Clase 11 - Polarizabilidad. Capacidad.

Prof. Juan Mauricio Matera

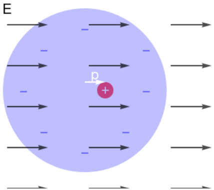
08 de octubre de 2025

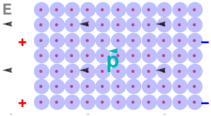
Dieléctricos

- Decimos que un material es un **dieléctrico** o **aislante** si las cargas eléctricas no pueden desplazarse libremente en su interior.
- Cuando un **dieléctrico** es sometido a un campo eléctrico externo, los átomos que lo componen sufren una redistribución de carga.
- Como resultado, estos resultan **polarizados**.
- El **momento dipolar inducido** por el campo sobre un **diferencial de volumen** viene dado por

$$d\vec{p} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E} d\mathcal{V}$$

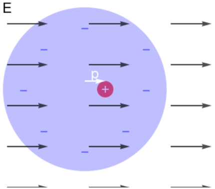
donde χ_E es la **polarizabilidad** del medio y $\vec{E}$ es el campo eléctrico *total*. $\nabla \cdot \vec{p} = -\rho_{pol}$, la contribución a la **densidad de carga** del material.

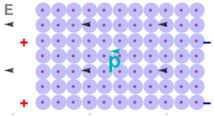




De la **ley de Gauss**,

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{p} = -\varepsilon_0 \chi_E \nabla \cdot \vec{E} = -\chi_E \rho_{total}$$





- La densidad de carga libre viene dada por $\rho_{libre} = (1 + \chi_E)\rho_{total}$. Luego, la densidad de carga *libre* se relaciona con $\vec{E}$ según

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon}$$

  con $\varepsilon = (1 + \chi_E)\varepsilon_0$ la **Constante Dieléctrica** del material.
- La constante $\varepsilon > \varepsilon_0$ depende de (la polarizabilidad de) el material.

Desplazamiento Eléctrico

- El efecto del dieléctrico se reduce a modificar **localmente** la ley de Gauss para las cargas libres.
- En la literatura, se suele introducir el vector $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ al que se lo llama **vector de desplazamiento eléctrico**, que satisface

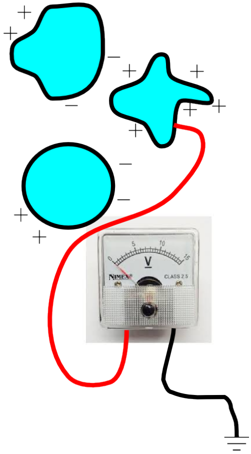
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Valores típicos de la constante dieléctrica

Material	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
Aire	$1,0005$ (CNPT)
Agua	80 ($20^o\mathrm{C}$)
Aceite	$2,8$
Parafina	$2,1$
Polietileno	$2,4$
Vidrio	$5,6-10$
Diamante	$5,5-10$
PVC	$30-40$

Capacidad de un sistema de conductores

Dado un sistema de conductores aislados entre sí, y en **ausencia de cargas libres** fuera de ellos, la **carga neta** en la superficie de cada conductor resulta ser una **función lineal** de los correspondientes **potenciales electrostáticos** referidos a infinito.



$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$$

donde las constantes C_{ij} dependen únicamente de la geometría.
Esto permite dar una **descripción concisa** del sistema de conductores en términos de *magnitudes escalares discretas*.
Como los conductores son equipotenciales, la energía electrostática asociada se reduce a

$$U_e = \frac{1}{2} Q_i V_i$$

Para un único conductor esférico de radio a. El potencial **referido a infinito** sobre la superficie del conductor viene dado por

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow Q = C$$

con $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ la **Capacidad** del conductor (relativa a infinito). Esta cantidad será mayor cuando mayor sea el radio del conductor.

