

Clase 17 - Magnetismo en la materia - Transitorios y Corriente Alterna

Prof. Juan Mauricio Matera

5 de noviembre de 2025

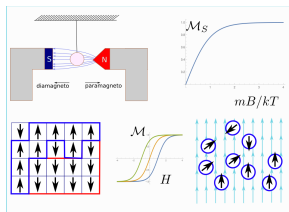
Magnetismo en presencia de materia

Magnetización

- ▶ No se puede explicar en términos de partículas “clásicas” cargadas.
- ▶ En un *medio lineal isótropo*,
 $\vec{M} = \chi_M \vec{H}$.
- ▶ Se introduce $\mu = \mu_0(1 + \chi_M)$, la *permeabilidad magnética* del medio.

$$\begin{aligned}\vec{B}/\mu_0 &= \vec{H} + \vec{M} \\ &= (1 + \chi_M)\vec{H} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} \\ \mu &= (1 + \chi_M)\mu_0\end{aligned}$$

En los medios materiales, se observan los siguientes comportamientos:



- ▶ Magnetización inducida por \vec{H}
 - ▶ Diamagnetismo (repelidos por imanes)
 - ▶ Paramagnetismo (atraídos por imanes)
- ▶ Magnetización intrínseca
 - ▶ Ferromagnetismo
 - ▶ Anti Ferromagnetismo - Ferrimagnetismo

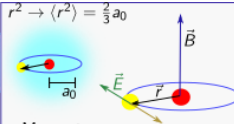
Diamagnetismo

- ▶ En un superconductor, $\chi_M = -1$
- ▶ Para materiales típicos, $\chi_M \approx -10^{-6}$
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Helio $\chi_M \approx -9.85 \times 10^{-10}$
 - ▶ Agua: $\chi_M \approx -9 \times 10^{-6}$
 - ▶ Parafina $\chi_M \approx -8.8 \times 10^{-6}$
 - ▶ Cobre $\chi_M \approx -9.63 \times 10^{-6}$
 - ▶ Diamante $\chi_M \approx -2.2 \times 10^{-5}$
- ▶ Modelo *clásico*: consecuencia de la Ley de Faraday

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\frac{q^2}{4\pi m} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad q = Ze$$

- ▶ $\chi_M =$ molaridad de átomos diamagnéticos $(dn/dV) \times N_A \times$ magnetización de un átomo \vec{m}

$r^2 \rightarrow \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} a_0^2$



Momento angular $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$

corriente $I \approx \frac{qv}{2\pi r} = \frac{qL}{2\pi m r^2}$

Momento magnético $\vec{M} = \vec{S}I = \frac{q}{2m}\vec{L}$

Ley de Faraday $\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pi r^2 B$
 $\mathcal{E} = 2\pi r E = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t}$

Torque $\vec{T} = q\vec{r} \times \vec{E}$

$$\vec{M} = -\frac{q^2 r^2}{4m} \vec{B} + \vec{M}|_{B=0}$$

$$\mathcal{M} = \frac{dn}{dV} \vec{M} = \frac{\chi_M}{1 + \chi_M} \frac{B}{\mu_0}$$

$$\chi_M \approx -\frac{q^2 a_0^2}{6m} \frac{dn}{dV}$$

Paramagnetismo

- ▶ Átomos con momentos magnéticos *permanentes*.
- ▶ Resulta de la distribución de Boltzmann con energía $U_B = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.
- ▶ $\chi_M > 0$
- ▶ χ_M depende de la temperatura (Ley de Curie) $\chi_M \approx \frac{|\vec{m}_0|^2}{3kT}$
- ▶ Para campos intensos,

$$\vec{M} \approx \vec{M}_s \tanh(\vec{B} \cdot \vec{M}/kT)$$

- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Oxígeno: $\chi_M = 3,73 \times 10^{-7}$
 - ▶ Aluminio: $\chi_M \approx 2,2 \times 10^{-5}$
 - ▶ Niquel: $\chi_M \approx 600$
 - ▶ Hierro: $\chi_M \approx 2 \times 10^5$

