

# Clase 05 - Ondas y Energía. Interfaces.

Prof. Juan Mauricio Matera

10 de septiembre de 2025

Energía, potencia e intensidad

## Energía y corriente conservada

- ▶ En el curso de Física General II, aprendimos que al propagarse, una onda mecánica transporta energía y cantidad de movimiento.
- ▶ Estas son *cantidades conservadas*  $\Rightarrow$  satisfacen la *Ecuación de Continuidad*.
- ▶ Cuando la onda es *periódica* se define la *intensidad I* como la *densidad de flujo promedio*.
- ▶ Vamos a ver ahora que podemos *deducir* la forma de la *densidad de energía* a partir de la *ecuación de onda* y la *ecuación de continuidad*.
- ▶ Esto nos va a servir para analizar el flujo de energía en ondas que no son *mecánicas* (p.e. las ondas electromagnéticas).

$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$

$$u = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Densidad de energía

Cinética

Potencial Elástica

$$-\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt} \frac{\partial U}{\partial \ell} \dot{k} \quad -\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$I = \langle |\vec{j}| \rangle_T = c \langle u \rangle_T$$

# Caso general

$$\vec{s}_E = -\underbrace{\frac{c}{Z}}_{\text{Impedancia}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \psi$$

$$\text{Ej: } Z = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} \quad c = \sqrt{\kappa / \rho}$$

$$\nabla \cdot f \vec{A} = \nabla f \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{s}_E = -\frac{c}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \nabla^2 \psi - \frac{c}{Z} \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \cdot \nabla \psi$$

$$= -\frac{c}{Z} \left( \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \cdot \nabla \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)$$

$$= -\frac{c}{2Z} \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \psi \cdot \nabla \psi + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right)$$

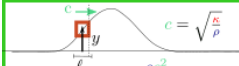
$$= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

$$\mathcal{U} = \frac{c}{Z} \left( \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right)$$

$$\psi(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) \Rightarrow$$

$$\mathcal{U} = \frac{c}{Z} (\psi'(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct))^2$$

$$\vec{s}_E = \mathcal{U} \vec{k}$$



$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$

$$u = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Densidad de energía

Cinética

Potencial Elástica

$$-\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt} \frac{\partial U}{\partial \ell} \vec{k} \quad -\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

$$I = \langle |\vec{j}| \rangle_T = c \langle \mathcal{U} \rangle_T$$

## Término elástico en ondas transversales y longitudinales

La expresión para el término elástico para la energía  $\frac{c}{2Z} |\nabla \vec{A}|^2$  funciona tanto para el caso de ondas transversales como para ondas longitudinales. Para verlo, necesitamos la siguiente identidad vectorial:

$$|\nabla \vec{A}|^2 = |\nabla \times \vec{A}|^2 - \vec{A} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla \cdot (\vec{A} \cdot \nabla \vec{A})$$

- ▶ El último término es la divergencia de una cantidad, y su integral sólo depende del valor de la onda en los bordes.
- ▶ Para ondas transversales  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , el segundo término no contribuye, y la densidad de energía se expresa en términos del rotor de  $\vec{A}$ .
- ▶ Para ondas longitudinales,  $\nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow$

$$0 = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

luego,  $|\nabla \vec{A}|^2 \equiv -\vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}$ , equivalente al caso escalar.

# Impedancia

$$\nabla \cdot \vec{S}_E = -\frac{\partial U}{\partial t} \quad \vec{S}_E = -\frac{c}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \psi$$

$$U = \frac{c}{2Z} \left( |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 \right)$$

- ▶ La impedancia  $Z$  es una propiedad del medio que relaciona la *amplitud* de la onda con la *energía* que transporta.
- ▶ Si  $\vec{A}$  es un *desplazamiento*,  $\vec{F} = -c\vec{A}/Z$  es el *esfuerzo restaurador* que se le opone:  $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{F}$  es el *trabajo* que hace esa fuerza cuando *avanza* la onda.
- ▶ Sus unidades dependen de las unidades de  $\psi$ .

Diagram illustrating the energy density of a wave pulse. A red box highlights a small segment of length  $l$ . The wave speed is  $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ .

$$u = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Densidad de energía

Cinética

Potencial Elástica

$$-\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt} \frac{\partial U}{\partial \ell} \vec{k} \quad -\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$I = \langle |\vec{j}| \rangle_T = c \langle U \rangle_T$$

- ▶ Para una *onda elástica*  $c = \sqrt{Y/\rho}$  y  $Z = \frac{1}{\sqrt{Y\rho}}$  con  $Y$  el *módulo de elasticidad*.

