▶ $S(\lambda)$ depende de la fuente.
- ▶ Como las diferentes longitudes de onda se propagan con diferentes velocidades en medios dispersivos, es posible separar sus componentes.



Flujo de energía en la radiación dipolar

Resistencia de Radiación

- ▶ Recordando que $\vec{p} = q(t)\vec{a}$, que $\frac{d\vec{p}}{dt} = I(t)\vec{a}$, y que $I_0 = I_{ef}\sqrt{2}$,
 $|\omega\vec{p}_0| = \sqrt{2}I_{ef}a$.
- ▶ Luego,

$$W = \frac{\mu_0\omega^2 I_{ef}^2}{12\pi c} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 I_{ef}^2 = R_{\text{rad}} I_{ef}^2$$

donde $Z_0 = \mu_0 c \approx 376\Omega$ es la **Impedancia del vacío**, $\lambda = 2\pi c/\omega$ la **longitud de onda** y

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 Z_0$$

la **resistencia de radiación** de la antena.

- ▶ De esta manera, cuando la **longitud de onda** de la señal es **pequeña** frente al tamaño de la antena (o del circuito), la **potencia radiada** se vuelve mayor a la **potencia disipada** por **Efecto Joule**.

Problema de integración

Considere el *modelo atómico de Rutherford*: de acuerdo a este modelo, un átomo estaría formado por un núcleo puntual, positivo, de carga Ze , en torno al cual se mueven electrones de carga $-e$ en órbitas circulares. Para el caso $Z = 1$ (Hidrógeno)

- ▶ Calcule la energía mecánica del átomo, y la frecuencia angular del electrón en función del radio de la órbita.
- ▶ Determine el momento dipolar eléctrico como función del tiempo. Expresé la potencia irradiada promedio W , como función de r , y la longitud de onda de la radiación.
- ▶ Usando la relación $\frac{dE}{dt} = -W$, y asumiendo que inicialmente $r = a_0 = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$, determine cómo se reduce el radio de la órbita como función del tiempo.

Electromagnetismo en presencia de materia

- ▶ Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos \vec{E} y \vec{B} con la distribución de cargas y corrientes, cualquiera sea su origen.
- ▶ La materia está formada microscópicamente por cargas en movimiento, pero los campos que producen tienden a cancelarse *en promedio*.
- ▶ En la práctica, conviene distinguir las cargas y corrientes *libres* (que controlamos), de las que están *ligadas* a las propiedades internas de la materia.

Ecuaciones de Maxwell en presencia de materia

Desplazamiento $\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ \leftarrow Polarización

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \rightarrow \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \\ \nabla \cdot \vec{P} = -\rho_{pol} \\ \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = \rho_{mag} \end{array} \right.$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_{mag} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{array} \right.$$

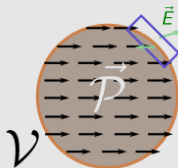
Campo
desmagnetizante

$$\vec{B} / \mu_0 = \vec{H} + \vec{M} \leftarrow \text{Magnetización}$$

Interpretación de $\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$

- ▶ En un sistema en equilibrio $\vec{j}_{libre} = 0$ y \rightarrow
- ▶ Las ecuaciones para \vec{E} y \vec{H} son iguales.
- ▶ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
- ▶ Resolviendo en términos de potenciales
- ▶ $\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$ se interpretan como *densidades volumétricas de momento dipolar*.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}/\epsilon_0 & \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \vec{E} &= -\nabla \Phi_E(\vec{x}) & \vec{H} &= -\nabla \Phi_H(\vec{x}) \end{aligned}$$



$$\text{Si } \vec{\mathcal{P}} = \begin{cases} \vec{\mathcal{P}}_0 & r < a \\ 0 & r \end{cases} \Rightarrow \Phi_E = \frac{4/3 \pi a^3 \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 \max(r, a)^3}$$

$\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$ son las *densidades volumétricas de momento dipolar*.

Ondas Electromagnéticas en medios lineales

Ecuaciones de Maxwell en medios lineales

- ▶ $\vec{D} = (1 + \chi_E)\epsilon_0\vec{E} = \epsilon\vec{E}$
- ▶ $\vec{B} = (1 + \chi_M)\mu_0\vec{H} = \mu\vec{H}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{\text{libre}}/\epsilon$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\vec{j}_{\text{libre}} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Para soluciones armónicas,
 $\vec{E} \propto e^{-i\omega t}$, $\vec{j}_{\text{libre}} = \sigma\vec{E}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{B} = -i\omega\mu\left(\frac{i\sigma}{\omega} + \epsilon\right)\vec{E}$$

- ▶ En ausencia de cargas y corrientes libres, $c \rightarrow \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$.
- ▶ Para soluciones armónicas, podemos absorber la corriente de conducción en la constante dieléctrica $\epsilon \rightarrow \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \rightarrow n(\omega)$ complejo!

