

Clase 18 - Radiación Electromagnética. Electromagnetismo en medios materiales.

Prof. Juan Mauricio Matera

8 de noviembre de 2024

Energía y cantidad de movimiento en OEM

Energía y Cantidad de Movimiento en Ondas Electromagnéticas

- ▶ Como las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento.
- ▶ La Densidad de Energía contenida en los campos puede expresarse como

$$\mathcal{U}_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2$$

ó, en el caso de una onda plana, $|\vec{E}| = |\vec{B}|/c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{B}|$

$$\mathcal{U}_{EM}^{(\text{onda plana})} = \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)^2$$

- ▶ De manera que el **promedio temporal** de la **Densidad de Energía Electromagnética** viene dado por

$$\langle \mathcal{U}_{EM}^{(\text{onda plana})} \rangle_{\text{onda plana}} = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2}{2}$$

- ▶ Por satisfacer la **Ecuación de Ondas 1D**, el **promedio temporal** de la **Densidad de Energía** es igual a su **promedio espacial**.

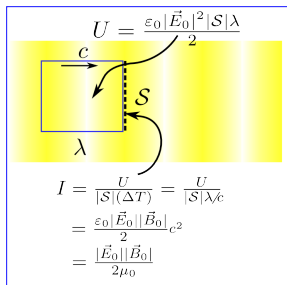
Flujo de energía. El vector de Poynting

- ▶ Al igual que como definimos la **Densidad de Flujo de energía** en ondas mecánicas, definimos el **Vector de Poynting** como el vector Densidad de Flujo

$$\begin{aligned}\vec{S} &= c\hat{k}\mathcal{E} = c\hat{k}\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E} \\ &= c\epsilon_0\vec{E} \times (c\vec{B}) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\end{aligned}$$

- ▶ La intensidad de la **radiación electromagnética** viene dada por el **módulo del valor medio del Vector de Poynting**:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{|\vec{E}_0||\vec{B}_0|}{2\mu_0} = \langle \mathcal{U} \rangle c$$


$$\begin{aligned}U &= \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 |S| \lambda}{2} \\ I &= \frac{U}{|S|(\Delta T)} = \frac{U}{|S|\lambda c} \\ &= \frac{\epsilon_0 |\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2} c^2 \\ &= \frac{|\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2\mu_0}\end{aligned}$$

Teorema de Poynting

$$W_j = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad \text{Trabajo neto de los campos}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

$$= -\nabla \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

$$= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial t}$$

$$\text{Vector de Poynting} \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Densidad de energía

Eléctrica

Magnética

$$\mathcal{U}_E = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

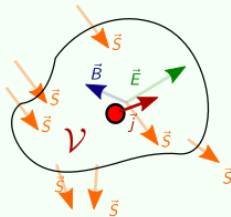
$$\mathcal{U}_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_{\text{ext}} + \vec{S}_j + \frac{\vec{E}_j \times \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ext}} \times \vec{B}_j}{\mu_0}$$

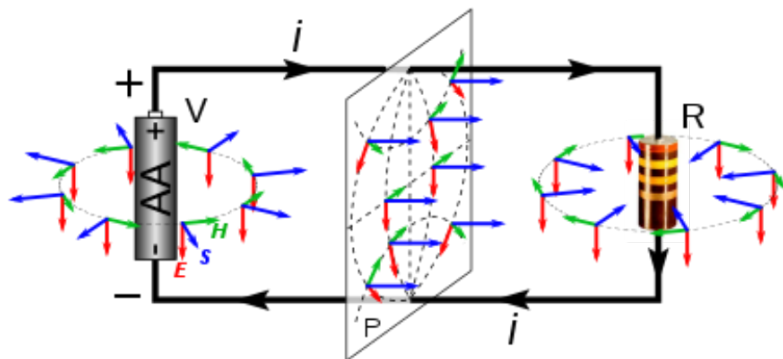


John Poynting

1852 - 1914



Flujo del vector de Poynting en un circuito



- ▶ La **Densidad de Cantidad de Movimiento** del Campo EM viene dada por

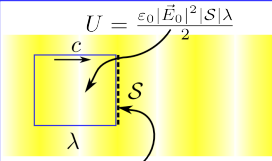
$$\mathcal{P} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

- ▶ Luego, integrando en todo el espacio,

$$\vec{p} = \int \mathcal{P} dV$$

es la cantidad de movimiento asociada al campo electromagnético.

