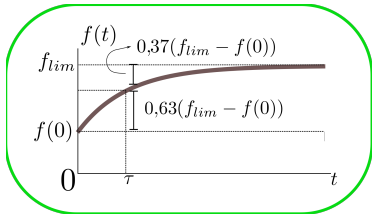


Clase 16 - Transitorios y Corriente Alterna

Prof. Juan Mauricio Matera

28 de octubre de 2024

Transitorios



$$f(t) = f_{lim} + (f(0) - f_{lim})e^{-t/\tau}$$

- ▶ Para tiempos menores que τ , la solución varía con velocidad $(f_0 - f_{lim})/\tau$ en dirección al valor límite f_{lim} .
- ▶ Para tiempos mayores a τ , la solución tiende al valor constante f_{lim} .
- ▶ Decimos que entre $t = 0$ y $t \gg \tau$, el sistema atraviesa un **transitorio**, hasta alcanzar una situación estacionaria.
- ▶ Para $t \approx \ln(2)\tau \approx 0.69\tau$, la diferencia entre $f(t)$ y f_{lim} cae al 50% de su valor inicial.
- ▶ Para $t \approx \tau$, la diferencia entre $f(t)$ y f_{lim} cae al 37% de su valor inicial.

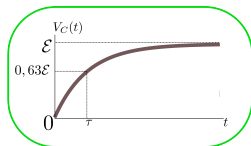
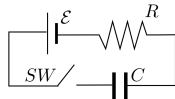
- ▶ La ecuación diferencial lineal de primer orden aparece recurrentemente en ciencias:
 - ▶ Movimiento en medios viscosos.
 - ▶ Procesos disipativos.
 - ▶ Decaimiento radioactivo.
 - ▶ Marcha al equilibrio en procesos químicos.
 - ▶ Concentración de antibióticos en sangre.
- ▶ Nótese que si $\tau < 0$, el comportamiento va en “reversa”: la distancia al valor “límite” **crece exponencialmente**. Este tipo de dinámicas representa fenómenos “explosivos”, como la propagación de una infección.

Volviendo al circuito RC ,

$$RC \frac{dV_C}{dt} = \mathcal{E} - V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{RC} - \frac{1}{RC} V_C$$

de manera que $V_{C,lim} = \mathcal{E}$, $\tau = RC$ y por lo tanto,

$$V_C(t) = \mathcal{E} + (V_C(0) - \mathcal{E})e^{-t/\tau}.$$



- La corriente en el circuito se recupera vía

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = -\frac{C(V_C(0) - \mathcal{E})}{\tau} e^{-t/\tau}$$

que se anula para $t \gg \tau$.

- Si inicialmente el capacitor estaba **descargado**,

$V_C(0) = Q(0)/C = 0$, con lo que

$$i = \frac{C\mathcal{E}}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{C\mathcal{E}}{RC} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}.$$

- A $t = 0$, la corriente se comporta **como si** remplazáramos el capacitor por un cable.

Descarga del capacitor

Si, luego de cargar al capacitor, se retira la batería, la ecuación diferencial

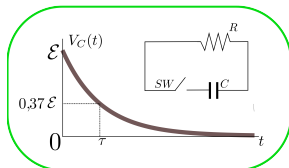
$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{RC} - \frac{1}{RC} V_C$$

se reduce a

$$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{RC} V_C$$

con la condición inicial, $V_C(0) = \mathcal{E}$.

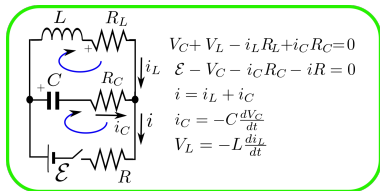
- ▶ De esta manera, $V_{C,lim} = 0$, $\tau = RC$ y $V_C(t) = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$.
- ▶ La corriente en el circuito será $i = C \frac{dV_C}{dt} = -\frac{C\mathcal{E}}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$



- ▶ El **signo negativo** en la **corriente** se debe a que su **circulación es opuesta que en la carga**.
- ▶ En la descarga, un capacitor se comporta inicialmente como si fuese una **FEM** que decrece a medida que se descarga.

