Clase 09 - Potencial Electrostático. Energía Potencial Electrostática.

Prof. Juan Mauricio Matera

1 de octubre de 2025

El potencial electrostático

El campo electrostático es **Conservativo**

- Una forma conveniente de expresar el campo de una carga puntual es en términos del **gradiente** de una función escalar:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -\nabla\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

(recordemos que $\nabla\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$ y que $\nabla\phi(|\vec{r}|) = \phi^{'}(r)\hat{r}$)

- Que un campo vectorial $\vec{W}$ pueda expresarse como el gradiente de una función escalar ϕ tiene como consecuencia que, para cualquier curva $\mathcal{C}$ que inicia en el punto $\vec{r}_i$ y termina en el punto $\vec{r}_f$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} -\nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(\vec{r}_i) - \phi(\vec{r}_f)$$

- Además, si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = 0$
- Decimos por lo tanto que tal campo es **Conservativo**
  - $\int_a^b \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \phi(a) - \phi(b)$ *independiente del camino*.
  - $\nabla \times \vec{W} = 0$ (campo longitudinal).

Potencial electrostático

- Partiendo de que el **campo electrostático** de una carga puntual es **conservativo**, vemos que (por el **principio de superposición lineal**) el **campo electrostático** debido a **cualquier** distribución de cargas también lo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

  con $V(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')d^3r'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$.
- Llamamos a $V(\vec{r})$ el potencial electrostático asociado a $\vec{E}$ *referido a* ∞.
- En términos del campo eléctrico, podemos expresar esta función como la integral de línea

$$V(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

  para una curva que conecta un punto *infinitamente lejano* con $\vec{r}$.

Referenciales

- La función

$$V_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$$

  también satisface

$$\vec{E} = -\nabla V_{\vec{r}_0}$$

- Llamamos a $V_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = V_(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$ el *potencial de $\vec{E}$ referido a $\vec{r}_0$* y a $\vec{r}_0$ el *referencial*.

Interpretación física

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_{\mathcal{C}} -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) \\ \Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) &= V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

*La **diferencia de potencial** entre dos puntos es el **trabajo cuasi-estático por unidad de carga**, requerido para arrastrar **en contra del campo eléctrico** una carga de prueba δq a lo largo de una curva que una esos puntos.*

- Identificamos entonces a $-q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$ con el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga que se desplaza entre esos puntos.
- En ausencia de otras fuerzas, $W_E = q\Delta V(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$ es igual al cambio en la energía cinética de una partícula al moverse del punto $\vec{r}_i$ al punto $\vec{r}_f$.

Unidades y medida de diferencias de potencial

- La unidad de diferencia de potencial en el sistema internacional es el **Volt** $\mathrm{V} = \mathrm{Joule}\ \mathrm{Coulomb}^{-1}$.
- Las diferencias de potencial se miden con instrumentos llamados **Voltímetros**

- Observese que un **voltímetro** necesita **dos** terminales: una a ubicar en $\vec{r}_i$ (el cable negro) y otra en $\vec{r}_f$ (cable rojo).

La ecuación de Poisson

- Debido a la **Ley de Gauss**, el potencial electrostático satisface la **Ecuación de Poisson**:

  $$-\nabla^2 V = \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

  donde ∇^2 es el **Operador Laplaciano** $\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$ Ver clase 4

- Las soluciones de la ecuación de Poisson en una región son únicas dadas ρ y el valor de V sobre *su borde*.

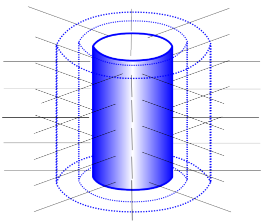
Superficies Equipotenciales

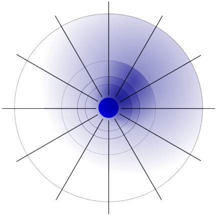
Definición

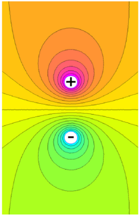
Una superficie equipotencial es el **lugar geométrico** formado por los puntos del espacio donde el **potencial electrostático** toma un valor constante.

