Clase 04 -El modelo ondulatorio.

Prof. Juan Mauricio Matera

5 de septiembre de 2025

La ecuación de ondas

Ondas en 3 Dimensiones

- **Ecuación de onda vectorial tridimensional**:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

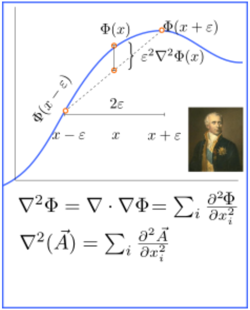
  donde
  - $\vec{A}(t, \vec{x})$ es un **campo vectorial**.
  - $c = 2.99 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ es la **velocidad de propagación** de las ondas.
- Es análoga a la ecuación para las óndas mecánicas en un medio elástico.
- Las ondas electromagnéticas son *transversales*: $\vec{A}$ oscila en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
- Es una *ecuación lineal*
- Las soluciones de esta ecuación pueden escribirse como la **superposición** de **ondas planas**.

El operador Laplaciano

- Es un *operador* **lineal**.

$$\nabla^2(a\Psi + b\Phi) = a\nabla^2\Psi + b\nabla^2\Phi$$

- *Independiente* del sistema de coordenadas *cartesianas*.
- Para una *función escalar* es la *divergencia* del *gradiente*.
- Para una *función vectorial* es el vector que se obtiene al aplicarle ∇^2 a sus *componentes cartesianas*.
- Se anula para funciones lineales.
- Representa cuánto se aparta el valor de la función en un punto del *promedio* (su aproximación lineal):



$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(\vec{x}) \approx \frac{\Phi(\vec{x}+\varepsilon\check{u}_z) + \Phi(\vec{x}-\varepsilon\check{u}_z) - 2\Phi(\vec{x})}{\varepsilon^2}$$

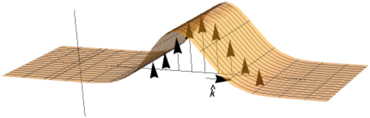
Ondas viajeras

- La familia más simple de soluciones son las llamadas *ondas viajeras*:

  $$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\check{k} \cdot \vec{x} - ct, 0)$$

  Ejercicio: mostrar que es solución. Tip: elegir $\check{k}$ como eje z.
- Estas soluciones se mueven en la dirección de $\check{k}$ con velocidad c.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{x}, t) = \nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t)$$



- En una onda transversal $\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \check{k} = 0$.
- Sus frentes de onda son planos perpendiculares a $\check{k}$.
- no sirven para modelar ondas cerca de una fuente localizada.

Ondas esféricas

- Consideremos soluciones $\vec{A} = \vec{A}_0 \phi(r,t)$ con r la *distancia a una fuente puntual*

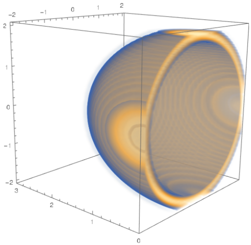
$$f(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r}$$

llamamos a estas soluciones *ondas esféricas*.

- A distancias grandes de la fuente, podemos aproximar estas soluciones por la de una onda viajera.
- $\vec{A}(r,t) = \vec{A}_0 \frac{f(r-ct)}{r}$ *no es una onda transversal* pero comparten con estas mucho de su comportamiento.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \nabla^2 \phi$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\phi(r)$$



Ondas Periódicas y ondas Armónicas

- Una clase de soluciones de la Ec. de ondas son aquellas de la forma $\vec{A}(\vec{x}, t)$ con t una *función periódica* en el tiempo:

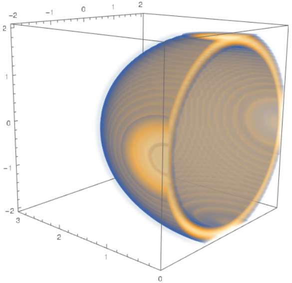
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t + T)$$

con T el *período* de la onda.

- Dentro de las ondas periódicas, una familia muy importante es la de las *funciones armónicas*

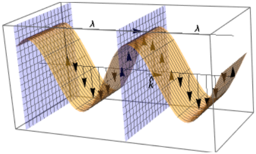
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{x}))$$

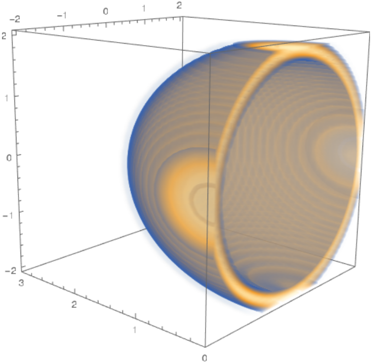
con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la *frecuencia angular*, y $\vec{A}(\vec{x})$ y $\varphi(\vec{x})$ una amplitud y una *fase* que dependen de la posición.