Teorema de Poynting

- ▶ En la práctica, conviene reescribir el teorema de Poynting en términos de las corrientes y cargas *libres*.
- ▶ Para medios lineales e isotrópos, las expresiones coinciden con las del vacío, salvo por el cambio $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$, $\mu_0 \rightarrow \mu$.
- ▶ Cargamos en las energías eléctrica y magnética el trabajo de las fuerzas que intervienen en la polarización (de origen EM o no).

$$W_{\text{libre}} = \int \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{libre}} dV \quad \vec{S}_{\text{libre}} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{libre}} = -\nabla \cdot \vec{S}_{\text{libre}} - \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\mathcal{U}_E} - \underbrace{\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\mathcal{W}_M}$$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}}_{\mathcal{U}_E} + \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\mathcal{W}_P}$$

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mathcal{U}_B}{2\mu_0}}_{\mathcal{U}_M} - \underbrace{\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\mathcal{W}_M}$$

▶ Si $\vec{D} = \vec{E}\epsilon$ y $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$W_{\text{libre}} = - \int \vec{S} \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} (U_D + U_H) dV$$

con

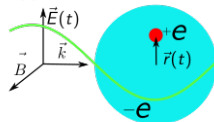
$$U_D = \frac{\epsilon |\vec{E}|^2}{2} \quad U_H = \frac{|\vec{H}|^2 \mu}{2}$$

Polarizabilidad en campos oscilantes

- ▶ Podemos modelar la polarizabilidad atómica debida a un campo oscilante como un oscilador amortiguado.
- ▶ μ masa reducida nube-núcleo.
- ▶ Disipación η debido al acoplamiento mecánico a la red iónica.

$$\vec{p}(t) = e\vec{r}(t)$$

$$\vec{E}(t) \approx \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$



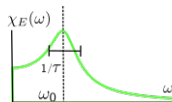
$$\mu = \frac{m_N m_e}{m_N + m_e} \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{kg}$$

$$a_0 \approx 10^{-10} \text{m} \text{ el radio atómico.}$$

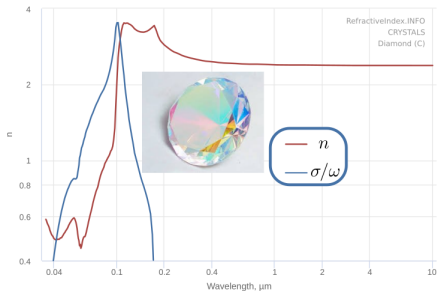
$$\omega_0 = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \mu a^3),$$

$$\tau = \mu / \eta$$

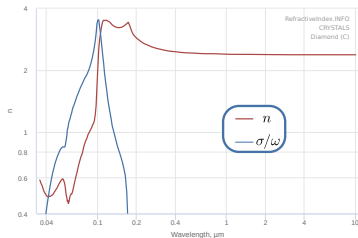
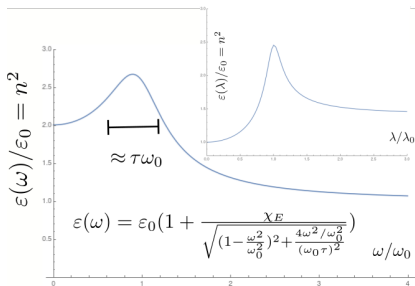
$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = e\vec{E} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{r} - \eta \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{p}(t) = \frac{e^2 / \mu}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \vec{E}(t)$$



Ejemplo: índice de refracción en el diamante



$$\lambda_0 \approx 10^{-7} \text{m}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx 10^{16} \text{Hz}$$

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_0} \approx \frac{\epsilon_0}{\sigma} \approx 10^{-16} \text{s}$$



Pregunta de integración

Considere un arreglo de barras cilíndricas conductoras de largo L y diámetro $a \ll L$ y conductividad σ . Si las barras se distribuyen en forma paralela sobre un plano y sin tocarse, explique qué espera observar cuando una onda plana, linealmente polarizada, incide sobre el arreglo, como función del ángulo de polarización.