Ferromagnetismo, Antiferromagnetismo y Ferrimagnetismo

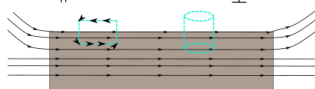
- ▶ Resultado de la *interacción de intercambio*.
- ▶ Grupos de átomos se alinean dentro de *dominios magnéticos*.
- ▶ \vec{M} depende de la historia (*histéresis*).
- ▶ A temperaturas altas, el *orden magnético* se pierde, y se obtiene una *fase paramagnética*.
- ▶ Ley de Curie-Weiss

$$\chi_M \approx \frac{C}{T - T_c}$$

- ▶ En un ferromagneto, $T_c > 0$, y a bajas temperaturas todos los momentos se alinean paralelos, aún para $\vec{H} = 0$.
- ▶ En un anti-ferromagneto, $T_c < 0$, y a bajas temperaturas los momentos se alinean anti-paralelos. $\chi_B \rightarrow 0$ para campos bajos.
- ▶ En un ferrimagneto, los momentos no se cancelan totalmente entre sí.

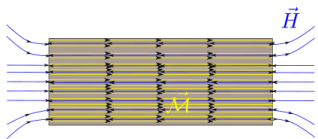
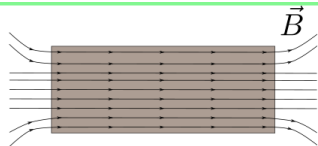
H vs B

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \quad \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H} \quad \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\Delta \vec{H}_{\parallel} = 0 \quad \Delta \vec{B}_{\perp} = 0$$
$$\Delta \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \Delta \frac{1}{\mu}$$


The diagram shows a brown rectangular slab with horizontal magnetic field lines. A dashed blue rectangle is drawn on the top surface, and a dashed blue cylinder is drawn vertically through the slab. Arrows indicate the direction of the field lines and the orientation of the differential elements.

Si $\mu \gg \mu_0$ las líneas de campo están confinadas.



Reluctancia \mathcal{R}

$$N_1 i = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$
$$= \frac{\Phi_B}{\mu \mathcal{S}} \ell = \mathcal{R} \Phi_B$$
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \vec{\ell} = RI$$

μ juega el rol de σ
en un circuito eléctrico

Sin núcleo

$$\mathcal{R}_0 \approx \frac{\ell_1}{S \mu_0}$$

$$\Phi_B^{(2)} \approx \alpha \mathcal{R}_0$$

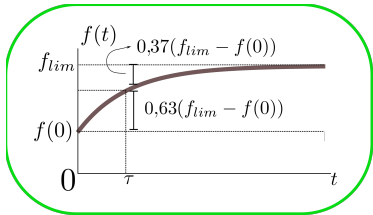
"circuito magnético"

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

Transitorios



$$f(t) = f_{lim} + (f(0) - f_{lim})e^{-t/\tau}$$

- ▶ Para tiempos menores que τ , la solución varía con velocidad $(f_0 - f_{lim})/\tau$ en dirección al valor límite f_{lim} .
 - ▶ Para tiempos mayores a τ , la solución tiende al valor constante f_{lim} .
- ▶ Decimos que entre $t = 0$ y $t \gg \tau$, el sistema atraviesa un **transitorio**, hasta alcanzar una situación estacionaria.
 - ▶ Para $t \approx \ln(2)\tau \approx 0.69\tau$, la diferencia entre $f(t)$ y f_{lim} cae al 50% de su valor inicial.
 - ▶ Para $t \approx \tau$, la diferencia entre $f(t)$ y f_{lim} cae al 37% de su valor inicial.

- ▶ La ecuación diferencial lineal de primer orden aparece recurrentemente en ciencias:
 - ▶ Movimiento en medios viscosos.
 - ▶ Procesos disipativos.
 - ▶ Decaimiento radioactivo.
 - ▶ Marcha al equilibrio en procesos químicos.
 - ▶ Concentración de antibióticos en sangre.
- ▶ Nótese que si $\tau < 0$, el comportamiento va en “reversa”: la distancia al valor “límite” **crece exponencialmente**. Este tipo de dinámicas representa fenómenos “explosivos”, como la propagación de una infección.

