

Clase 14 - Leyes de la Magnetostática - Ley de Ampère - Fuerza de Lorentz

Prof. Juan Mauricio Matera

11 de octubre de 2024

Leyes de la Magnetostática

En sistemas estacionarios, vimos que el **campo eléctrico** satisface las ecuaciones integrales

▶ **Ley de Gauss** $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$

▶ Condición de campo conservativo: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

Si bien estas leyes eran equivalentes a la **Ley de Coulomb** y al **principio de superposición**, eran en cierto sentido más fundamentales.

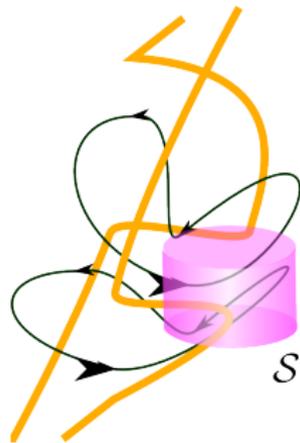
Además, en sistemas que presentan un alto grado de simetría, era posible determinar los campos de manera directa a partir de estas.

Ley de Gauss para el campo magnético

- ▶ Las líneas de campo magnético son siempre curvas cerradas. Por este motivo, el flujo de campo magnético a través de cualquier **superficie cerrada** \mathcal{S} es siempre nulo:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- ▶ Esto es equivalente a decir que no existen **cargas magnéticas** (polos magnéticos) aisladas.



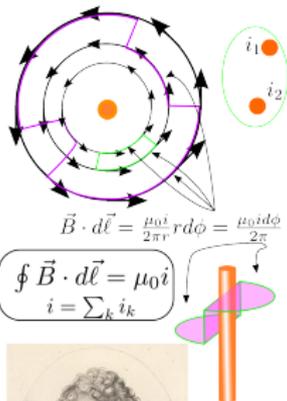
Ley de Ampère

- ▶ Otra consecuencia de que las líneas de campo magnético sean **cerradas** es que el campo magnético no es **conservativo**. Vemos esto ya que la integral de línea de un campo sobre una línea de campo es siempre positiva:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{B} \cdot \vec{B} d\tau > 0$$

ya que $\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = \vec{B}$.

- ▶ Sin embargo, como \vec{B} no es en sí proporcional a una fuerza, esta integral del línea no está asociada a un **trabajo**.
- ▶ En general, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_C$ donde S es **cualquier superficie** limitada por C , \vec{j} es la **densidad de corriente** que atraviesa el $d\vec{S}$, e i_C es la **corriente neta** que rodea C



André - Marie Ampère
1775-1836

Leyes del Campo Magnético en sistemas estacionarios

- ▶ Ley de Gauss

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

para toda superficie cerrada \mathcal{S}

- ▶ Ley de Ampère:

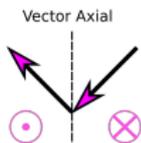
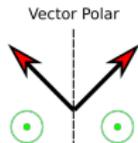
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i$$

donde \vec{j} es la **densidad de corriente** que atraviesa cualquier superficie \mathcal{S} limitada por \mathcal{C} .

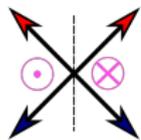
Cálculo de Campos mediante la ley de Ampère

De igual modo como aprovechamos las simetrías para determinar campos eléctricos mediante la Ley de Gauss, es posible determinar en ciertos casos el campo magnético de una distribución de corrientes mediante la Ley de Ampère y las simetrías del sistema

Vectores Polares vs Vectores Axiales

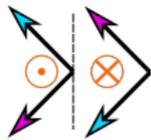


Vector Polar x
Polar =
Vector Axial



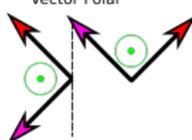
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

Vector Axial x
Axial =
Vector Axial



$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

Vector Polar x
Vector Axial =
Vector Polar



$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \vec{w} \\ \vec{u} \times \vec{v} &= \vec{w} \end{aligned}$$

Vectores Polares

Vectores Axiales

\vec{r}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

\vec{E}

\vec{p}

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^2}$$

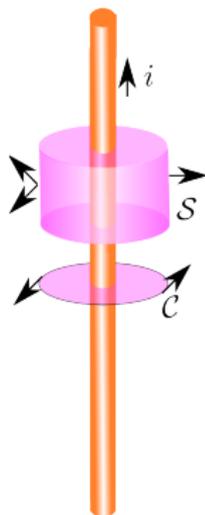
$$\vec{M} = i\vec{S}$$

Campo de una corriente rectilinea infinita

El sistema presenta las siguientes simetrías:

- ▶ El sistema es invariante ante **traslaciones paralelas** al alambre $\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(r, \phi)$.
- ▶ El sistema es invariante ante una reflexión respecto de un plano perpendicular al alambre, seguido por la inversión del sentido de la corriente $\vec{B}(r, \phi) \cdot \hat{u}_z = 0 \Rightarrow \vec{B}(r, \phi) = B_r(r, \phi)\hat{r} + B_\phi(r, \phi)\hat{u}_\phi$ con $\hat{u}_\phi = \hat{u}_z \times \hat{r}$.
- ▶ El sistema es invariante ante **rotaciones** alrededor del alambre.

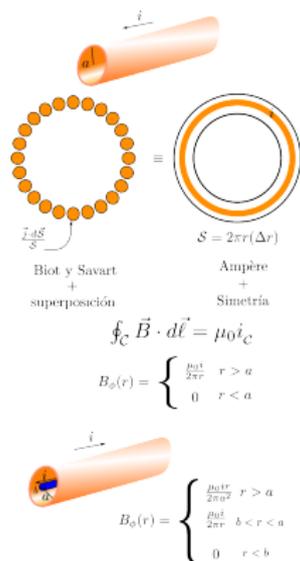
- ▶ $\vec{B}(r, \phi) = B_r(r)\hat{r} + B_\phi(r)\hat{u}_z \times \hat{u}_r$
- ▶ Por la **ley de Gauss**, $\Phi_B = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_r 2\pi r h = 0 \rightarrow \vec{B} = B_\phi(r)\hat{u}_\phi$
- ▶ Por la **ley de Ampère**,
 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\phi(r)2\pi r = \mu_0 i$ luego,
 $B_\phi(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$



Campo de una corriente en un conductor cilíndrico

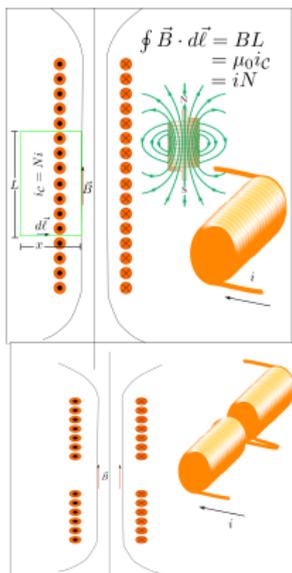
Un sistema con las mismas simetrías lo constituye un conductor cilíndrico.

- ▶ En este caso, para atacar el problema directamente con Biot y Savart, deberíamos descomponer la corriente en **contribuciones infinitesimales**, calcular las contribuciones al campo magnético según la Ley de Biot y Savart, y finalmente integrarlas.
- ▶ Por otro lado, mediante la ley de Ampère, el cálculo es igual de sencillo que para el caso del cable.
- ▶ El caso de un cable coaxial se obtiene de manera análoga, notando que $i_C = (r/a)^2 i$.



Campo magnético en un solenoide recto

- ▶ En un solenoide recto y largo, las líneas de campo son forzadas a ser paralelas a su eje.
- ▶ Aplicando la Ley de Ampère sobre las líneas de campo dentro y fuera del solenoide encontramos su magnitud y sentido: $B = \mu_0 i n$ donde $n = N/L$ es la **densidad de espiras**.
- ▶ Obtenemos el mismo resultado integrando las contribuciones de las espiras individuales, y es la forma de obtener el campo en el caso de solenoides cortos.
- ▶ Notamos además que, de la observación de las líneas de campo, si en un segmento el solenoide se interrumpe, el campo en la zona intermedia es aproximadamente igual al campo dentro del solenoide.

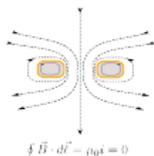
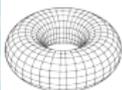


Campo magnético en un solenoide toroidal

- ▶ Para calcular el campo, nos valemos de las simetrías que deben presentar las líneas de campo
- ▶ Debido a la simetría cilíndrica, independientemente de la forma de la sección del toroide, las curvas deben ser
 - ▶ O bien círculos concéntricos en el plano perpendicular al eje del toroide
 - ▶ O bien yacer sobre planos que contengan al eje del toroide.
- ▶ La segunda alternativa es descartada por la Ley de Ampère, ya que la corriente que atraviesa esos planos es despreciable.
- ▶ Aplicando la Ley de Ampère sobre las líneas de campo, encontramos nuevamente que

$$|\vec{B}| = \mu_0 in = \text{const}$$

dentro del toroide y nulo en su exterior.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = 0$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 i n l = \mu_0 i N$$



