Clase 17 - Ecuaciones de Maxwell - Radiación Electromagnética

Prof. Juan Mauricio Matera

1 de noviembre de 2024

La Ley de Ampère-Maxwell y Corriente de desplazamiento

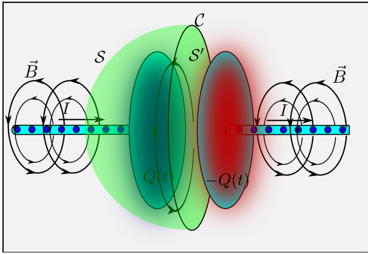
Inconsistencia de la Ley de Ampère en sistemas dependientes del tiempo

Si aplicamos la **Ley de Ampère** a un **capacitor de placas paralelas** durante su proceso de carga, nos encontramos una ambiguedad:

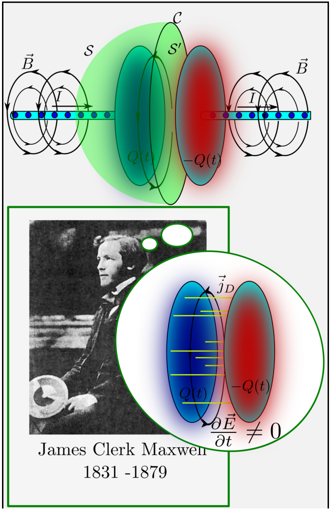
- La corriente **de carga** que atraviesa la superficie$\mathcal{S}$ es***I***
- Ninguna carga atraviesa $\mathcal{S}'$
- Tanto $\mathcal{S}$ como $\mathcal{S}'$ están limitadas por $\mathcal{C}$. Entonces, ¿Quienes son $\vec{j}$ y $\mathcal{S}$ en el segundo miembro de

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

?



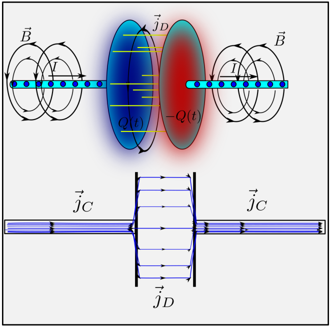
La corriente de desplazamiento



James C. Maxwell observó que$\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ forman una **superficie cerrada** y por lo tanto, según la **Ley de Gauss** y el **principio de conservación de la carga eléctrica**

$$0 = \frac{dQ}{dt} - I = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} - I$$

donde$\vec{E}$ es el campo eléctrico generado por las cargas acumuladas en la armadura.



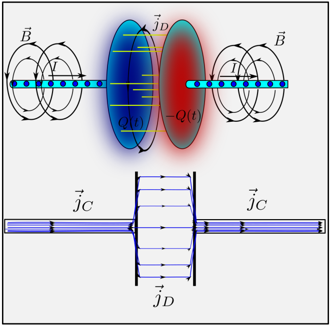
De esta manera, definiendo

$$\vec{j} = \vec{j}_C + \vec{j}_D$$

con

- $\vec{j}_C$ la **densidad de corriente de conducción**, debida a los portadores de carga, y
- $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ la **densidad de corriente de desplazamiento**

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} \vec{j}\cdot d\vec{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} (\vec{j}_C + \vec{j}_D)\cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} (\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + j_C)\cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &= \frac{dQ}{dt} - I = 0 \quad \text{y por lo tanto,} \quad \int_{\mathcal{S}} \vec{j}\cdot d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}'} \vec{j}\cdot d\mathcal{S}\end{aligned}$$



- Llamamos a $I_D = \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_D \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ la **Corriente de desplazamiento** a través de $\mathcal{S}$.
- Las líneas de corriente total son **cerradas**.
- La ecuación de Ampère es remplazada entonces por la **Ley de Ampère-Maxwell**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_C \cdot d\vec{\mathcal{S}} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}}$$

- En ausencia de cargas, nótese la similitud de esta expresión con la **Ley de Faraday-Maxwell**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

Ecuaciones de Maxwell (Forma Integral)

- Ley de Gauss: Para toda superficie cerrada $\mathcal{S}$,

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\mathcal{S} = \frac{Q_{\mathcal{S}}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot d\mathcal{S}$$

James Clerk Maxwell
1831 -1879

  - Ley de Faraday-Maxwell. Para toda superficie$\mathcal{S}$ limitada por una curva$\mathcal{C}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

  - Ley de Ampère-Maxwell. Para toda superficie S limitada por una curva $\mathcal{C}$,

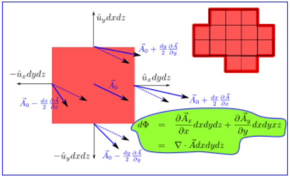
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{j}_{\mathrm{cond}}\cdot d\vec{\mathcal{S}} + \mu_0\varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

Forma diferencial de las Ecuaciones de Maxwell.