Volviendo al circuito RC,

$$RC \frac{dV_C}{dt} = \mathcal{E} - V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{RC} - \frac{1}{RC} V_C$$

de manera que $V_{C,lim} = \mathcal{E}$, $\tau = RC$ y por lo tanto,

$$V_C(t) = \mathcal{E} + (V_C(0) - \mathcal{E})e^{-t/\tau}.$$

- ▶ La corriente en el circuito se recupera vía

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = -\frac{C(V_C(0) - \mathcal{E})}{\tau} e^{-t/\tau}$$

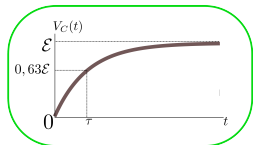
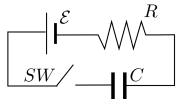
que se anula para $t \gg \tau$.

- ▶ Si inicialmente el capacitor estaba **descargado**,

$V_C(0) = Q(0)/C = 0$, con lo que

$$i = \frac{C\mathcal{E}}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{C\mathcal{E}}{RC} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}.$$

- ▶ A $t = 0$, la corriente se comporta **como si** remplazáramos el capacitor por un cable.



Descarga del capacitor

Si, luego de cargar al capacitor, se retira la batería, la ecuación diferencial

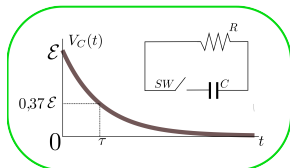
$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{RC} - \frac{1}{RC} V_C$$

se reduce a

$$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{RC} V_C$$

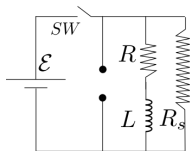
con la condición inicial, $V_C(0) = \mathcal{E}$.

- ▶ De esta manera, $V_{C,lim} = 0$, $\tau = RC$ y $V_C(t) = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$.
- ▶ La corriente en el circuito será $i = C \frac{dV_C}{dt} = -\frac{C\mathcal{E}}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$



- ▶ El **signo negativo** en la **corriente** se debe a que su **circulación es opuesta que en la carga**.
- ▶ En la descarga, un capacitor se comporta inicialmente como si fuese una **FEM** que decrece a medida que se descarga.

Problema de aplicación



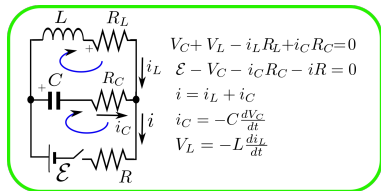
El circuito de la figura se conoce como arrancador o chispero. Al cerrar el interruptor SW , se establece una corriente sobre el inductor, y al desconectarlo, se produce una chispa entre los terminales abiertos (círculos negros).

Suponiendo que $\mathcal{E} = 5V$, $R = 1\Omega$, $R_s = 20k\Omega$ y $L = 10H$, determine:

- ▶ El tiempo que tarda en establecerse una corriente estacionaria en L .
- ▶ La energía almacenada en L .
- ▶ La tensión que aparece en los terminales al abrir el interruptor.
- ▶ La tensión en los terminales en función del tiempo. ¿Quién pone la energía para producir la chispa?

Circuitos no tan simples, tratamiento general

Tratamiento general



- Reemplazando en la primera malla,

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dV_C}{dt} + \omega^2 (V_C - V_{C,lim}) = 0$$

- Reemplazando $i \rightarrow i_L + i_C$ y despejando i_L de la segunda ecuación,

$$i_L = \frac{\mathcal{E} - V_C - (R + R_C)i_C}{R} = 0$$

Reemplazando en V_L ,

$$V_L = \frac{L}{R} \left(\frac{dV_C}{dt} + (R + R_C)C \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