Fuerza de Lorentz

Las corrientes eléctricas son originadas por el movimiento microscópico de cargas. Si el alambre por el que circula la corriente tiene sección \mathcal{S} , la corriente que transporta se relaciona con el movimiento de los portadores de carga según

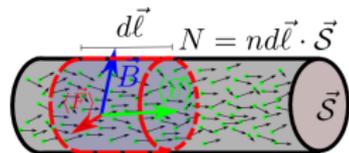
$$I = \vec{j} \cdot \vec{\mathcal{S}} = \sum_m q_m n_m \langle \vec{v}_m \rangle \cdot \vec{\mathcal{S}}$$

donde q_m , n_m y $\langle \vec{v}_m \rangle$ son la carga, la densidad volumétrica y la velocidad media de cada especie de portadores. En términos de los portadores individuales,

$$I d\vec{\ell} = \sum_m q_m (n_m (d\vec{\ell} \cdot \vec{\mathcal{S}}) \langle \vec{v}_m \rangle) = \sum_m q_m \sum_{k_m} \vec{v}_{m,k_m}$$

con k_m indicando las partículas individuales de tipo m . Aquí asumimos que $\vec{\ell}$ es perpendicular a \mathcal{S} , y usamos la definición de velocidad media:

$$\langle \vec{v}_m \rangle = \frac{\sum_{k_m} \vec{v}_{m,k_m}}{\sum_{k_m} 1} = \frac{\sum_{k_m} \vec{v}_{m,k_m}}{N}$$



Hendrik Lorentz
1853 - 1928



Oliver Heaviside
1850-1925



James C. Maxwell
1831 - 1879

De esta manera,

$$d\vec{F}_M = Id\vec{\ell} \times \vec{B} = \sum_m \sum_{k_m} (q_m \vec{v}_{m,k_m} \times \vec{B})$$

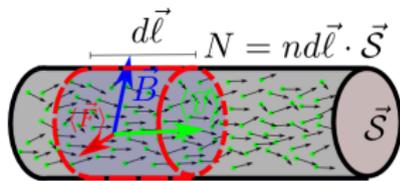
por lo que la fuerza magnética sobre cada portador será

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

con q la carga del portador y \vec{v} su velocidad. Si incluimos además el efecto del campo eléctrico \vec{E} ,

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

que se conoce como **Fuerza de Lorentz**.



Hendrik Lorentz
1853 - 1928



Oliver Heaviside
1850-1925



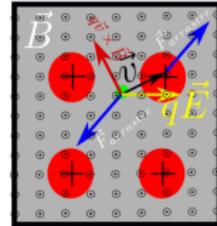
James C. Maxwell
1831 - 1879

Consecuencias

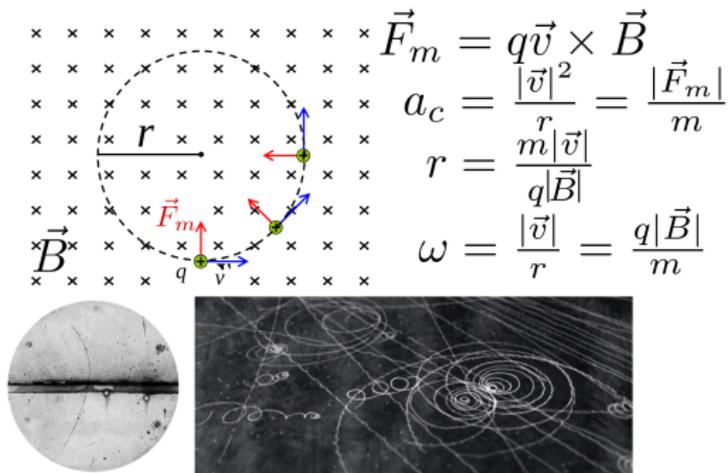
- ▶ La fuerza eléctrica es **independiente** de la **velocidad**
- ▶ $\vec{F}_E \parallel \vec{E}$
- ▶ El trabajo de la **fuerza eléctrica** es en general **no nulo**.
- ▶ Por lo tanto, la energía cinética de la carga puede cambiar.
- ▶ La fuerza magnética actúa solamente cuando la carga **se mueve**.
- ▶ $\vec{F}_M \perp \vec{B}, \vec{v}$
- ▶ El trabajo de la **fuerza magnética** es **nulo**.
- ▶ Por lo tanto, la energía cinética de la carga **no cambia** debido a \vec{B} .
- ▶ El efecto de la fuerza magnética es **cambiar** la **dirección** de la velocidad.
- ▶ En ausencia de campo eléctrico, un campo magnético induce un movimiento **helicoidal** alrededor de sus líneas de campo.