- ▶ Una onda electromagnética transporta energía y cantidad de movimiento al propagarse.



$$U = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 |S| \lambda}{2}$$

$$I = \frac{U}{|S|(\Delta T)} = \frac{U}{|S| \lambda c}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2 c^2}$$

$$= \frac{|\vec{E}_0| |\vec{B}_0|}{2 \mu_0}$$

Presión de Radiación

Cuando una superficie interactúa con radiación electromagnética, esta sufre una **presión de radiación**.

- Si la absorción es completa (absorción completa)

$$\langle \vec{F} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \hat{k} \cdot \vec{S} c \langle \vec{P} \rangle$$

$$-\langle \vec{F} \rangle \cdot \vec{n} = S \cos(\theta) c \frac{|\langle \vec{S} \rangle|}{c^2} = S P_{\text{rad}}$$

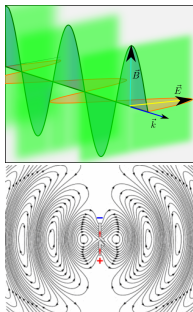
donde $P_{\text{rad}} = \cos(\theta) \frac{I}{c}$
es la **Presión de Radiación**, o sea, la cantidad de movimiento absorbida



- Si la reflexión es completa, la radiación es reemitida en sentido contrario, luego

$$P_{\text{rad}} = 2 \cos(\theta) \frac{I}{c}$$

Intensidad de una onda general

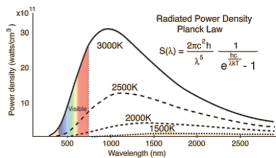


- ▶ Toda onda electromagnética es la superposición de ondas planas monocromáticas polarizadas.
- ▶ Su intensidad (promedio espacial, en un volumen a^3) es entonces

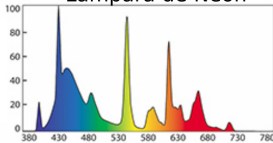
$$I = \sum_p \int I_{p,\lambda}(\vec{r}) d\lambda$$

con

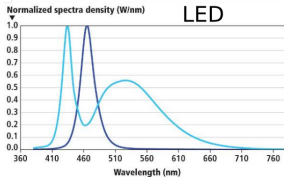
$$I_{p,\lambda} \approx \frac{(2\pi)^3}{a^3 \lambda^3} \int |\vec{E}_p(\frac{2\pi}{\lambda} \check{k})|^2 d\check{k}$$



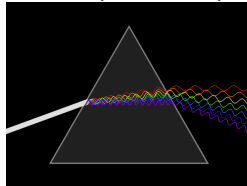
Lámpara de Neón



LED

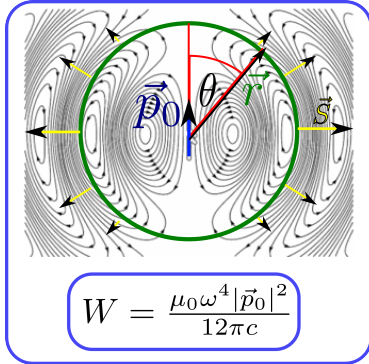


- ▶ La cantidad $S(\lambda) = I_{1,\lambda} + I_{2,\lambda}$ se conoce como *Espectro de potencia* y representa cómo se distribuye la energía electromagnética en las diferentes longitudes de onda.
- ▶ $S(\lambda)$ depende de la fuente.
- ▶ Como las diferentes longitudes de onda se propagan con diferentes velocidades en medios dispersivos, es posible separar sus componentes.