Circuitos no tan simples, tratamiento general

Tratamiento general



- Reemplazando en la primera malla,

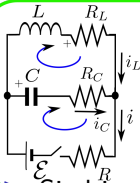
$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dV_C}{dt} + \omega^2 (V_C - V_{C,lim}) = 0$$

- Reemplazando $i \rightarrow i_L + i_C$ y despejando i_L de la segunda ecuación,

$$i_L = \frac{\mathcal{E} - V_C - (R + R_C)i_C}{R} = 0$$

Reemplazando en V_L ,

$$\begin{aligned}
 V_L &= \frac{L}{R} \left(\frac{dV_C}{dt} + (R + R_C)C \frac{d^2}{dt^2} \right) \\
 &\text{con} \\
 \omega^2 &= \left(\frac{R + R_L}{R + R_C} \frac{1}{LC} \right), \\
 V_{C,lim} &= \frac{R_L}{R + R_L} \mathcal{E} \text{ y} \\
 \tau &= \frac{2LC(R + R_C)}{L + (R(R_C + R_L) + R_L R_C)C}
 \end{aligned}$$



$$V_C + V_L - i_L R_L + i_C R_C = 0$$

$$\mathcal{E} - V_C - i_C R_C - i R = 0$$

$$i = i_L + i_C$$

$$i_C = -C \frac{dV_C}{dt}$$

$$V_L = -L \frac{di_L}{dt}$$

► Si el interruptor está abierto,
 $R \rightarrow \infty$, $\mathcal{E} \rightarrow 0$ y el circuito se
 reduce a un RLC serie.

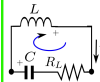
► En este caso, la ecuación diferencial
 toma la misma forma, pero con los
 parámetros

► $\omega^2 = \frac{1}{LC}$,

► $V_{C,lim} = 0$ y

► $\tau = \frac{2L}{R_L + R_C}$

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dV_C}{dt} + \omega^2 (V_C - V_{C,lim}) = 0$$



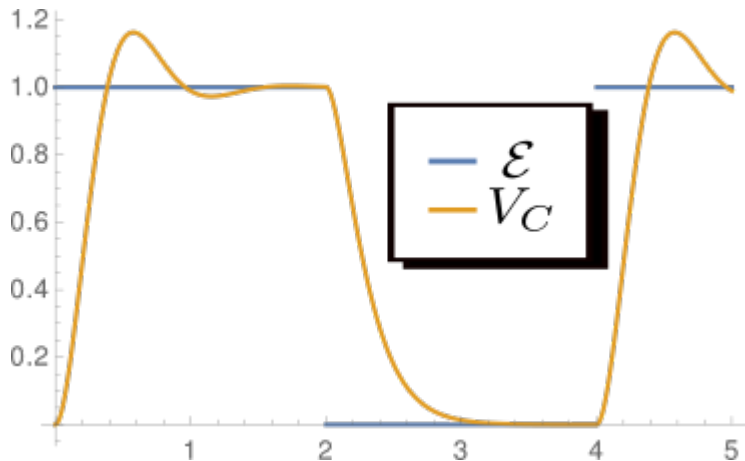
$$V_C + V_L - i R = 0$$

$$i = -C \frac{dV_C}{dt}$$

$$V_L = -L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 V_C}{dt^2}$$

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

... sin embargo, el transitorio puede presentar oscilaciones:



La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{df(t)}{dt} + \omega^2(f(t) - f_{lim}) = 0$$

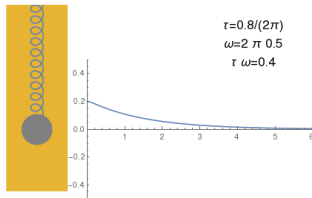
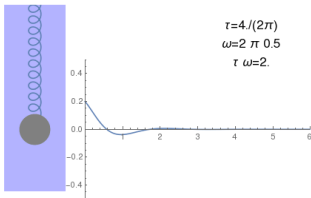
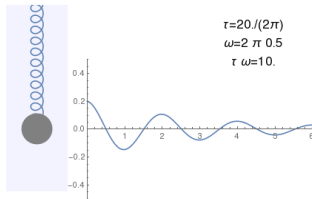
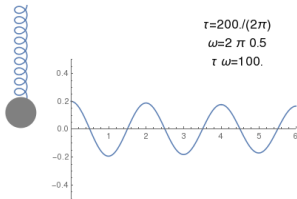
Reordenando la ecuación, y considerando el caso en que $f(t)$ es la posición de una partícula

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2(x(t) - x_{lim}) - \frac{2}{\tau} \frac{dx(t)}{dt}$$

identificamos la forma de la **Segunda Ley de Newton** para una partícula sujeta a

1. Una fuerza elástica.
 2. Una fuerza de arrastre.
- ▶ Si $\omega^2 \rightarrow 0$, las soluciones son de la forma $x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-t'/\tau} dt'$ (como en un transitorio).
 - ▶ Si $\tau \rightarrow \infty$, las soluciones son de la forma $x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi_0) + x_{lim}$ (como en un oscilador armónico).