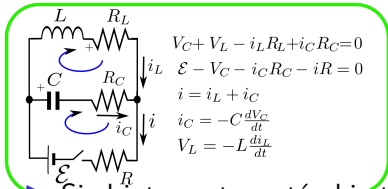
- con

$$\omega^2 = \left(\frac{R + R_L}{R + R_C} \frac{1}{LC} \right),$$

$$V_{C,lim} = \frac{R_L}{R + R_L} \mathcal{E} \text{ y}$$

$$\tau =$$

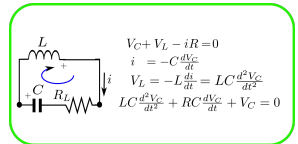
$$\frac{2LC(R + R_C)}{L + (R(R_C + R_L) + R_L R_C)C}$$



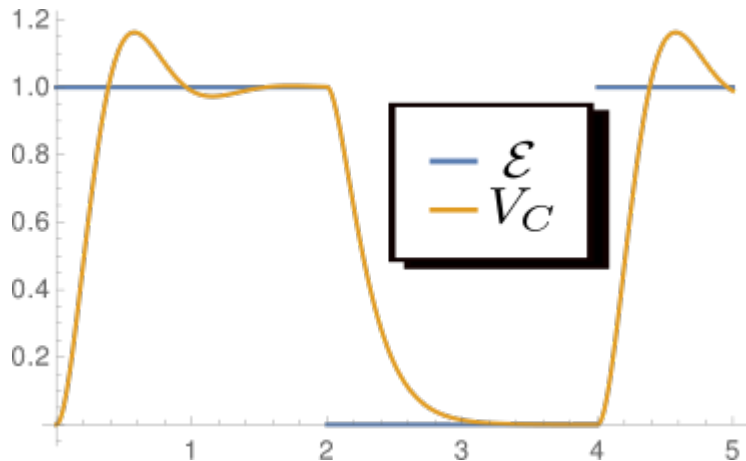
$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dV_C}{dt} + \omega^2 (V_C - V_{C,lim}) = 0$$

- ▶ Si el interruptor está abierto, $R \rightarrow \infty$, $\mathcal{E} \rightarrow 0$ y el circuito se reduce a un RLC serie.
- ▶ En este caso, la ecuación diferencial toma la misma forma, pero con los parámetros

- ▶ $\omega^2 = \frac{1}{LC}$,
- ▶ $V_{C,lim} = 0$ y
- ▶ $\tau = \frac{2L}{R_L + R_C}$



... sin embargo, el transitorio puede presentar oscilaciones:



La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{df(t)}{dt} + \omega^2(f(t) - f_{lim}) = 0$$

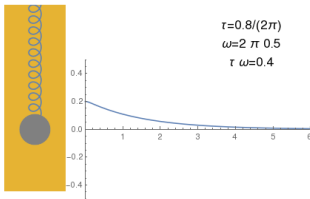
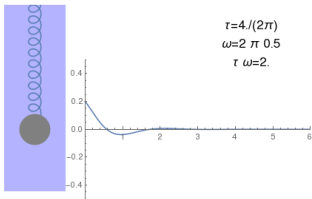
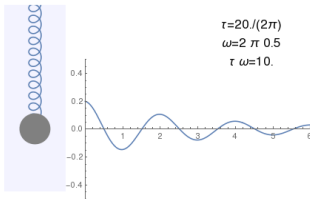
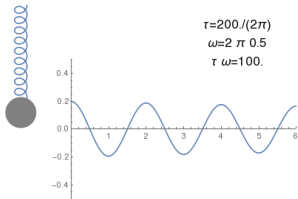
Reordenando la ecuación, y considerando el caso en que $f(t)$ es la posición de una partícula

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2(x(t) - x_{lim}) - \frac{2}{\tau} \frac{dx(t)}{dt}$$

identificamos la forma de la **Segunda Ley de Newton** para una partícula sujeta a

1. Una fuerza elástica.
 2. Una fuerza de arrastre.
- ▶ Si $\omega^2 \rightarrow 0$, las soluciones son de la forma $x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-t'/\tau} dt'$ (como en un transitorio).
 - ▶ Si $\tau \rightarrow \infty$, las soluciones son de la forma $x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi_0) + x_{lim}$ (como en un oscilador armónico).