A la vez que almacena carga, el conductor almacena **Energía Potencial Electrostática**. Recordando que el campo dentro del conductor es nulo, y que fuera

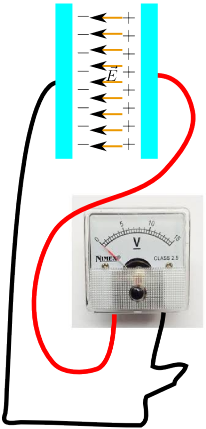
$$|\vec{E}| = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

podemos integral la **densidad de energía electrostática** en todo el espacio:

$$U_{pe} = \int |\mathcal{E}|^2 d\mathrm{Vol} = \int_a^{\infty} \frac{4\pi\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} (r)^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q^2}{2C}$$

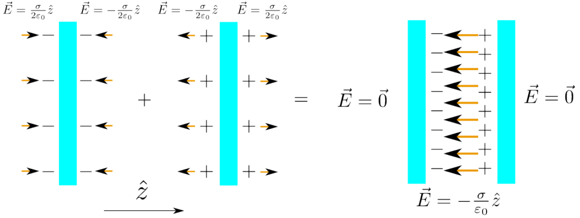
Veremos que esta relación es general: La energía electrostática almacenada en un conductor satisface la relación
$U_{pe} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Consideremos ahora un sistema formado por **dos** conductores, aislados entre sí, **inicialmente descargados**. Se transfiere una carga ΔQ del primero al segundo. El primero queda con carga $-\Delta Q$ y el segundo con carga ΔQ.



$$V_{i,\infty} \propto \Delta Q \quad \Delta Q = C\Delta V$$

con C la **capacidad** del sistema de conductores. En general, C dependerá del tamaño de los conductores, y de la separación entre ellos.

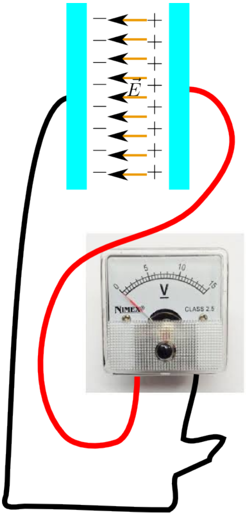


En un sistema constituído por dos placas conductoras paralelas de cargas Q y $-Q$, el campo eléctrico entre las placas es (según la ley de Gauss) $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\hat{n}$ donde S es la superficie de las placas $\hat{n}$ es la normal a la placa de carga positiva.

La diferencia de potencial entre la placa positiva y la negativa será entonces $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$ con d la separación entre las placas. Obtenemos entonces

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Ejercicio: verificar que $U_{pe} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$.



Capacidad en presencia de Dieléctricos

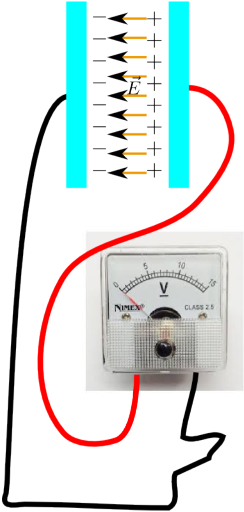
- Si el espacio entre las armaduras de un capacitor se rellena con un dieléctrico, la relación entre la carga de las armaduras (carga libre) y el campo eléctrico se ve modificada.
- Si todo el campo está confinado al volumen ocupado por el dieléctrico, bastaráremplazar en las expresiones ε_0 por la constante dieléctrica del material.
- Para un capacitor de placas paralelas,

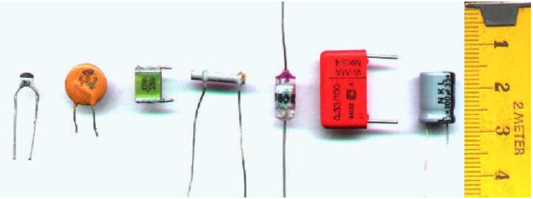
$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Condensadores

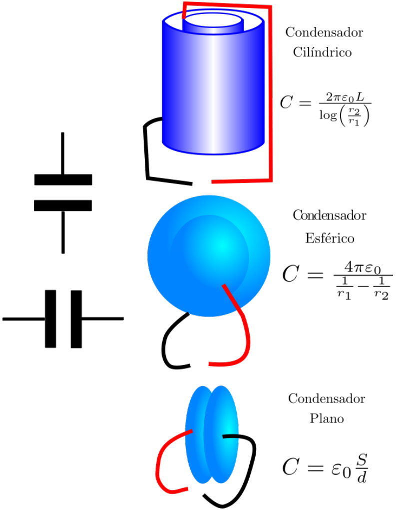
Observamos que en este sistema, el campo electrostático queda confinado completamente en la región que separa ambos conductores. Un sistema como este se suele denominar **Condensador** o **Capacitor**, y a los conductores que lo forman, **armaduras**.