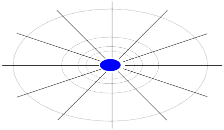
- Propiedades
  - Son ortogonales al campo electrostático $\Rightarrow$ son cruzadas ortogonalmente por las líneas de campo electrostático.
  - Toda superficie equipotencial cerrada, encierra una cierta cantidad de carga neta.
  - Se hacen más próximas donde el campo es más intenso.
  - Alrededor de una carga puntual, tienden a la forma esférica concéntrica a la carga.
  - Para una distribución localizada con carga neta no nula, tienden a una forma esférica para distancias grandes a la distribución.
  - Los conductores definen **volumenes equipotenciales**: cualquier superficie interior a un conductor es una equipotencial.

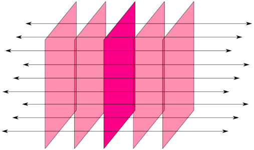
Ejemplos

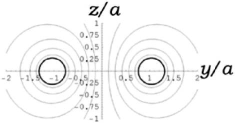






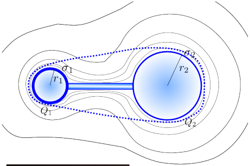


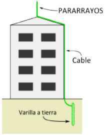




Efecto punta

- Sobre la superficie de un conductor, la densidad de carga superficial es **inversamente proporcional** al radio de curvatura.
- Como consecuencia de esto, los campos sobre la superficie de un conductor son más intensos cerca de las **puntas** de un conductor.



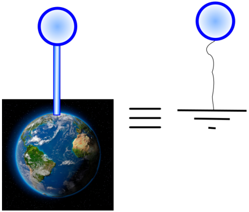


Consideremos dos esferas conductoras de radios r_1 y r_2, alajeadas entre sí, y unidas por un hilo delgado.

- Ambas esferas están al mismo potencial $V_1 = V_2$
- La distribución de cargas sobre cada una de ellas no es influenciada por la otra (simetría esférica). Luego, $V_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$ (referido a infinito)
- $\Rightarrow \frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}$. La carga neta es

Conexión a tierra

- La **conexión a tierra** puede considerarse un caso extremo del **efecto punta**: al conectar un conductor a otro enormemente más grande (la tierra) todas las cargas se escapan a este último, dando como resultado un potencial nulo.
- La carga total se conserva: $Q_T = Q_1 + Q_2 = \mathrm{cte.}$
- $\Rightarrow Q_i = Q_T \frac{r_i}{r_1 + r_2}$.
- Si $r_2 \to \infty$, $Q_1 \to 0 \Rightarrow V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \to 0$ (referido a infinito).



Energía Electrostática

Energía Electrostática de un sistema de cargas puntuales

Dada una cierta distribución de **cargas puntuales** $\{q_i\}$ ubicadas en los puntos $\vec{r}_i$ podemos calcular el trabajo mínimo necesario para producirla, suponiendo que traemos las cargas que la forman **una a una** desde el infinito. Este trabajo será la suma de los trabajos W_i requeridos para traer la partícula i-esima desde infinito hasta su posición. De esta manera la **energía potencial electrostática** U_{pe} de un sistema de cargas puntuales viene dada por

$$U_{\mathrm{pe}} = \sum_i W_i$$

$$W_i = q_i V_i(\vec{r}_i) \qquad V_i(\vec{r}_i) = \sum_{j<i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Luego,

$$U_{\mathrm{pe}} = \frac{1}{2} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Densidad de Energía Electrostática

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')d^3r d^3r'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= \frac{1}{2}\int V(r)\rho(\vec{r})d^3r \qquad \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \\
&= \frac{1}{2}\int -\varepsilon_0 V(\vec{r})\nabla^2 V(\vec{r})d^3r \qquad \boxed{-V\nabla^2 V = \nabla\cdot(-V\nabla V) + |\nabla V|^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \varepsilon_0|\nabla V|^2\, d^3r + \cancel{\frac{1}{2}\int \varepsilon_0\nabla\cdot(-V(\vec{r})\nabla V(\vec{r}))d^3r} \\
&= \int \frac{\varepsilon_0|\vec{E}|^2}{2}d^3r \qquad \boxed{\nabla V = -\vec{E}}
\end{aligned}
$$

"Término de borde"

Por este motivo, se suele denominar a $\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0|\vec{E}(\vec{r})|^2}{2}$ la **densidad de energía electrostática**.