Ley de Gauss en forma diferencial

Teorema de Gauss

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{A}\cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{A}d\vec{\mathcal{V}}$$



$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{E}d\mathcal{V} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

y

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{B}d\mathcal{V} = 0$$

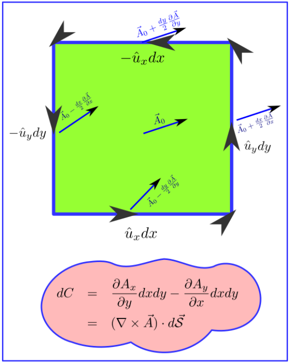
Luego,

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \text{y} \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Ley de Faraday-Maxwell en forma diferencial

Teorema de Stokes

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \nabla\times\vec{A}d\vec{\mathcal{S}}$$



Para una superficie $\mathcal{S}$ fija, la ley de Faraday

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

para **cualquier** superficie$\mathcal{S}$
puede expresarse vía el teorema de Stokes

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} (\mu_0 \vec{j}_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}) \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

para **cualquier** superficie $\mathcal{S}$. Luego,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Notar que

$$\nabla \cdot (\vec{j}_C + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \nabla \cdot \vec{j}_C + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0}) = 0$$

que no es otra cosa que la **Ecuación de Continuidad**.

- La Ley de Ampère sólo podía ser cierta en situaciones **estáticas**

Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

- Tienen validez general
- Establecen **relaciones locales** sobre las **derivadas** de los campos.

Ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Ecuaciones de Maxwell en el Vacío

En ausencia de cargas eléctricas,

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

ó, utilizando las identidades

- $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ donde el **operador laplaciano** se aplica sobre cada componente.
- $\nabla \times \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\nabla \times \vec{A}}{dt}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t} & \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} \\
-\nabla^2 \vec{B} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} & -\nabla^2 \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

En el vacío, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se comportan como *ondas transversales* ($\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$), *interdependientes* ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) que se propagan con velocidad $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \mathrm{m/s}$ (¡la velocidad de la luz!)

Teoría de las ondas electromagnéticas de Maxwell

- Desarrollada por James C. Maxwell en 1862.
- La luz es una *onda electromagnética* que resulta de las perturbaciones sobre los *campos electromagnéticos*.
- Las perturbaciones son producidas por el movimiento de *partículas cargadas*.
- La teoría predice que la luz se propaga en el vacío con una velocidad característica $c \approx 2,99 \mathrm{m/s}$, que se reduce al atravesar medios materiales.
- La velocidad de propagación en el vacío es independiente del sistema de referencia!
- La luz visible forma sólo una pequeña parte del espectro electromagnético.

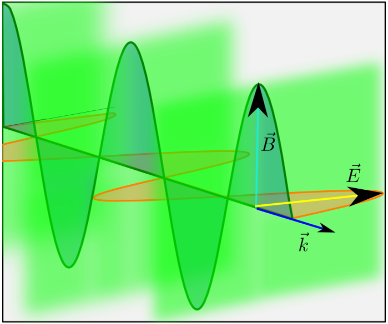
James Clerk Maxwell
1831 -1879

Soluciones de onda plana monocromática

Proponiendo una solución tipo onda plana $\vec{E} = \Re\vec{E}_0 e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ encontramos

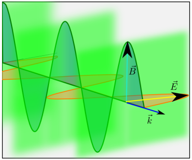
- $\vec{B} = \Re\frac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega}e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ (Ley de Faraday).
- $\frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ (Ampère-Maxwell).
- $\vec{E}\cdot\vec{k} = \vec{B}\cdot\vec{k} = 0$ (Ley de Gauss/ transversalidad).