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2(x(t) - x_{lim}) - \frac{2}{\tau} \frac{dx(t)}{dt}$$



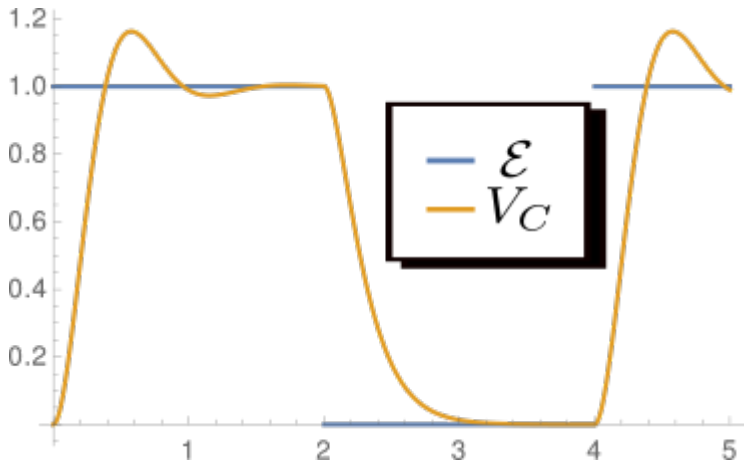
... volviendo al circuito,

... volviendo al circuito,

Observamos que al cambiar la posición de la llave, si

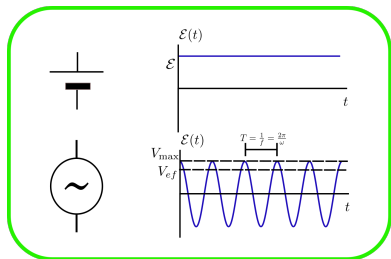
$\tau\omega = 2\frac{\sqrt{L/C}}{(R_L+R_C)} > 1$, la tensión en C (y la corriente en L) sufren oscilaciones amortiguadas con una frecuencia $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- ▶ La amortiguación puede eliminarse si la llave se cierra y se vuelve a abrir con una frecuencia cercana a $\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, la **frecuencia de resonancia** del sistema.
- ▶ Este es el comportamiento típico de los circuitos RLC , que son la base de los **osciladores eléctricos**.



Corriente Alterna

En un circuito de corriente alterna, las baterías son remplazadas por fuentes de **tensión alterna**



En una **fuerza de tensión alterna** la **diferencia de potencial** entre sus bornes es de la forma

$$V(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(2\pi ft + \phi_0)$$

donde

- ▶ V_{ef} es el **valor eficaz** de la tensión en la fuente,
 - ▶ f es la **frecuencia** y
 - ▶ ϕ_0 es un **ángulo de fase inicial**.
-
- ▶ Si en el circuito tenemos una única fuente de tensión alterna, podemos elegir siempre $\phi_0 = 0$.
 - ▶ Veremos ahora que las tensiones y corrientes en el resto del circuito también serán armónicas, pero con fases diferentes a ϕ_0

Fuentes de Tensión Alterna

- ▶ Alternadores
- ▶ Osciladores electrónicos
- ▶ Señales alternas (ej: transducción de sonido en corriente)

Valor Eficaz

- ▶ El valor medio (temporal) de una **tensión alterna** es nulo

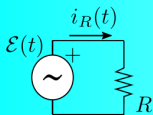
$$\begin{aligned}\langle V(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \sqrt{2}V_{ef} \frac{\int_0^T \cos(\omega t) dt}{T} \\ &= \sqrt{2}V_{ef} \frac{1 - \sin(\omega T)}{\omega T} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

- ▶ Por ese motivo, se prefiere utilizar para su caracterización su **dispersión media cuadrática** o **valor eficaz**:

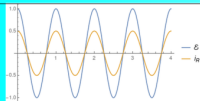
$$\sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt} = V_{ef} \sqrt{\frac{\int_0^T 2 \cos^2(\omega t) dt}{T}} \rightarrow V_{ef}$$

Consideremos ahora los casos más simples de circuitos de CA

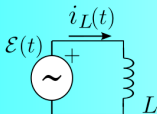
$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{2}V_{\text{eff}} \cos(\omega t)$$