Los **condensadores** son dispositivos que permiten acumular **energía electrostática** de forma **localizada**, y son uno de los componentes básicos de la mayoría de los dispositivos electrónicos.





Los condensadores pueden construirse con diferentes geometrías y tamaños. Sin embargo, en los diagramas, suelen representarse con un símbolo que recuerda al capacitor de placas paralelas. En los condensadores comerciales, suele además rellenarse el espacio entre las armaduras con un material aislante o **dieléctrico**. Este material tiene dos funciones: evitar que las **armaduras** entren en contacto y **aumentar** la capacidad efectiva del sistema.

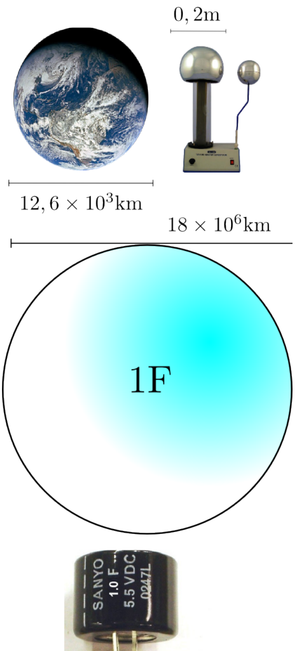


Unidades y valores típicos de capacidades

La unidad de **Capacidad** en el sistema MKSA es **Faradio** (F), que corresponde a una capacidad de $1\mathrm{Coulomb}$ por Volt. Debido al pequeño valor de ε_0, un conductor de esa capacidad debe ser ridículamente grande: por ejemplo, para una esfera conductora,

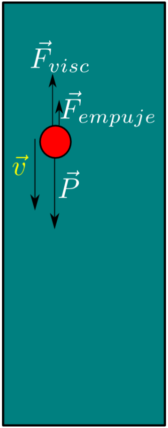
$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= 4\pi\varepsilon_0 r \rightarrow r = \frac{\mathrm{F}}{4\pi\varepsilon_0} \\
&= \frac{1\mathrm{F}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{F/m}} \\
&= 9 \times 10^{9}\mathrm{m} = 9 \times 10^{6}\mathrm{km}
\end{aligned}$$

Sin embargo, en los últimos años ha sido posible construir capacitores de esta capacidad del tamaño de unos pocos milímetros cúbicos. . .

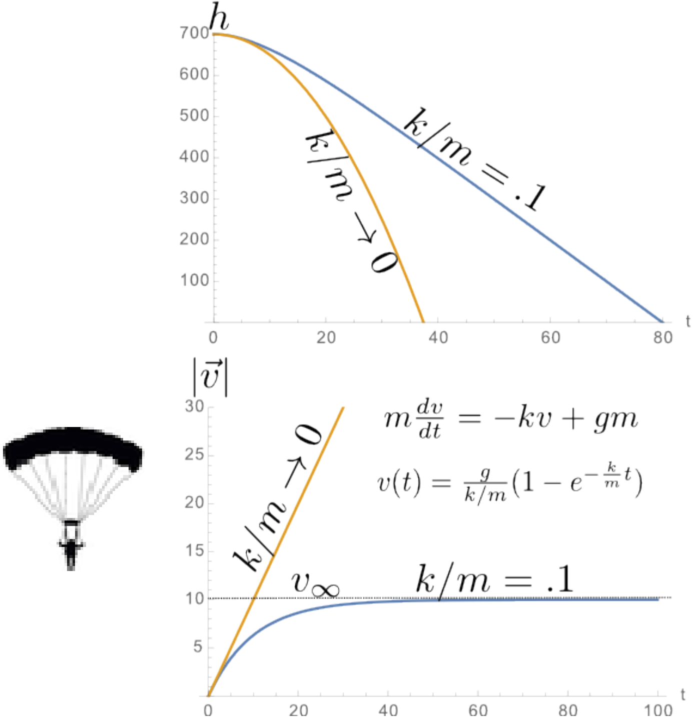


Movimiento de Partículas cargadas

Partícula cargada en un medio viscoso : El Experimento de Millikan



- Consideremos una partícula de masa m, liberada en el seno de un fluído viscoso. Por acción de la gravedad, la partícula inicialmente en reposo comenzará a caer. Sin embargo, al empezar a moverse, la interacción con las moléculas del fluído da origen a una **fuerza viscosa** $\vec{F}_{visc} = -k\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad instantanea.
- Como resultado, la velocidad de la partícula alcanzara rápidamente una **velocidad límite**, proporcional al peso, e inversamente proporcional a la viscosidad del medio.
- Alcanzada la velocidad límite, la energía potencial gravitatoria que pierde la partícula es disipada, por acción de la fuerza $\vec{F}_{vis}$ en **calor**, que es transferido a la partícula y al fluído.