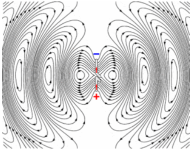
Toda solución en el vacío es una combinación lineal de ondas planas, cada una identificada con una polarización y vector de onda $\vec{k}$.



Ambos campos se propagan en fase, con polarizaciones perpendiculares entre sí y transversales a la dirección de propagación.

Soluciones generales





- La solución general de la ecuación de onda puede expresarse como una superposición de ondas planas monocromáticas polarizadas

$$\vec{E}(x,t) = \sum_{p=1,2} \Re \int \vec{E}_p(\vec{k}) e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} d^3\vec{k}$$

$$\vec{B}(x,t) = \sum_{p=1,2} \Re \int \frac{\check{k} \times \vec{E}_p(\vec{k})}{c} e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} d^3\vec{k}$$

con $\{\vec{E}_1(\vec{k}), \vec{E}_2(\vec{k}), \vec{k}\}$ ternas ortogonales para cada $\vec{k}$

$$\vec{E}_1(\vec{k}) \cdot \vec{k} = \vec{E}_2(\vec{k}) \cdot \vec{k} = \vec{E}_1(\vec{k})^* \cdot \vec{E}_2(\vec{k}) = 0\,.$$

El potencial vector

- Una forma más simple de expresar los campos electromagnéticos se obtiene notando que como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, es posible encontrar un campo $\vec{A}$ tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
- De la ley de Faraday, se sigue que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi$ con Φ el potencial escalar.
- Si elegimos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, de la ley de Gauss se sigue que $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0$. Con este cambio de variables, las ecuaciones de Maxwell se expresan

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi &= -\rho/\varepsilon_0 & \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} & \\
\vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} & \nabla \cdot \vec{j}_T = 0 \\
\nabla^2\vec{A} &= -\mu_0\underbrace{(\vec{j} - \varepsilon_0\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t})}_{\vec{j}_T} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} &
\end{aligned}$$

- La condición $\nabla \cdot \vec{A}$ se conoce como *condición de gauge*.
- En estas variables, Φ depende de la *carga neta* y $\vec{A}$ es una *onda transversal*, con *términos de fuente* $\vec{j}_T$.

Sistemas estacionarios

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0 \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0$$
$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$
$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Ecuaciones de Poisson independientes

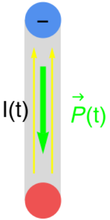
En el vacío

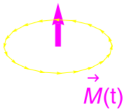
$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$
$$\nabla^2\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}$$

Ecuación onda transversal

- Para sistemas estacionarios, las soluciones para $\vec{A}$ tienen la misma forma que las soluciones para Φ
- En el vacío, $\Phi = 0$ y $\vec{A}$ es una onda transversal *libre*.

- Para un campo magnético uniforme, $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$
- Para un lazo de corriente estacionario y cerrado, $\vec{A} = \int \frac{\mu_0 i d\vec{\ell}'}{4\pi|\vec{r}-\vec{\ell}'|}$
- Para un dipolo magnético, $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left. \frac{(\vec{m}+\frac{r}{c}\vec{m}')\times\check{r}}{r^2} \right|_{t-r/c}$
- Para un elemento de corriente (fuente) $i(t)\vec{a} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t}$, $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left. \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} \right|_{t-r/c} + \nabla\Lambda$ con $\Lambda = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{c} - \int_{t-r/c}^{t} \check{r}\cdot\vec{p}(t')dt'\right)$
- En presencia de conductores, $\vec{j} = \sigma\vec{E} \approx -\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ (fuerza de arrastre).
- Solución de onda plana: $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{\mathbf{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Rightarrow$ $\vec{E} = \mathbf{i}\omega\vec{A}$, $\vec{B} = \mathbf{i}\vec{k}\times\vec{A} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$

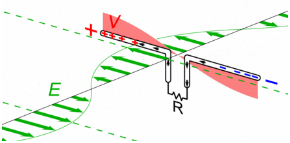




Detección y emisión de ondas electromagnéticas

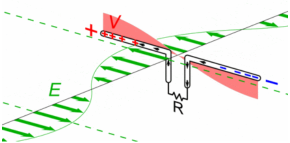
Detección de ondas electromagnéticas

- Una **antena** es un dispositivo que permite detectar una **onda electromagnética**.
- El modelo más simple es el de la **antena dipolar**.
- Sistemas tan dispares como las antenas de wifi, los radiotelescopios, la clorofila y el ojo humano se basan en un principio semejante.