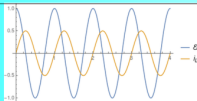
$$\mathcal{E}(t) - i(t)R = 0$$



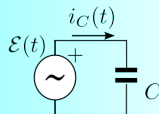
$$i_R(t) = \sqrt{2} \frac{V_{\text{eff}}}{R} \cos(\omega t)$$



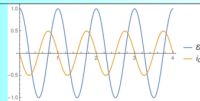
$$\mathcal{E}(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} = 0$$



$$i_L(t) = \sqrt{2} \frac{V_{\text{eff}}}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



$$C \frac{d\mathcal{E}}{dt} - i_C(t) = 0$$



$$i_C(t) = \sqrt{2} \frac{V_{\text{eff}}}{1/(C\omega)} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Impedancia

- ▶ Encontramos que en estos tres casos, la corriente es también una función armónica

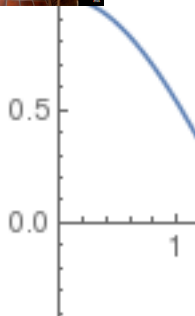
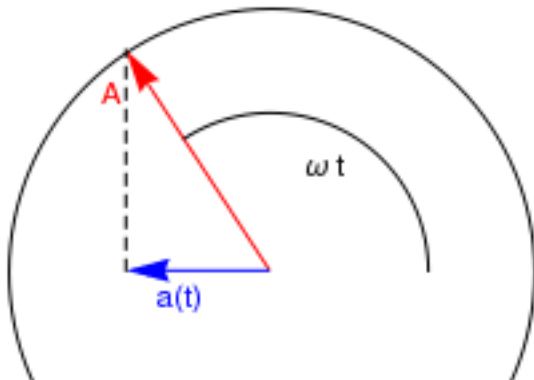
$$I(t) = \sqrt{2}I_{eff} \cos(\omega t + \phi) \quad I_{eff} = V_{eff} / Z$$

donde

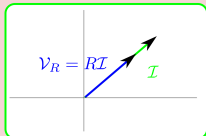
- ▶ Z es la **impedancia** del elemento
- ▶ ϕ es su **diferencia de fase**
- ▶ En general, toda rama compuesta por elementos **lineales**, sometida a una **tensión armónica** transporta una **corriente armónica** con la misma frecuencia.
- ▶ La rama queda caracterizada por sus valores de Z y ϕ .
- ▶ Los valores de Z y ϕ dependerán en general de la frecuencia.

Interpretación geométrica: Fasores

- ▶ Podemos pensar a las cantidades con una dependencia armónica como la componente horizontal de *vectores* que giran con velocidad angular ω .
- ▶ A este objeto geométrico lo llamamos **Fasor**.
- ▶ La derivada actúa sobre los fasores multiplicándolos por el factor ω , y **adelantándolos** $\pi/2$.



Relación entre fasores

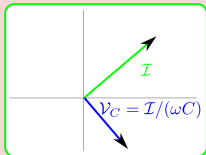


En una resistencia,

$$V_R(t) = i(t)R.$$

Luego, los fasores tensión \mathcal{V} y corriente \mathcal{I} son **Proporcionales**:

$$\mathcal{V} = \mathcal{I}R.$$

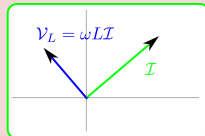


En un capacitor,

$$i(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}.$$

Luego, el **Fasor Corriente** \mathcal{I} está **adelantado** $\pi/2$ respecto al **Fasor tensión** \mathcal{V} y la magnitud del primero es ωC veces la del segundo

$$|\mathcal{I}| = C\omega|\mathcal{V}|.$$



En una inductancia **ideal**,

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Luego, el **Fasor Tensión** \mathcal{V} está **adelantado** $\pi/2$ respecto al **Fasor corriente** \mathcal{I} y la magnitud del primero es ωL veces la del segundo $|\mathcal{V}| = L\omega|\mathcal{I}|$.