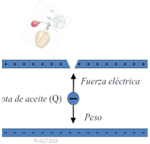
h
700
600
500
400
300
200
100
0
20
40
60
80
t
$k/m = .1$
$k/m \to 0$
$|\vec{v}|$
30
25
20
15
10
5
0
20
40
60
80
100
t
$m\frac{dv}{dt} = -kv + gm$
$v(t) = \frac{g}{k/m}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$
$k/m \to 0$
v_∞
$k/m = .1$

Origen Microscópico de la Fuerza Viscosa (Física General II)

- El **origen microscópico** de la **fuerza viscosa** proviene de las **colisiones al azar** que sufre la gota con las **partículas del fluído**.
- Las **colisiones individuales** pueden considerarse **elásticas**, y su número será proporcional a la densidad de partículas que forma el fluído.
- Si la gota está **en reposo** respecto al fluído, estas colisiones se producen uniformemente en todas la direcciones, resultando en una **fuerza nula en promedio**.
- Cuando la gota se mueve, las colisiones con las partículas con velocidades **opuestas** a la de la gota serán más intensas que con aquellas con velocidad paralela. Como resultado, la **fuerza promedio** será proporcional a la velocidad de la gota, y con sentido opuesto.
- Si bien las condiciones individuales son **elásticas**, el efecto neto de todas las colisiones es **disipar** la energía de la gota en forma de calor en el fluído.
- Si es el fluído el que se mueve y la gota está en reposo, la

- Para una gota **esférica** la ley de Stokes predice $k = 6\pi\eta r$, con η el **coeficiente de viscosidad** del aire y r el radio de la gota. La resultante de fuerzas será

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_{empuje} + \vec{F}_{visc} = \left(-mg - q\frac{\Delta V}{d} + m_{aire}g - 6\pi r\eta v\right)\hat{z}$$



$r \approx 0.3\mu\mathrm{m}$: radio de la gota.
$m = \rho_{aceite} \times \frac{4}{3}\pi r^3$: masa de la gota
$m_{aire} = \rho_{aire} \times \frac{4}{3}\pi r^3$: masa de la gota
q: carga de la gota
$\eta \approx 1.9 \times 10^{-4}$: viscocidad del aire.
g: aceleración de la gravedad.
v velocidad de la gota de aceite

- En ausencia de campo, la gota **cae** con velocidad límite $v_0 = \frac{2g(\rho_{aceite} - \rho_{aire})r^2}{9\eta}$, de donde $r^2 = \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_{aceite} - \rho_{aire})}$
- En presencia del potencial, la velocidad límite se anula si $\frac{4}{3}\pi(\rho_{aceite} - \rho_{aire})r^3 g = q\Delta V_0/d$
- Conocido el radio de la gota, su carga puede determinarse a partir del valor de la diferencia de potencial ΔV_0 que anula su velocidad límite.
- En su experimento, Millikan encontró que la carga de las gotas observadas eran siempre mútiplos enteros de una cierta cantidad: la carga del electrón.

Ejercicios

1. Mostrar que en un capacitor de placas paralelas $U_{pe} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$.
2. Calcular la capacidad por unidad de longitud de un cable coaxil de radio interior $R_{int} = 1\mathrm{mm}$, recubierto por una capa dieléctrica de polietileno de $d = 2,9\mathrm{mm}$ de espesor, recubierta a su vez por una capa de papel de aluminio de espesor despreciable.
3. Desde un punto de vista eléctrico, una célula animal puede pensarse como un capacitor, en la que el citoplasma y el medio intercelular se comportan como conductores, y la membrana plasmática como un aislante. Si el espesor de la membrana plasmática es de $10\mathrm{nm}$, y tiene una constante dieléctrica de $50\mathrm{pF/m}$, estime la capacidad eléctrica de una célula *esférica* de $50\mathrm{nm}$ de diámetro. Si la diferencia de potencial entre el medio exterior y el citoplasma es de $80\mathrm{mV}$, estime la energía electrostática almacenada.