# Ondas armónicas

Para ondas que oscilan rápidamente, lo que interesa es el *valor medio* de la densidad de flujo, cuya magnitud es la **irradiancia**

$$\nabla \cdot \vec{s}_E = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \quad \vec{s}_E = -\frac{c}{Z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \psi \quad \mathcal{U} = \frac{c}{Z} \left( \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right)$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \Re \Psi(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

Onda armónica

$$\nabla^2 \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0$$

$$\langle \mathcal{U} \rangle_T = \frac{c}{2Z} \Re \left( |\nabla \Psi|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\Psi|^2 \right)$$

$$\langle \vec{j} \rangle_T = \frac{c\omega}{2Z} \Re \Psi^* (-i \nabla \Psi)$$

$$\nabla \cdot \langle \vec{s}_E \rangle_T = \langle \nabla \cdot \vec{s}_E \rangle_T = \langle -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \rangle_T = 0$$

Onda plana

$$\Psi(x) = \Psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \check{k}$$

$$\nabla \cdot \Psi = i\vec{k} \cdot \Psi$$

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{|\omega \Psi_0|^2}{2cZ}$$

$$\langle \vec{s}_E \rangle = \frac{|\omega \Psi_0|^2}{2Z} \check{k} = \langle \mathcal{U} \rangle c \check{k}$$

Diagram illustrating a wave pulse on a string. The pulse has length  $l$  and height  $y$ . The wave speed is  $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ .

The energy density  $\mathcal{U}$  is given by:

$$\mathcal{U} = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

The terms are labeled as Kinética (Kinetic) and Potencial Elástica (Elastic Potential).

The energy flux  $\vec{j}$  is given by:

$$-\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \ell} \check{k} \quad -\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

The irradiance  $I$  is given by:

$$I = \langle |\vec{j}| \rangle_T = c \langle \mathcal{U} \rangle_T$$

# Ondas armónicas y principio de Fermat

## Aproximación Eikonal

Forma polar de la amplitud compleja

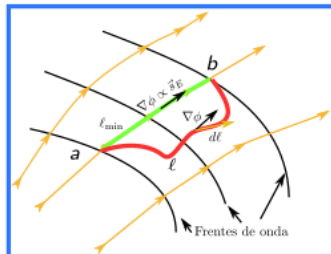
$$\Psi(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\phi(\vec{r})}$$

Para funciones rápidamente oscilantes,

$$|\nabla^2 A| \ll |\nabla\phi|^2 \Rightarrow \nabla^2 \Psi \approx -|\nabla\phi|^2 \Psi$$

ecuación de onda  $\Rightarrow$

$$|\nabla\phi(\vec{r})| \approx |\vec{k}| = \frac{\omega n}{c}$$



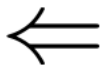
## Densidad de Flujo para ondas

$$\vec{s}_E = \frac{c\omega}{Z} \Re(\Psi^* \nabla \Psi) = \frac{c(\omega A(\vec{r}))^2}{Z} \nabla \phi$$

## El principio de Fermat

$$\vec{s}_E \propto \vec{\ell}'_{\min}$$

$$T_{\ell_{\min}} \leq T_{\ell} = \int_A^B \frac{n}{c} d\ell$$



$$\begin{aligned} T_{\ell} &= \int_a^b \frac{|\nabla\phi|}{\omega} d\ell & \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta) \\ &= \int_a^b \frac{\nabla\phi \cdot d\vec{\ell}}{\omega \cos(\theta)} d\ell \geq T_{\ell_{\min}} \end{aligned}$$

$$\vec{\ell}'_{\min} \propto \nabla\phi \rightarrow \cos(\theta) = 1$$

$\Rightarrow$  Las líneas de flujo de  $\vec{s}_E$  son trayectorias de tiempo mínimo

# Solución general. Espectro de potencia

## Solución general

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{A}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\lambda} t} d\lambda$$

$$\vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) = \int \vec{A}_{\frac{2\pi}{\lambda}\check{k}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\check{k}\cdot\vec{r}} d\Omega$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Relación de dispersión

$\vec{A}_{\vec{k}}$   
Amplitudes complejas

$\vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$   
(onda transversal).