Potencia entregada por la fuente

- ▶ La potencia instantanea **entregada** por la fuente vendrá dada por

$$P(t) = V(t)i(t) = 2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

- ▶ A partir de la identidad $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ podemos descomponer esta en dos términos

$$P(t) = P_{resistiva}(t) + P_{reactiva}(t)$$

donde:

- ▶ $P_{resistiva}(t) = 2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos^2(\omega t) \cos(\phi)$
- ▶ $P_{reactiva}(t) = -2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\phi) = \frac{V_{ef}^2}{Z\omega} \sin(\phi) \frac{d}{dt} \cos^2(\omega t)$

$$P_{resistiva}(t) = 2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos^2(\omega t) \cos(\phi)$$

- ▶ $P_{resistiva}$ es una cantidad positiva, cuyo promedio temporal viene dado por

$$\langle P \rangle = \langle P_{resistiva} \rangle = V_{ef}^2 \cos(\phi) / Z = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi).$$

Nótese la semejanza de esta expresión con aquella para la potencia disipada en una resistencia en circuitos de corriente continua.

$$P_{reactiva}(t) = -2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\phi) = \frac{V_{ef}^2}{Z\omega} \sin(\phi) \frac{d}{dt} \cos^2(\omega t)$$

- ▶ Por otro lado, por ser una derivada total de una función periódica, $P_{reactiva}(t)$ tiene valor medio nulo: esta potencia da cuenta de una conversión **reversible** de la energía de la fuente en energía de los campos que genera el circuito.

Reactancia y resistencia

Si a una fuente de CA $V(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(\omega t)$ se conecta

- ▶ una **resistencia** de valor R ,

$$i(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(\omega t) / R$$

por lo que $\phi = 0$ y $Z = R$.

- ▶ un **Capacitor** de capacidad C , se establecerá una corriente entre sus placas de

$$i(t) = C \frac{dV}{dt} = -\sqrt{2}V_{ef}\omega C \sin(\omega t) = \sqrt{2}V_{ef}\omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Luego, $Z = X_C$ con $X_C = \frac{1}{\omega C}$ la **Reactancia capacitiva**. En un capacitor, decimos que **la corriente adelanta a la tensión** en un ángulo de $\phi = \pi/2$.

- ▶ una **autoinductancia** (ideal) de valor L , la corriente se relacionará con la tensión $\mathcal{E}(t)$ como

$$\mathcal{E}(t) = L \frac{di}{dt} = -\sqrt{2}L\omega I_{ef} \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{2}L\omega I_{ef} \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

de manera que $Z = X_L$ con $X_L = \omega L$ la **reactancia inductiva**.
En este caso, **la tensión adelanta a la corriente** $\phi = \pi/2$.

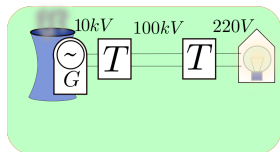
Factor de potencia

- ▶ En la expresión

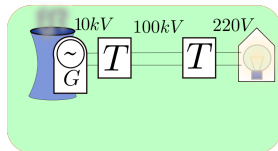
$$\langle P \rangle = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi)$$

el factor $\cos(\phi)$ suele llamarse **factor de potencia**, y da cuenta de cuanta potencia consume un circuito.

- ▶ En un circuito puramente resistivo, $R = Z$ y $\cos(\phi) = 1$.
- ▶ La presencia de inductores (como motores, o lámparas fluorescentes) en un circuito, reducen el factor de potencia.



- ▶ Si para realizar su función, un circuito consume una potencia P , al ser alimentado por una fuente de tensión de valor eficaz V_{ef} , la corriente que atravesará el circuito vendrá dada por $I_{ef} = \frac{P}{V_{ef} \cos(\phi)}$.



- ▶ Si la fuente de alimentación se conecta al circuito mediante un cable de resistencia R , la potencia disipada en el cable será $P_{dis} = R_{cable} I_{ef}^2 = \frac{R_{cable} P^2}{V_{ef}^2 \cos^2(\phi)}$.
- ▶ Por este motivo, la distribución de energía eléctrica se optimiza
 - ▶ haciendo el factor de potencia tan cercano a 1 como sea posible.
 - ▶ aumentando la diferencia de potencial tanto como sea posible.