Fuerza sobre un conductor que transporta una corriente

- ▶ Nótese que la fuerza magnética **no realiza trabajo** sobre **cargas individuales**,
- ▶ sin embargo, en un conductor, el efecto de la fuerza magnética sobre los portadores de carga se transmite a la red cristalina mediante fuerzas internas de arrastre (**Ley de Ohm microscópica**).
- ▶ Como resultado, la **fuerza magnética** bien **puede realizar un trabajo sobre un segmento** a conductor través de la interacción de los portadores de carga con la red cristalina que lo forma.



Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme transverso

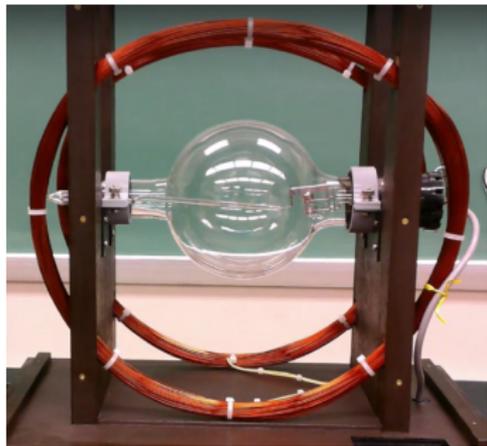


$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$a_c = \frac{|\vec{v}|^2}{r} = \frac{|\vec{F}_m|}{m}$$
$$r = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}$$
$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{r} = \frac{q|\vec{B}|}{m}$$

Notar que este movimiento (en promedio) hace que la carga se comporte como una espira de corriente $I = \frac{q^2|\vec{B}|}{m}$ y área $\vec{S} = \frac{\pi m^2|\vec{v}|^2}{q^2|\vec{B}|^3} \vec{B}$, lo que dá origen a un **momento magnético**

$$\vec{M} \approx \frac{\pi m|\vec{v}|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B}$$

Relación Carga - Masa del electrón



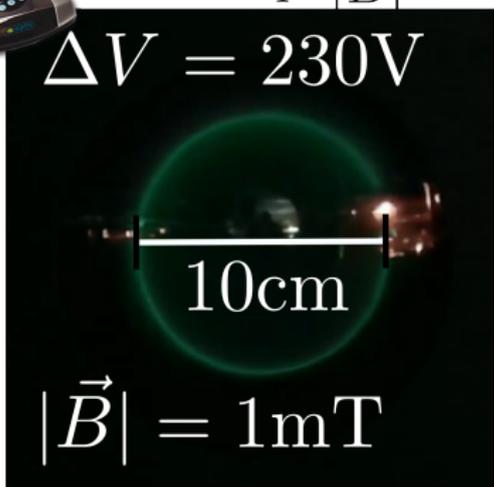

$$\begin{aligned}\frac{m|\vec{v}|^2}{2} &= q\Delta V \\ r^2 &= \left(\frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}\right)^2 \\ &= \frac{m}{q} \frac{2\Delta V}{|\vec{B}|^2}\end{aligned}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{2\Delta V}{|\vec{B}|^2 r^2}$$

Millikan:

$$q \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

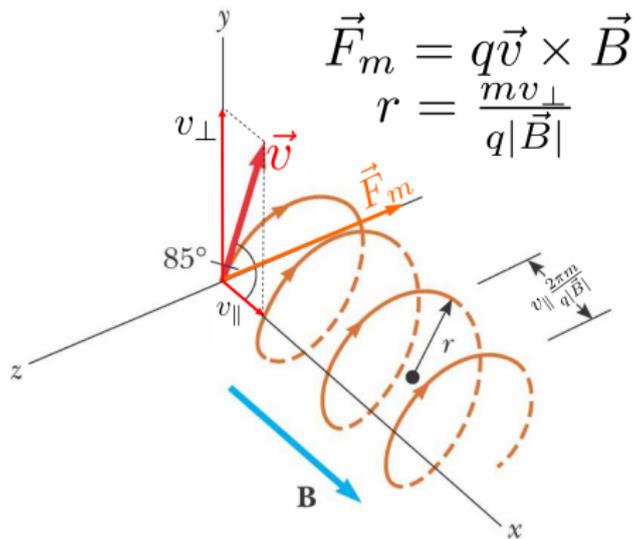
$$\Delta V = 230 \text{ V}$$



10cm

$$|\vec{B}| = 1 \text{ mT}$$

Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme general



En general, si r es pequeño frente al desplazamiento en un período, la trayectoria **promedio** de la partícula será aproximadamente la de una partícula con momento magnético $\vec{M} \approx \frac{\pi m |\vec{v}_{\perp}|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B}$.