Energía de interacción

- Para un sistema formado por varias distribuciones de carga localizadas,

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \to \mathcal{U} = \sum_i \mathcal{U}_i + \sum_{i\neq j} \mathcal{U}_{ij}$$

- $\mathcal{U}_i = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_i \cdot \vec{E}_i$ es la *autoenergía*
- $\mathcal{U}_{i\neq j} = \varepsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$ es la *energía de interacción*.
- En la práctica, si la distribución dentro de una carga localizada no cambia, sólo importa la *energía de interacción*:
- La energía asociada a una carga puntual es *infinita*, pero no *cambia* en el tiempo.
- Podemos asumir que en lugar de una carga puntual, la carga se distribuye uniformemente en una esfera de radio pequeño. Llamamos *radio clásico* de una partícula de masa m al radio a tal que $\int \mathcal{U}(r_c) d^3r = mc^2$

Para un electrón $r_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15}\mathrm{m}$
¿Cuánto vale para un protón?
¿Y para un neutrón?

Potencial y campo de un dipolo

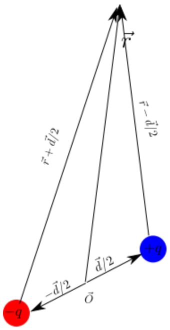
El concepto de potencial eléctrostático nos dá una herramienta muy útil a la hora de calcular campos eléctricos, ya que nos evita trabajar con **magnitudes vectoriales** en los pasos intermedios del cálculo. La estrategia consiste en:

- Construir los potenciales de las cargas individuales que forman la distribución de carga.
- Sumarlos (integrarlos) todos.
- Calcular el campo como $-\nabla V$.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Potencial de un dipolo eléctrico

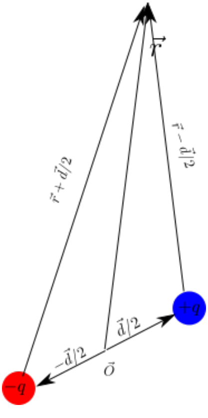
$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{d}/2|} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}+\vec{d}/2|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(|\vec{r}-\vec{d}/2|^{-1} - |\vec{r}+\vec{d}/2|^{-1}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\left(1+\frac{|\vec{d}|^2}{4r^2}-\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)^{-1/2} - \right. \\
&\qquad \left.\left(1+\frac{|\vec{d}|^2}{4r^2}+\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)^{-1/2}\right) \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\left(1+\frac{1}{2}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)\right)\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}
$$



con $r = |\vec{r}|$, donde usamos que
$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \ldots$.

Campo Eléctrico del dipolo

Calculando (menos) el gradiente del potencial, recuperamos la expresión para el campo eléctrico del dipolo:



$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= 3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{r} - \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

donde usamos que $\nabla f(|\vec{r}|) = f'(|\vec{r}|)\hat{r}$ y $\nabla \vec{p}\cdot\vec{r} = \vec{p}$.

- Notamos que es la expresión que adelantamos en clases anteriores.
- La misma se podría haber construído directamente sumando los campos y desarrollando (pero al ser vectores era más laborioso).

Ejercicios

1. Dada una carga Q, determine el potencial y el campo en todo el espacio asumiendo que la carga se distribuye a) uniformemente sobre una superficie esférica de radio a. b) uniformemente en la superficie de esa esfera c) con una densidad volumétrica $\rho(r) \propto e^{-r/a}$.
2. Calcule la energía electrostática de las tres distribuciones y determine cuál es la configuración de menor energía.