Impedancia compleja

- ▶ Igual que cuando tratamos el caso de las ondas, conviene introducir la *impedancia compleja*

$$\mathcal{Z} = Ze^{i\phi}$$

Luego $V(t) = \Re \mathcal{V}(t)$ y $I(t) = \Re \mathcal{I}(t)$ con

$$\mathcal{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad \mathcal{I}(t) = \frac{\mathcal{V}(t)}{\mathcal{Z}}$$

- ▶ \mathcal{Z} juega un papel equivalente al de la resistencia en circuitos de C.C.
- ▶ La potencia media disipada se expresa como $\langle P \rangle = \Re \mathcal{V}(t) \mathcal{I}(t) = I_{ef}^2 \Re \mathcal{Z}$
- ▶ Para una frecuencia dada, podemos resolver cualquier circuito RLC en el régimen de C.A. de manera algebraica tratando a cada componente como si fuese una *resistencia compleja*.

Impedancia en un circuito RLC serie

- ▶ La impedancia de una rama se expresa como la suma de las impedancias de cada elemento $\mathcal{Z} = \sum_i \mathcal{Z}_i$
- ▶ Para un circuito RLC, $\mathcal{Z}_R = R$, $\mathcal{Z}_L = \mathbf{i}X_L = \mathbf{i}\omega L$, $\mathcal{Z}_C = -\mathbf{i}X_C = \frac{1}{\mathbf{i}\omega C}$, luego,

$$Z = \mathcal{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- ▶ Para una amplitud de potencia fija V_0 , la potencia absorbida es máxima si Z lo es, lo que ocurre si

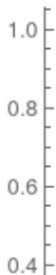
$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

- ▶ Bajo esa condición, $\mathcal{Z} = Z$ es *real*, y tensión y corriente *están en fase*: *el circuito está en resonancia*.

Resonancia

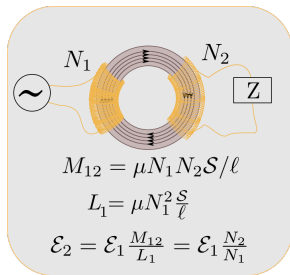
- ▶ Para ciertas **frecuencias**, las **componentes reactivas** de la impedancia **pueden anularse**. Decimos entonces que la rama se encuentra en **resonancia**.
- ▶ En particular, en una rama RLC , esto ocurre si la fuente tiene una frecuencia angular $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- ▶ Cuando esto ocurre, el **factor de potencia** es máximo, y la potencia consumida tendrá un **máximo**, para un valor fijo del valor eficaz de la FEM.

$P[\omega]/P[\omega_0]$



Transformadores

- ▶ Una ventaja de la corriente alterna es que es fácil aumentar y disminuir la tensión eficaz mediante el uso de transformadores.
- ▶ En el primer bobinado, o **primario** se conecta una fem alterna de valor eficaz V_1 .
- ▶ En el segundo bobinado o **secundario**, se conecta un circuito de **impedancia** $Z \gg M\omega$.
- ▶ En estas condiciones, la tensión eficaz inducida en el secundario será $\mathcal{E}_2 = \frac{M}{L_1} \mathcal{E}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1$.



- ▶ De esta manera, es posible aumentar la tensión durante el transporte de energía, y reducirla para alimentar la red domiciliaria.

Problema de integración

Un motor eléctrico puede representarse en un circuito como una combinación en serie de una *fuerza contra-electromotriz*

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \propto \omega$, una resistencia R y una inductancia L .

- ▶ ¿Podemos representar a un motor como una impedancia?
- ▶ Encuentre una relación entre la velocidad angular del motor y la corriente, suponiendo que el torque mecánico que realiza el motor es proporcional a la velocidad angular. ¿Por qué valdría esta hipótesis? (Tip: imagine el motor de una batidora eléctrica).
- ▶ ¿Bajo esta hipótesis, podemos ahora representar al motor como una impedancia?
- ▶ ¿Cómo conectaría un capacitor al motor, de manera de llevar el factor de potencia a un valor cercano a la unidad?