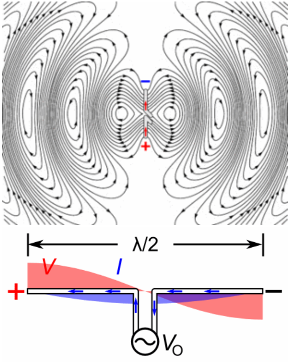
Detección de ondas electromagnéticas

- Una **antena** es un dispositivo que permite detectar una **onda electromagnética**.
- El modelo más simple es el de la **antena dipolar**.
- Sistemas tan dispares como las antenas de wifi, los radiotelescopios, la clorofila y el ojo humano se basan en un principio semejante.



Generación de ondas electromagnéticas

- El modelo más simple de una fuente puntual de ondas EM es un **dipolo oscilante**: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$.
- Este se realiza al inducir una corriente alterna en un conductor cuyos terminales están abiertos (como un capacitor "al revés").
- Modelamos las fuentes de radiación EM como uno o muchos dipolos eléctricos oscilantes.
- Una partícula cargada en movimiento circular, desde lejos, puede modelarse como la superposición de dos dipolos perpendiculares entre sí, sobre el plano de la órbita.



Campo Magnético de un Dipolo Eléctrico

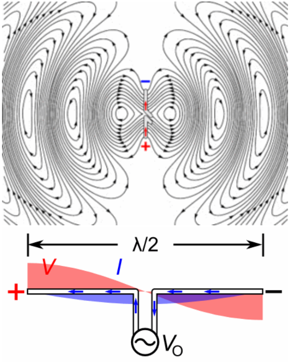
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\vec{p} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{p}}{dt}\right)\Big|_{t-r/c} \times \hat{r}$$

$$\vec{p} = Q\vec{a} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = I\vec{a}$$

El primer término

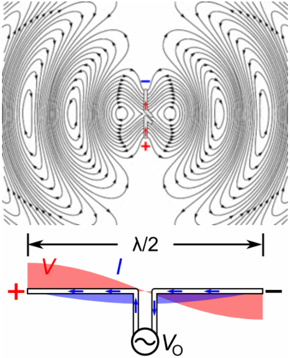
$$\vec{B}_{BS} = \frac{\mu_0 \frac{d\vec{p}}{dt} \times \check{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\vec{a} \times \check{r}}{4\pi r^2}$$

no es otra cosa que la Ley de Biot y Savart, pero retardada en r/c.
El segundo término es el **campo de radiación** $\propto 1/(cr)$



Campo Eléctrico de un dipolo oscilante

- A partir de la Ley de Ampère-Maxwell, el campo eléctrico puede escribirse como $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\nabla\phi_{est} - \nabla\phi_{rad} + \vec{E}_{nc,rad}\right)$ con
  - $\phi_{est} = \left.\frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right|_{t-r/c}$ el potencial de un dipolo estático, retardado.
  - $\phi_{rad} = \left.\frac{\hat{r}\cdot\vec{p}\,'}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{t-r/c}$ una corrección al potencial y
  - $\vec{E}_{nc,rad} = -\frac{\vec{P}''}{rc^2}$ un término, cuyo rotor es $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.



Valores límites

- Si $\vec{p} = \vec{p_0}\cos(\omega t)$, a distancias $r \ll \lambda = 2\pi c/\omega$, los campos pueden aproximarse por sus expresiones estáticas

$$\vec{E} \approx -\nabla\phi_{est} \text{ y } \vec{B} \approx \frac{\mu_0 \vec{p}'(t)}{4\pi r^2}$$

- Si $r \gg \lambda = 2\pi c/\omega$, los campos toman la forma

$$\vec{B} \approx \frac{\omega^2 \mu_0 \hat{r} \times \vec{p}_0 \cos(\omega t - \omega/cr)}{4\pi rc} \;\text{ y }\; \vec{E} \approx c\vec{B} \times \hat{r}$$

- De esta manera, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, a distancias grandes se comportan como **ondas esféricas transversales**, pero con una dependencia angular, debido al factor $\vec{r} \times \vec{p}_0$