Cambio de variables

$$\frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{k^2 dk d^2 \check{k}}{2\pi^3} \equiv d\lambda d\Omega$$

## Solución armónica

## Densidad de corriente conservada

$$\vec{s}_E(\vec{r}) = \Re \left[ \frac{c\omega}{2Z} \vec{A}^* (-i\nabla) \vec{A} \right]$$

$$\vec{s}_E(\vec{r}) = \int \vec{s}_{E,\lambda} d\lambda$$

$$\vec{s}_{E,\lambda}(\vec{r}) = \Re \left[ \frac{c\omega}{2Z} \vec{A}_{\lambda}^* (-i\nabla) \vec{A}_{\lambda} \right]$$

Las componentes se conservan por separado

$$\nabla \cdot \vec{s}_{E,\lambda} = 0$$

$$\mathcal{P}(\lambda) \propto |\vec{s}_{E,\lambda}|$$

## Espectro de potencia

## Ejercicios

- ▶ Dar una expresión para la relación entre la amplitud y la densidad de energía que transporta una onda esférica.
- ▶ Construir una solución aproximada cuya densidad de flujo represente un haz cilíndrico polarizado linealmente con longitud de onda de  $500\text{nm}$ .

## Medios dispersivos y absorptivos

# La ecuación de onda con términos dispersivos y de absorción

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{A} \underbrace{\left( -\omega_0^2 \vec{A} \right)}_{\text{término elástico local}} \underbrace{- \eta \frac{d\vec{A}}{dt}}_{\text{término viscoso}}$$

Remplazando  $\vec{A}$  por una onda plana

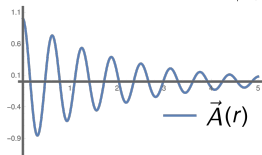
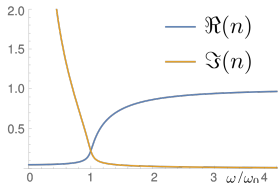
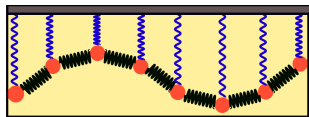
$$\vec{A} = \Re \vec{A}_0 e^{i(k\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)},$$

$$-\omega^2 \vec{A} = \left( -c^2 k^2 - \omega_0^2 + i\omega\eta \right) \vec{A}$$

$$\text{Luego, } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + i\frac{\eta}{\omega}}$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + i\frac{\eta}{\omega}}$$

- ▶ Veremos más adelante una descripción más realista de estos términos.

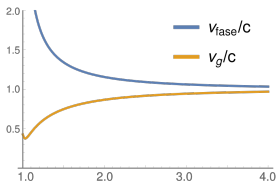


# Velocidad de Fase y velocidad de grupo

## Velocidad de fase

- ▶ índice de refracción
- ▶ velocidad de las ondas monocromáticas (deslocalizadas)

$$\frac{\omega}{k} = v_{fase} = \frac{c}{n}$$



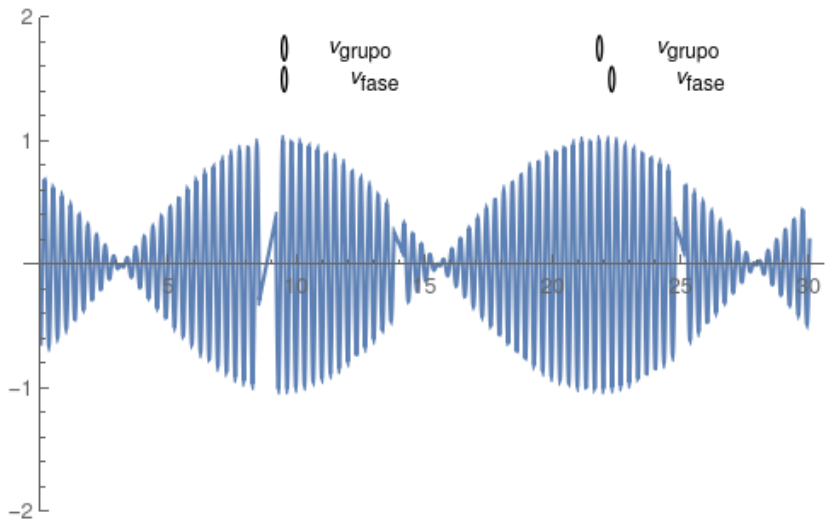
coinciden

- ▶ en medios no dispersivos.
- ▶ en el límite de altas frecuencias.

## Velocidad de grupo

- ▶ velocidad del *paquete de ondas*.
- ▶ velocidad con la que *fluye la información* (pulsos).