Ejemplos

- Ondas planas viajeras: $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}\right)$
- Ondas esféricas: $\vec{A}(r, t) = \frac{\vec{A}_0}{r} \cos\left(\omega t - kr\right)$ con $k = \omega / c$ el *número de onda* y $\vec{k} = k\check{k}$ el *vector de onda*.
- Notemos que $\vec{A}(\vec{x})$ y $\varphi(\vec{x})$ no son independientes: están vinculadas por la Ecuación de onda.





Ondas planas

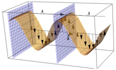
- Se pueden expresar como una combinación lineal de *soluciones separables*

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}_c \cos(\omega t + \phi_0)\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}) + \vec{A}_s \sin(\omega t + \phi_0)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x})$$

- Sus frentes de onda son *planos* transversales a $\vec{k}$.
- Se propagan en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad c.
- Son periódicas en el espacio:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x} + \lambda\check{k}, t)$$

  con $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ la *longitud de onda*.
- *base completa de soluciones*: toda solución es *combinación lineal* de ondas planas.
- Veamos ahora como *simplificar* el tratamiento de estas



Amplitud vectorial: $\vec{A} = A\check{A}$

Amplitud: A Polarización: $\check{A}$

Frecuencia: $f = \frac{1}{T}$ $\boxed{c = \lambda f}$

Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f$

Número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\boxed{\omega = kc}$

Dirección de propagación: $\check{k}$

Vector de Onda: $\vec{k} = k\check{k}$

$\boxed{\text{Transversalidad: } \vec{k}\cdot\vec{A} = 0}$

Números complejos

$\mathbb{C} = \{z = a + \mathbf{i}b | a, b \in \mathbb{R}\}$

$z = a + \mathbf{i}b \qquad w = c + \mathbf{i}d$

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

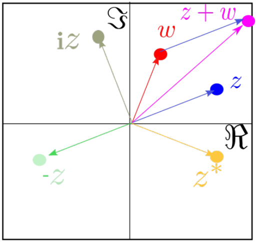
Girolamo Cardano
("Tartaglia")
1501 - 1576

Operaciones elementales

suma $\quad z + w = (a + c) + \mathbf{i}(b + d)$

multiplicación $\quad wz = zw = (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc)$

conjugación $\quad z^* = a - \mathbf{i}b$



$z^* z = a^2 + b^2 = |z|^2 \geq 0 \qquad |z|$ "Módulo de z"

$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{w^* w} = \frac{zw^*}{|w|^2}$ "cociente"

$\Re(z) = a = \frac{z + z^*}{2}$ "Parte *Real*"

$\Im(z) = a = \frac{z - z^*}{2\mathbf{i}}$ "Parte *Imaginaria*"

Fórmula de Euler

$$\exp(z) = \exp(a + \mathbf{i}b) = e^a e^{\mathbf{i}b}$$

"Fase"

$$e^{\mathbf{i}b} = \cos(b) + \mathbf{i}\sin(b)$$

Fórmula de Euler

$$z = |z|e^{\mathbf{i}\varphi}$$

"Forma polar"

$$\ln(z) = \ln(|z|) + \mathbf{i}\varphi$$

"Logaritmo natural"

Leonhard Euler
("Oiler")
1707 - 1783

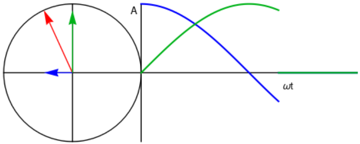
$$e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$$
$$e^{\mathbf{i}\pi} = -1$$
$$e^{-\mathbf{i}\pi/2} = -\mathbf{i}$$
$$e^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

$$\frac{de^{zt}}{dt} = ze^{zt}$$

"Derivada"

Forma compleja de la onda armónica

- Conviene expresar las componentes de la onda armónica en términos de una "onda compleja''



$$\psi(\vec{x}, t) = \Re\left(\Psi(\vec{x})e^{-\mathbf{i}\omega t}\right)$$

- Las derivadas *conmutan* con la parte real, luego
  - $\frac{\partial \psi}{\partial t} \to -\mathbf{i}\omega\Psi(\vec{x})$
  - $\nabla\psi(\vec{x}) \to \nabla\Psi(\vec{x})$
- Remplazando en la Ecuación de onda,

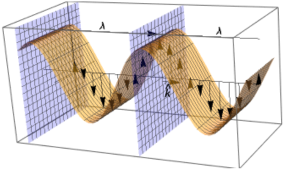
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \nabla^2\psi \to -k^2\Psi(\vec{x}) = \nabla^2\Psi(\vec{x})$$

con $k = \frac{\omega^2}{c^2}$. Esta ecuación se conoce como *Ecuación de Helmholtz*.