Flujo de energía en la radiación dipolar

Potencia radiada total por un dipolo



► Dipolo oscilante $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$

► Para $r \gg \lambda = 2\pi c/\omega$,

$$\vec{B} \approx \frac{\omega^2 \mu_0 \hat{r} \times \vec{p}_0 \cos(\omega t - \omega r/c)}{4\pi r c} \quad \text{y} \quad \vec{E} \approx c \vec{B} \times \hat{r}$$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\omega(t - r/c))}{16\pi^2 r^2 c} \hat{r}$$

► Promediando en el tiempo,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 r^2 c} \hat{r}$$

- La potencia completa radiada por el dipolo se obtiene integrando $\int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S}$ sobre una superficie esférica de radio grande:

$$\begin{aligned} W &= \int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{r} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= 2\pi \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2}{32\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2}{16\pi c} \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2}{16\pi c} \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2}{16\pi c} \left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}_0|^2}{12\pi c} \end{aligned}$$

Joseph Larmor
1857-1942



Resistencia de Radiación

- ▶ Recordando que $\vec{p} = q(t)\vec{a}$, que $\frac{d\vec{p}}{dt} = I(t)\vec{a}$, y que $I_0 = I_{ef}\sqrt{2}$,
 $|\omega\vec{p}_0| = \sqrt{2}I_{ef}a$.
- ▶ Luego,

$$W = \frac{\mu_0\omega^2 I_{ef}^2}{12\pi c} = \frac{2\pi}{3}Z_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 I_{ef}^2 = R_{\text{rad}}I_{ef}^2$$

donde $Z_0 = \mu_0 c \approx 376\Omega$ es la **Impedancia del vacío**, $\lambda = 2\pi c/\omega$ la **longitud de onda** y

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 Z_0$$

la **resistencia de radiación** de la antena.

- ▶ De esta manera, cuando la **longitud de onda** de la señal es **pequeña** frente al tamaño de la antena (o del circuito), la **potencia radiada** se vuelve mayor a la **potencia disipada** por **Efecto Joule**.

Problema de integración

Considere el *modelo atómico de Rutherford*: de acuerdo a este modelo, un átomo estaría formado por un núcleo puntual, positivo, de carga Ze , en torno al cual se mueven electrones de carga $-e$ en órbitas circulares. Para el caso $Z = 1$ (Hidrógeno)

- ▶ Calcule la energía mecánica del átomo, y la frecuencia angular del electrón en función del radio de la órbita.
- ▶ Determine el momento dipolar eléctrico como función del tiempo. Exprese la potencia irradiada promedio W , como función de r , y la longitud de onda de la radiación.
- ▶ Usando la relación $\frac{dE}{dt} = -W$, y asumiendo que inicialmente $r = a_0 = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$, determine cómo se reduce el radio de la órbita como función del tiempo.

Electromagnetismo en presencia de materia

- ▶ Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con la distribución de cargas y corrientes, cualquiera sea su origen.
- ▶ La materia está formada microscópicamente por cargas en movimiento, pero los campos que producen tienden a cancelarse *en promedio*.
- ▶ En la práctica, conviene distinguir las cargas y corrientes *libres* (que controlamos), de las que están *ligadas* a las propiedades internas de la materia.

Ecuaciones de Maxwell en presencia de materia

Desplazamiento $\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \leftarrow$ Polarización

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \\ \nabla \cdot \vec{P} = -\rho_{pol} \end{array} \right.$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = \rho_{mag} \end{array} \right.$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

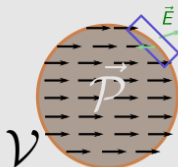
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_{mag} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Campo magnetizante $\vec{B} / \mu_0 = \vec{H} + \vec{M} \leftarrow$ Magnetización