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2(x(t) - x_{lim}) - \frac{2}{\tau} \frac{dx(t)}{dt}$$



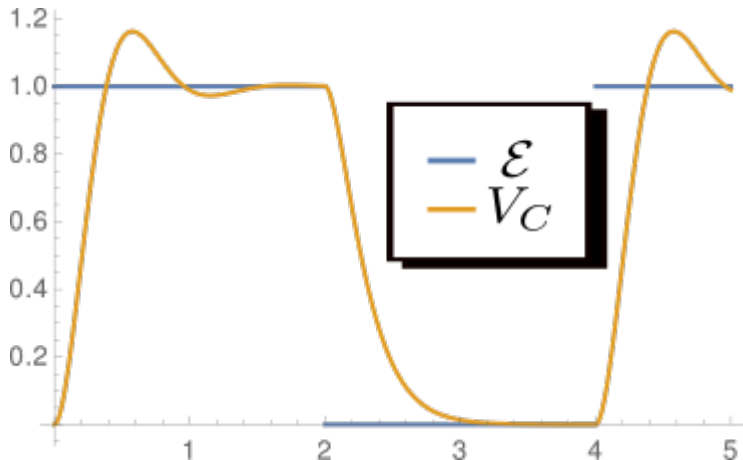
... volviendo al circuito,

... volviendo al circuito,

Observamos que al cambiar la posición de la llave, si

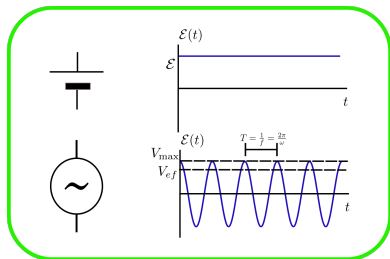
$\tau\omega = 2\frac{\sqrt{L/C}}{(R_L+R_C)} > 1$, la tensión en C (y la corriente en L) sufren oscilaciones amortiguadas con una frecuencia $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- ▶ La amortiguación puede eliminarse si la llave se cierra y se vuelve a abrir con una frecuencia cercana a $\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, la **frecuencia de resonancia** del sistema.
- ▶ Este es el comportamiento típico de los circuitos RLC , que son la base de los **osciladores eléctricos**.



Corriente Alterna

En un circuito de corriente alterna, las baterías son remplazadas por fuentes de **tensión alterna**



En una **fuentes de tensión alterna** la **diferencia de potencial** entre sus bornes es de la forma

$$V(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(2\pi ft + \phi_0)$$

donde

- ▶ V_{ef} es el **valor eficaz** de la tensión en la fuente,
 - ▶ f es la **frecuencia** y
 - ▶ ϕ_0 es un **ángulo de fase inicial**.
-
- ▶ Si en el circuito tenemos una única fuente de tensión alterna, podemos elegir siempre $\phi_0 = 0$.
 - ▶ Veremos ahora que las tensiones y corrientes en el resto del circuito también serán armónicas, pero con fases diferentes a ϕ_0

Fuentes de Tensión Alterna

- ▶ Alternadores
- ▶ Osciladores electrónicos
- ▶ Señales alternas (ej: transducción de sonido en corriente)

Valor Eficaz

- El valor medio (temporal) de una **tensión alterna** es nulo

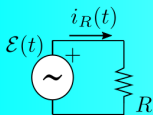
$$\begin{aligned}\langle V(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \sqrt{2} V_{ef} \frac{\int_0^T \cos(\omega t) dt}{T} \\ &= \sqrt{2} V_{ef} \frac{1 - \sin(\omega T)}{\omega T} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

- Por ese motivo, se prefiere utilizar para su caracterización su **dispersión media cuadrática** o **valor eficaz**:

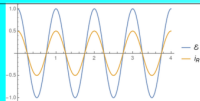
$$\sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt} = V_{ef} \sqrt{\frac{\int_0^T 2 \cos^2(\omega t) dt}{T}} \rightarrow V_{ef}$$

Consideremos ahora los casos más simples de circuitos de CA

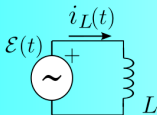
$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{2}V_{eff}\cos(\omega t)$$