Forma compleja de la onda plana

$$\nabla^2\Psi(\vec{x}) + \kappa^2\Psi(\vec{x}) = 0$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c}$$

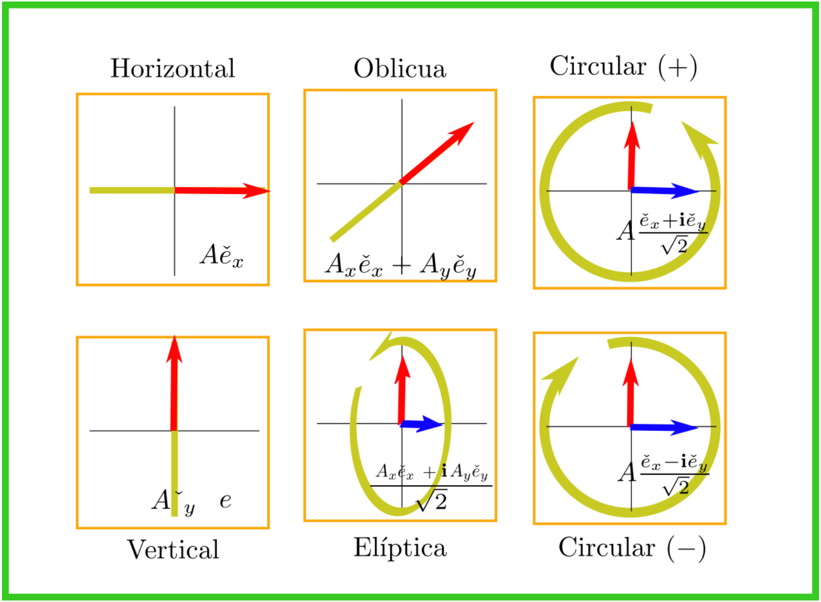


- Eligiendo $\Psi(\vec{x}) = e^{\mathbf{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ recuperamos la *onda plana*

  $$\psi(\vec{x},t) = \Re\vec{\mathcal{A}}_0 e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

  con $|\vec{k}| = k = \omega/c$.
- Si la onda es *transversal*, $\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{A}}_0 = 0$
- Si $\vec{\mathcal{A}}_0 = \vec{A}_0 e^{\mathbf{i}\phi_0}$ obtenemos una *onda polarizada linealmente* en la dirección de $\vec{A}_0$.
- Si las componentes de $\vec{\mathcal{A}}_0$ no están *en fase* obtenemos una onda *circularmente polarizada*.

Polarización de ondas planas transversales



Valores medios

- El valor medio temporal de una cantidad se define por $\langle W \rangle_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} W(t) dt$
- Si la función tiene período T, esto equivale a $\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt$.
- Para (las componentes de) una onda armónica, $\langle \psi(t) \rangle = 0$.
- Por otro lado, si $\psi_{i=1,2}(x,t) = \Re \Psi_i(x,t) e^{\mathbf{i}\omega t}$ son dos (componentes de) *ondas armónicas*,

$$\langle \psi_1(\vec{x},t) \psi_2(\vec{x},t) \rangle_T = \frac{1}{2} \Re(\Psi_1^*(\vec{x}) \Psi_2(\vec{x}))$$

Ejercicios

- Mostrar que

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\check{k}\cdot\vec{x} - ct, 0)$$

y

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\vec{A}(|\vec{r}| - ct, 0)}{r}$$

son soluciones de la ecuación de onda.
- Calcular el gradiente y el laplaciano de la función $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$
- Expresar en la represetación compleja las funciones

$$\vec{F}(t) = \vec{A}\cos(\omega t) + \vec{B}\sin(\omega t) + \vec{C}\cos(2\omega t)$$

y $g(t) = |\vec{F}(t)|^2$, y evaluar sus promedios temporales.