Interpretación de $\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$

- ▶ En un sistema en equilibrio $\vec{j}_{libre} = 0$ y $\rightarrow$
- ▶ Las ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son iguales.
- ▶ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
- ▶ Resolviendo en términos de potenciales
- ▶ $\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$ se interpretan como *densidades volumétricas de momento dipolar*.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}/\epsilon_0 & \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \vec{E} &= -\nabla \Phi_E(\vec{x}) & \vec{H} &= -\nabla \Phi_H(\vec{x})\end{aligned}$$

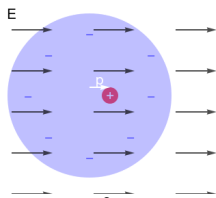


$$\text{Si } \vec{\mathcal{P}} = \begin{cases} \vec{\mathcal{P}}_0 & r < a \\ 0 & r \end{cases} \Rightarrow \Phi_E = -\frac{4/3\pi a^3 \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \max(r,a)^3}$$

$\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$ son las *densidades volumétricas de momento dipolar*.

Polarizabilidad eléctrica

- ▶ En un medio lineal, $\vec{\mathcal{P}} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E}$ con χ_E la *polarizabilidad eléctrica*.
- ▶ Un modelo simple para la polarizabilidad atómica consiste en suponer un núcleo puntual, rodeado de una nube electrónica esférica.
- ▶ Ejercicio: Estimar χ_E para un *gas noble*.
- ▶ Moléculas con momento dipolar permanente $\vec{p}_0$ (ej: H_2O).
 $U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.
- ▶ *Distribución de Boltzmann*
 $P(U_E) = e^{-U_E/kT} \Rightarrow$,
 $\langle \vec{p} \rangle = \frac{|\vec{p}_0|^2}{3kT} \left(3 \frac{\coth(u)u - 1}{u^2} \right) \Big|_{u=\frac{p_0 E}{kT}} \vec{E}$
- ▶ Para el agua,
 $p_0 = 1.84 \text{ Debye} = 6.16 \times 10^{-30} \text{ C m}$



$$\langle \vec{p} \rangle \approx \frac{|\vec{p}_0|^2}{3kT} \vec{E}$$

$$k \approx$$

$$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K:}$$

constante de Boltzmann

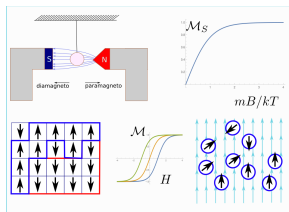
T : temperatura absoluta.

Magnetización

- ▶ No se puede explicar en términos de partículas “clásicas” cargadas.
- ▶ En un *medio lineal isótropo*,
 $\vec{M} = \chi_M \vec{H}$.
- ▶ Se introduce $\mu = \mu_0(1 + \chi_M)$, la *permeabilidad magnética* del medio.

$$\begin{aligned}\vec{B}/\mu_0 &= \vec{H} + \vec{M} \\ &= (1 + \chi_M)\vec{H} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} \\ \mu &= (1 + \chi_M)\mu_0\end{aligned}$$

En los medios materiales, se observan los siguientes comportamientos:



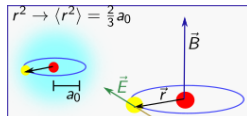
- ▶ Magnetización inducida por $\vec{H}$
 - ▶ Diamagnetismo (repelidos por imanes)
 - ▶ Paramagnetismo (atraídos por imanes)
- ▶ Magnetización intrínseca
 - ▶ Ferromagnetismo
 - ▶ Anti Ferromagnetismo - Ferrimagnetismo

Diamagnetismo

- ▶ En un superconductor, $\chi_M = -1$
- ▶ Para materiales típicos,
 $\chi_M \approx -10^{-6}$
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Helio $\chi_M \approx -9.85 \times 10^{-10}$
 - ▶ Agua: $\chi_M \approx -9 \times 10^{-6}$
 - ▶ Parafina $\chi_M \approx -8.8 \times 10^{-6}$
 - ▶ Cobre $\chi_M \approx -9.63 \times 10^{-6}$
 - ▶ Diamante $\chi_M \approx -2.2 \times 10^{-5}$
- ▶ Modelo *clásico*: consecuencia de la *Ley de Faraday*