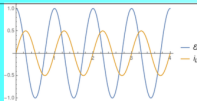
$$\mathcal{E}(t) - i(t)R = 0$$



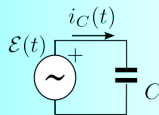
$$i_R(t) = \sqrt{2}\frac{V_{eff}}{R}\cos(\omega t)$$



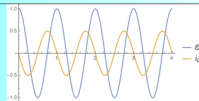
$$\mathcal{E}(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$



$$i_L(t) = \sqrt{2}\frac{V_{eff}}{L\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



$$C\frac{d\mathcal{E}}{dt} - i_C(t) = 0$$



$$i_C(t) = \sqrt{2}\frac{V_{eff}}{1/(C\omega)}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Impedancia

- ▶ Encontramos que en estos tres casos, la corriente es también una función armónica

$$I(t) = \sqrt{2}I_{\text{eff}} \cos(\omega t + \phi) \quad I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/Z$$

donde

- ▶ Z es la **impedancia** del elemento
- ▶ ϕ es su **diferencia de fase**
- ▶ En general, toda rama compuesta por elementos **lineales**, sometida a una **tensión armónica** transporta una **corriente armónica** con la misma frecuencia.
- ▶ La rama queda caracterizada por sus valores de Z y ϕ .
- ▶ Los valores de Z y ϕ dependerán en general de la frecuencia.

Impedancia compleja

- Igual que cuando tratamos el caso de las ondas, conviene introducir la *impedancia compleja*

$$\mathcal{Z} = Ze^{i\phi}$$

Luego $V(t) = \Re \mathcal{V}(t)$ y $I(t) = \Re \mathcal{I}(t)$ con

$$\mathcal{V}(t) = V_0 e^{-i\omega t} \quad \mathcal{I}(t) = \frac{\mathcal{V}(t)}{\mathcal{Z}}$$

- $\mathcal{Z}$ juega un papel equivalente al de la resistencia en circuitos de C.C.
- La potencia media disipada se expresa como $\langle P \rangle = \Re \mathcal{V}(t) \mathcal{I}(t) = \Re \mathcal{Z} I_{ef}^2$

Potencia entregada por la fuente

- ▶ La potencia instantanea **entregada** por la fuente vendrá dada por

$$P(t) = V(t)i(t) = 2\frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

- ▶ A partir de la identidad $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ podemos descomponer esta en dos términos

$$P(t) = P_{resistiva}(t) + P_{reactiva}(t)$$

donde:

- ▶ $P_{resistiva}(t) = 2\frac{V_{ef}^2}{Z} \cos^2(\omega t) \cos(\phi)$
- ▶ $P_{reactiva}(t) = -2\frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\phi) =$
 $\frac{V_{ef}^2}{Z\omega} \sin(\phi) \frac{d}{dt} \cos^2(\omega t)$

$$P_{resistiva}(t) = 2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos^2(\omega t) \cos(\phi)$$

- $P_{resistiva}$ es una cantidad positiva, cuyo promedio temporal viene dado por

$$\langle P \rangle = \langle P_{resistiva} \rangle = V_{ef}^2 \cos(\phi) / Z = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi).$$

Nótese la semejanza de esta expresión con aquella para la potencia disipada en una resistencia en circuitos de corriente continua.

$$P_{reactiva}(t) = -2 \frac{V_{ef}^2}{Z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\phi) = \frac{V_{ef}^2}{Z\omega} \sin(\phi) \frac{d}{dt} \cos^2(\omega t)$$

- Por otro lado, por ser una derivada total de una función periódica, $P_{reactiva}(t)$ tiene valor medio nulo: esta potencia da cuenta de una conversión **reversible** de la energía de la fuente en energía de los campos que genera el circuito.

Reactancia y resistencia

Si a una fuente de CA $V(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(\omega t)$ se conecta

- ▶ una **resistencia** de valor R ,

$$i(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(\omega t) / R$$

por lo que $\phi = 0$ y $Z = R$.

- ▶ un **Capacitor** de capacidad C , se establecerá una corriente entre sus placas de

$$i(t) = C \frac{dV}{dt} = -\sqrt{2}V_{ef}\omega C \sin(\omega t) = \sqrt{2}V_{ef}\omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Luego, $Z = X_C$ con $X_C = \frac{1}{\omega C}$ la **Reactancia capacitiva**. En un capacitor, decimos que **la corriente adelanta a la tensión** en un ángulo de $\phi = \pi/2$.