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} \\ = \frac{1}{\frac{dn}{d\omega} + v_{fase}}$$



# Densidad de flujo para ondas dispersivas

Fuerza armónica + arrastre

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{A} - \omega_0^2 \vec{A} - \eta \frac{d\vec{A}}{dt}$$

término elástico local      término viscoso

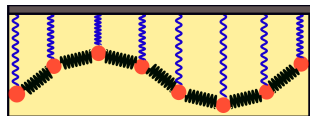
$$\nabla \cdot \vec{s}_E = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{U}_E + \mathcal{U}_{osc}) - \frac{dW_{arrastre}}{dt}$$

$$\mathcal{U}_{osc} = \frac{\omega_0^2}{2Zc} |\vec{A}|^2$$

Energía elástica

$$W_{arrastre} = -\int \frac{\eta}{Zc} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)^2$$

$\propto$  Energía Cinética



$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{A} + \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{s}_E &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_E + \frac{1}{cZ} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{F} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_E + \frac{dW}{dt} \end{aligned}$$

$$W = \int \frac{1}{Zc} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} dt$$

Trabajo de la fuerza  $\vec{F}$

Onda Plana

$$\langle \vec{s}_E \rangle = \frac{\Re n(\omega)}{2Z} |\omega \vec{A}|^2 = \Re \frac{|\omega \vec{A}|^2}{2Z(\omega)} \quad Z(\omega) = \frac{Z}{n(\omega)}$$

# Anisotropías y polarización

- ▶ En medios anisótipos, la absorción y la dispersión pueden depender de la polarización.
- ▶ El efecto de la relación de dispersión *anómala* da origen al fenómeno de la *birefringencia*.
- ▶ Los polarizadores funcionan absorbiendo con mayor intensidad una de las componentes de polarización que la otra → Ley de Malus.



Medios inhomogeneos

# Interface entre dos medios homogéneos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{A}_I(\vec{r}, t) + \vec{A}_R(\vec{r}, t) & \vec{n} \cdot \vec{r} > 0 \\ \vec{A}_T(\vec{r}, t) & \vec{n} \cdot \vec{r} < 0 \end{cases}$$

$$\vec{A}_{\alpha=I,R,T}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A}_{\alpha}^{(0)} e^{i(\vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$|\vec{k}_{\alpha}| = \frac{n_{\alpha} \omega}{c}$$

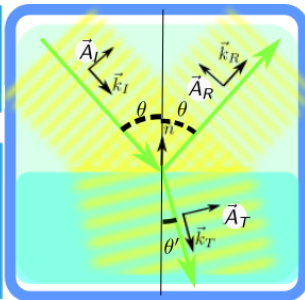
$$\vec{A}_{\alpha} \cdot \vec{k}_{\alpha} = 0$$

Continuidad

$$\vec{A}_I(\vec{r}, t) + \vec{A}_R(\vec{r}, t) - \vec{A}_T(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = 0} = 0$$

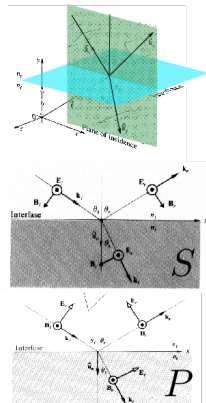
$$\vec{k}_I \times \vec{n} = \vec{k}_{\alpha} \times \vec{n} \Rightarrow n_I \sin(\theta_I) = n_{\alpha} \sin(\theta_{\alpha})$$

Snell



# Coeficientes de Fresnel

- ▶ Una vez conocidas las direcciones de propagación, en medios lineales no absorbidos, la **ecuación de continuidad** permite determinar la irradiancia y polarización de las ondas transmitidas y reflejadas.
- ▶ Dos direcciones de polarización conservadas: En el plano de incidencia (P) y paralela a la interface (S).



# Incidencia normal

Continuidad de la componente tangencial de  $A$

$$A_I + A_R = A_T$$

Conservación de la energía

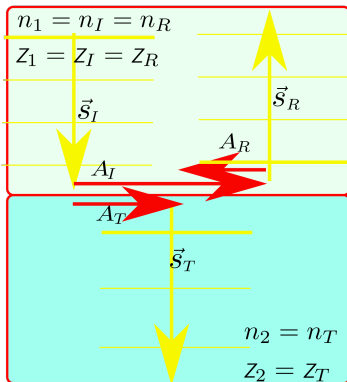
$$\iint \vec{s} dS = |\vec{s}_R| + |\vec{s}_T| - |\vec{s}_I| = 0$$

$$\vec{s}_\alpha = \frac{\omega^2}{2} \frac{|\vec{A}|^2}{Z_\alpha} \check{k}$$

$$\frac{A_I^2}{Z_1} - \frac{A_R^2}{Z_2} = \frac{A_T^2}{Z_2}$$

$$Z_\alpha \propto \frac{1}{n_\alpha}$$

Impedancia



$$A_I + A_R = A_T$$

$$\frac{A_I^2 - A_R^2}{z_1} = \frac{A_T^2}{z_2}$$

$$\frac{(A_I + A_R)(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_T^2}{z_2}$$