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\frac{q^2}{4\pi m} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad q = Ze$$

- ▶ $\chi_M = \text{molaridad de átomos diamagnéticos } (dn/dV) \times N_A \times \text{magnetización de un átomo } \vec{m}$



$r^2 \rightarrow \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} a_0$
 Momento angular $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$
 corriente $I \approx \frac{qv}{2\pi r} = \frac{qL}{2\pi mr^2}$
 Momento magnético $\vec{M} = \vec{S}I = \frac{q}{2m} \vec{L}$
 Ley de Faraday $\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pi r^2 B$
 $\mathcal{E} = 2\pi rE = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t}$
 Torque $\vec{T} = q\vec{r} \times \vec{E}$
 $\vec{M} = -\frac{q^2 r^2}{4m} \vec{B} + \vec{M}|_{B=0}$
 $\mathcal{M} = \frac{dn}{dV} \vec{M} = \frac{\chi_M}{1 + \chi_M} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
 $\chi_M \approx -\frac{q^2 a_0^2}{6m} \frac{dn}{dV}$

Paramagnetismo

- ▶ Átomos con momentos magnéticos *permanentes*.
- ▶ Resulta de la distribución de Boltzmann con energía $U_B = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.
- ▶ $\chi_M > 0$
- ▶ χ_M depende de la temperatura (Ley de Curie) $\chi_M \approx \frac{|\vec{m}_0|^2}{3kT}$
- ▶ Para campos intensos,

$$\vec{M} \approx \vec{M}_s \tanh(\vec{B} \cdot \vec{M}/kT)$$

- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Oxígeno: $\chi_M = 3,73 \times 10^{-7}$
 - ▶ Aluminio: $\chi_M \approx 2,2 \times 10^{-5}$
 - ▶ Niquel: $\chi_M \approx 600$
 - ▶ Hierro: $\chi_M \approx 2 \times 10^5$

Ferromagnetismo, Antiferromagnetismo y Ferrimagnetismo

- ▶ Resultado de la *interacción de intercambio*.
- ▶ Grupos de átomos se alinean dentro de *dominios magnéticos*.
- ▶ $\vec{M}$ depende de la historia (*histéresis*).
- ▶ A temperaturas altas, el *orden magnético* se pierde, y se obtiene una *fase paramagnética*.
- ▶ Ley de Curie-Weiss

$$\chi_M \approx \frac{C}{T - T_c}$$

- ▶ En un ferromagneto, $T_c > 0$, y a bajas temperaturas todos los momentos se alinean paralelos, aún para $\vec{H} = 0$.
- ▶ En un anti-ferromagneto, $T_c < 0$, y a bajas temperaturas los momentos se alinean anti-paralelos. $\chi_B \rightarrow 0$ para campos bajos.
- ▶ En un ferrimagneto, los momentos no se cancelan totalmente entre sí.

Ondas Electromagnéticas en medios lineales

Ecuaciones de Maxwell en medios lineales

- ▶ $\vec{D} = (1 + \chi_E)\epsilon_0\vec{E} = \epsilon\vec{E}$
- ▶ $\vec{B} = (1 + \chi_M)\mu_0\vec{H} = \mu\vec{H}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{\text{libre}}/\epsilon$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}_{\text{libre}} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Para soluciones armónicas,
 $\vec{E} \propto e^{-i\omega t}$, $\vec{j}_{\text{libre}} = \sigma \vec{E}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{B} = -i\omega\mu\left(\frac{i\sigma}{\omega} + \epsilon\right)\vec{E}$$

- ▶ En ausencia de cargas y corrientes libres, $c \rightarrow \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$.
- ▶ Para soluciones armónicas, podemos absorber la corriente de conducción en la constante dieléctrica $\epsilon \rightarrow \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \rightarrow n(\omega)$ complejo!