- una **autoinductancia** (ideal) de valor L , la corriente se relacionará con la tensión $\mathcal{E}(t)$ como

$$\mathcal{E}(t) = L \frac{di}{dt} = -\sqrt{2}L\omega I_{ef} \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{2}L\omega I_{ef} \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

de manera que $Z = X_L$ con $X_L = \omega L$ la **reactancia inductiva**.
En este caso, **la tensión adelanta a la corriente** $\phi = \pi/2$.

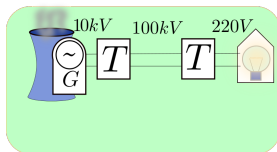
Factor de potencia

- ▶ En la expresión

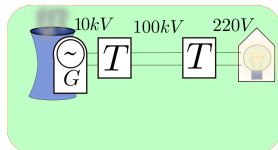
$$\langle P \rangle = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi)$$

el factor $\cos(\phi)$ suele llamarse **factor de potencia**, y da cuenta de cuanta potencia consume un circuito.

- ▶ En un circuito puramente resistivo, $R = Z$ y $\cos(\phi) = 1$.
- ▶ La presencia de inductores (como motores, o lámparas fluorescentes) en un circuito, reducen el factor de potencia.



- ▶ Si para realizar su función, un circuito consume una potencia P , al ser alimentado por una fuente de tensión de valor eficaz V_{ef} , la corriente que atravesará el circuito vendrá dada por $I_{ef} = \frac{P}{V_{ef} \cos(\phi)}$.



- ▶ Si la fuente de alimentación se conecta al circuito mediante un cable de resistencia R , la potencia disipada en el cable será $P_{dis} = R_{cable} I_{ef}^2 = \frac{R_{cable} P^2}{V_{ef}^2 \cos^2(\phi)}$.
- ▶ Por este motivo, la distribución de energía eléctrica se optimiza
 - ▶ haciendo el factor de potencia tan cercano a 1 como sea posible.
 - ▶ aumentando la diferencia de potencial tanto como sea posible.

Resonancia

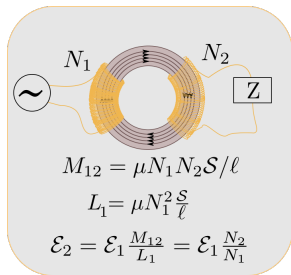
- ▶ Para ciertas **frecuencias**, las **componentes reactivas** de la impedancia **pueden anularse**. Decimos entonces que la rama se encuentra en **resonancia**.
- ▶ En particular, en una rama RLC , esto ocurre si la fuente tiene una frecuencia angular $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- ▶ Cuando esto ocurre, el **factor de potencia** es máximo, y la potencia consumida tendrá un **máximo**, para un valor fijo del valor eficaz de la FEM.

$P[\omega]/P[\omega_0]$



Transformadores

- ▶ Una ventaja de la corriente alterna es que es fácil aumentar y disminuir la tensión eficaz mediante el uso de transformadores.
- ▶ En el primer bobinado, o **primario** se conecta una fem alterna de valor eficaz V_1 .
- ▶ En el segundo bobinado o **secundario**, se conecta un circuito de **impedancia** $Z \gg M\omega$.
- ▶ En estas condiciones, la tensión eficaz inducida en el secundario será $\mathcal{E}_2 = \frac{M}{L_1} \mathcal{E}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1$.



- ▶ De esta manera, es posible aumentar la tensión durante el transporte de energía, y reducirla para alimentar la red domiciliaria.

Repaso

► Combinaciones equivalentes de inductancias reales

► Combinación serie:

$$L_{eq} = \sum_k L_k \quad R_{eq} = \sum_k R_k$$

► Combinación paralelo

$$L_{eq} = \frac{1}{\sum_k L_k^{-1}} \quad R_{eq} = \frac{1}{\sum_i R_k^{-1}}$$

► Circuitos transitorios con más de una malla:

► Situación inicial:

- las inductancias preservan su corriente
- los capacitores preservan su ΔV

► Situación estacionaria:

- las inductancias tienen $\Delta V = 0$ (como un cable).
- los capacitores tienen $i = 0$ como un interruptor abierto.