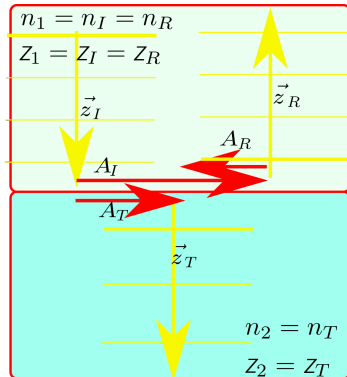
$$\frac{A_T(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_T^2}{z_2}$$

$$\frac{(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_I + A_R}{z_2}$$

Despejando  $A_R$

$$A_R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} A_I \quad \text{o, para un medio no magnético}$$

$$A_R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_I$$

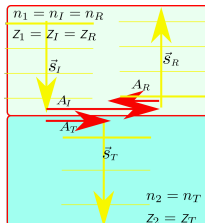


Impedancia  $Z_\alpha \propto \frac{1}{n_\alpha}$

$$A_R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_I$$

$$A_T = A_I + A_R = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_I$$

- ▶ Si  $n_1 < n_2$  ( $z_1 > z_2$ ), los signos de  $A_I$  y  $A_R$  son opuestos: *La onda reflejada gana una fase de  $\pi$ .*
- ▶ Si el segundo medio es un **conductor** no hay onda transmitida: luego  $A_R = -A_I$  con lo que es un caso equivalente a  $n_2 \rightarrow \infty$  ( $z_2 \rightarrow 0$ ).
- ▶ Si  $n_1 > n_2$  ( $z_1 < z_2$ ), la amplitud de  $A_T > A_I$ . Sin embargo, la **irradiancia** transmitida es *menor*.
- ▶ Si  $n_1 = n_2$  ( $z_1 = z_2$ ), no hay onda reflejada: desde un punto de vista óptico, es un único medio.



## Caso general

Polarización	$\vec{A}_R^{(0)}$	$\vec{A}_T^{(0)}$
S	$-r_S \vec{A}_I^{(0)}$	$t_S \vec{A}_I^{(0)}$
P	$-r_P \check{k}_R \times (\vec{A}_I \times \check{k}_I)$	$t_P \check{k}_T \times (\vec{A}_I \times \check{k}_I)$

con

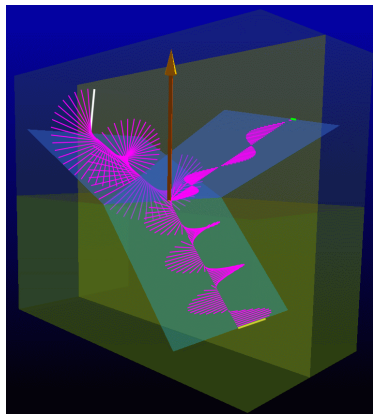
$$t_p = \begin{cases} \frac{2 \cos(\theta_I) z_2}{\cos(\theta_I) z_2 + \cos(\theta_T) z_1} & p = S \\ \frac{2 \cos(\theta_I) z_2}{\cos(\theta_I) z_1 + \cos(\theta_T) z_2} & p = P \end{cases} \quad r_p = \begin{cases} 1 - t_S & p = S \\ 1 - \frac{z_2}{z_1} t_P & p = P \end{cases}$$

los **coeficientes de Fresnel** y  $z_\alpha$  las **impedancias** de los medios.

- ▶ Para ondas electromagnéticas en medios no magnéticos,  
 $z_m \propto 1/n_\alpha$ .
- ▶ En ondas electromagnéticas,  $\mu_m \approx \mu_0 \Rightarrow z_m = z_0/n_m$  con  
 $z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376\Omega$ .



# Ángulo de Brewster



Para una onda con polarización  $P$ , existe un ángulo  $\theta_B$  tal que se anula el coeficiente de reflexión. Esto ocurre si

$$\begin{aligned}\cos(\theta_B) &= z_2/z_1 \cos(\theta_B^T) \\ &= z_2/z_1 \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \sin^2(\theta)}\end{aligned}$$

Asumiendo un medio no magnético,  $z_m = z_0/n_m$ .  
Remplazando y despejando,

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

- ▶ Para este ángulo, la luz reflejada sólo puede tener polarización  $S$ .

## Ejercicios

- ▶ Determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para la luz que incide en forma normal sobre la cornea del ojo humano.
- ▶ Calcular el ángulo de Brewster para la luz que incide desde el aire a la superficie de un cuerpo de agua.