Teorema de Poynting

- ▶ En la práctica, conviene reescribir el teorema de Poynting en términos de las corrientes y cargas *libres*.
- ▶ Para medios lineales e isotrópicos, las expresiones coinciden con las del vacío, salvo por el cambio $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$, $\mu_0 \rightarrow \mu$.
- ▶ Cargamos en las energías eléctrica y magnética el trabajo de las fuerzas que intervienen en la polarización (de origen EM o no).

$$\begin{aligned}
 W_{\text{libre}} &= \int \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{libre}} dV & \vec{S}_{\text{libre}} &= \vec{E} \times \vec{H} \\
 \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{libre}} &= -\nabla \cdot \vec{S}_{\text{libre}} - \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\mathcal{U}_E} - \underbrace{\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\mathcal{W}_M} \\
 \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}}_{\mathcal{U}_E} + \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{W_P} \\
 \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}}_{\mathcal{U}_B} - \underbrace{\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{W_M}
 \end{aligned}$$

▶ Si $\vec{D} = \vec{E}\varepsilon$ y $\vec{B} = \mu\vec{H}$

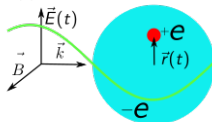
$$\begin{aligned}
 W_{\text{libre}} &= -\int \vec{S} \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{U}_D + \mathcal{U}_H) dV \\
 \text{con} \quad \mathcal{U}_D &= \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{2} & \mathcal{U}_H &= \frac{|\vec{H}|^2 \mu}{2}
 \end{aligned}$$

Polarizabilidad en campos oscilantes

- Podemos modelar la polarizabilidad atómica debida a un campo oscilante como un oscilador amortiguado.
- μ masa reducida nube-núcleo.
- Disipación η debido al acoplamiento mecánico a la red iónica.

$$\vec{p}(t) = e\vec{r}(t)$$

$$\vec{E}(t) \approx \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$



$$\mu = \frac{m_N m_e}{m_N + m_e} \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

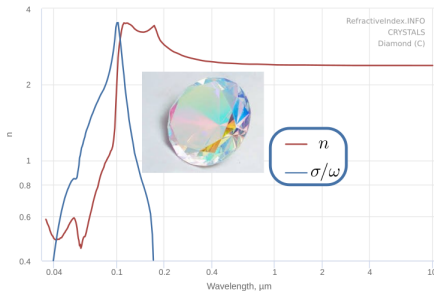
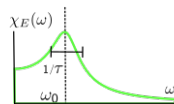
$$a_0 \approx 10^{-10} \text{ m el radio atómico.}$$

$$\omega_0 = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \mu a^3),$$

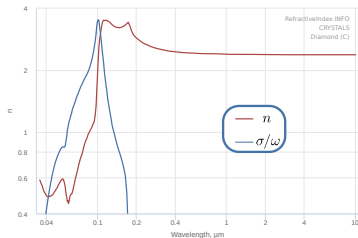
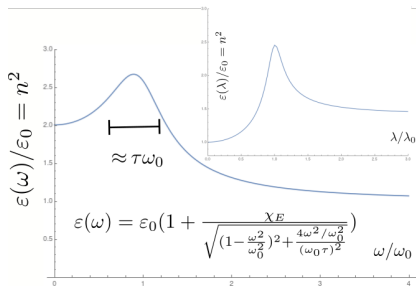
$$\tau = \mu / \eta$$

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = e\vec{E} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{r} - \eta \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{p}(t) = \frac{e^2 / \mu}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \vec{E}(t)$$



Ejemplo: índice de refracción en el diamante



$$\lambda_0 \approx 10^{-7} \text{ m}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_0} \approx \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \approx 10^{-16} \text{ s}$$

Pregunta de integración

Considere un arreglo de barras cilíndricas conductoras de largo L y diámetro $a \ll L$ y conductividad σ . Si las barras se distribuyen en forma paralela sobre un plano y sin tocarse, explique qué espera observar cuando una onda plana, linealmente polarizada, incide sobre el arreglo, como función del ángulo de polarización.