► Circuitos RLC

- Dos tiempos característicos: $\tau = \frac{L}{R}$ y $\frac{1}{\omega} = \sqrt{LC}$.
- La tensión y las corrientes satisfacen ecuaciones diferenciales lineales de **segundo orden**
- El sistema es equivalente a un oscilador mecánico sujeto a roce.
- Dos regímenes posibles:
 - régimen oscilatorio amortiguado ($\omega\tau > 1$):

$$i(t) \propto e^{-t/\tau} \cos(\tilde{\omega}t + \phi).$$

- régimen sobre-amortiguado ($\omega\tau \leq 1$):

$$i(t) \propto ae^{-t/\tilde{\tau}_+} + bae^{-t/\tilde{\tau}_-}.$$

- Excitaciones periódicas con frecuencia cercana a $\omega/(2\pi)$ producen una **respuesta resonante**.

- ▶ Corriente Alterna
 - ▶ **FEM Alterna**

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(2\pi ft)$$

- ▶ Depende del tiempo en forma armónica.
 - ▶ V_{ef} es el **valor eficaz** de $\mathcal{E}$
- ▶ f es la **frecuencia** o número de ciclos por segundo.
- ▶ En las expresiones suele aparecer la **frecuencia angular** $\omega = 2\pi f$.
- ▶ Al conectar una **FEM Alterna** a un circuito RLC, la corriente que circula por la FEM será también de la forma

$$i(t) = \sqrt{2}I_{ef} \cos(2\pi ft + \phi)$$

donde I_{ef} es el **valor eficaz** de la corriente y ϕ es un **corrimiento de fase** respecto a la tensión y f queda determinada por la FEM.

- ▶ Se define la **Impedancia** Z del circuito como el cociente $Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$, de manera análoga a la resistencia.

- ▶ Por la **Ley de Ohm**, en una resistencia, $V_{ef} = RI_{ef}$, $\phi = 0$
- ▶ Para un capacitor, $V_{ef} = X_C I_{ef}$ con $X_C = Z = \frac{1}{\omega C}$ la **reactancia capacitiva** y $\phi = \pi/2$.
- ▶ En un inductor, por la **Ley de Faraday** $V_{ef} = X_L I_{ef}$ con $X_L = Z = \omega L$ la **reactancia inductiva** y $\phi = -\pi/2$.
- ▶ En un circuito general, diremos que $Z \cos(\phi)$ y $Z \sin(\phi)$ son las componente **resistiva** y **reactiva** de la **impedancia** respectivamente.

- ▶ En un circuito de CA, la **potencia instantanea** entregada por la fuente viene dada por $P(t) = V(t)I(t)$.
- ▶ Se puede descomponer esta **potencia instantanea** en dos términos $P(t) = P_{reactiva}(t) + P_{resistiva}(t)$.
- ▶ $P_{reactiva}(t) = \frac{V_{ef} I_{ef} \sin(\phi)}{\omega} \frac{d \cos^2 \omega t}{dt}$ es la **componente reactiva**.
 - ▶ Está relacionada con la energía almacenada en los campos electromagnéticos.
 - ▶ Su signo cambia con el tiempo
 - ▶ Su valor promedio es cero.
- ▶ $P_{resistiva}(t) = \frac{V_{ef} I_{ef} \cos(\phi)}{2} \cos^2 \omega t$ es la **componente resistiva**.
 - ▶ Está relacionada con la energía disipada y con el trabajo mecánico que realiza el circuito.
 - ▶ Su signo es siempre positivo.
 - ▶ Su valor medio, al igual que el de la potencia total es $\langle P_{resistiva} \rangle = \langle P \rangle = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi)$
 - ▶ El factor $\cos(\phi)$ se denomina **Factor de Potencia**.

- ▶ Para reducir pérdidas en el transporte de energía eléctrica se busca
 - ▶ Minimizar la I_{ef} en el transporte.
 - ▶ Maximizar el **Factor de Potencia**.
 - ▶ Maximizar el valor de la tensión eficaz.
- ▶ Para optimizar la tensión en el transporte se utilizan los **Transformadores de CA**.
 - ▶ Consisten en dos solenoides acoplados magnéticamente.
 - ▶ La $V_{ef}^{(2)}$ en el solenoide secundario se relaciona con $V_{ef}^{(1)}$ del solenoide primario, conectado a la fuente según

$$V_{ef}^{(2)} = V_{ef}^{(1)} \frac{M_{12}}{L_1} = V_{ef}^{(2)} \frac{N_2}{N_1}$$

donde M_{12} es el **coeficiente de inducción mutua** entre los solenoides, L_1 es la **autoinductancia** del primario y N_1, N_2 son el número de espiras en los solenoides primario y secundario respectivamente.