Aplicaciones

Efecto Hall (1879)

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B}$$

$$I = qn\vec{v} \cdot \vec{S} \quad v_{\parallel} = \frac{I}{qn|\vec{S}|}$$

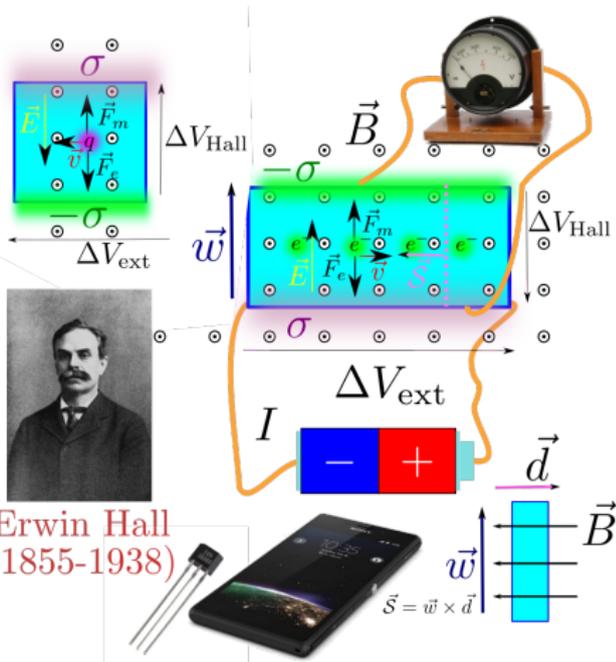
$$V_H = -\vec{E}_H \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= B_{\perp} v_{\parallel} |w| = \frac{B_{\perp} I |w|}{qn|\vec{S}|}$$

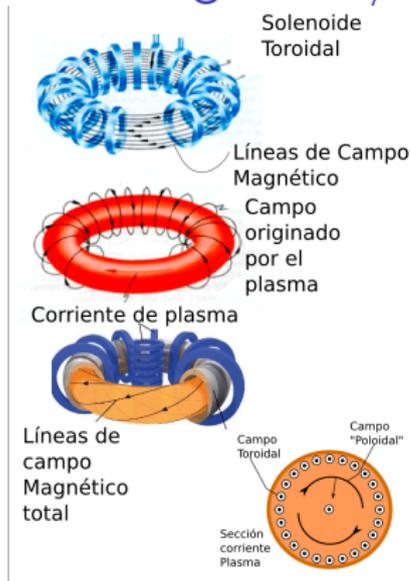
$$= \frac{B_{\perp} I}{qn|\vec{d}|} = R_H \frac{B_{\perp}}{|\vec{d}|} I$$

$$R_H = \frac{|\vec{E}_H|}{j_{\parallel} B_{\perp}} = \frac{1}{qn}$$

$$n = \frac{I}{qd} \left(\frac{\partial V_H}{\partial B_{\perp}} \right)^{-1}$$



Botella Magnética / Tokamak

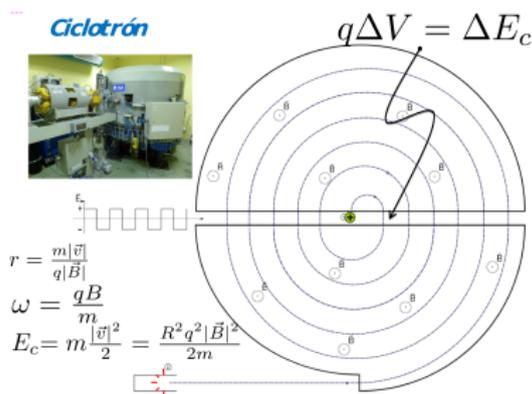


- ▶ Tokamak: acrónimo ruso de **Cámara Toroidal**.
- ▶ Permite contener un **plasma** (un gas de iones a muy alta temperatura).
- ▶ Fundamental en el desarrollo de la tecnología de **Fusión Nuclear**.
- ▶ Proyecto ITER: Se propone producir 500MW usando 50MW de potencia.
- ▶ China + Unión Europea + India + Japón + Korea + Rusia + USA
- ▶ 24×10^9 EUR.



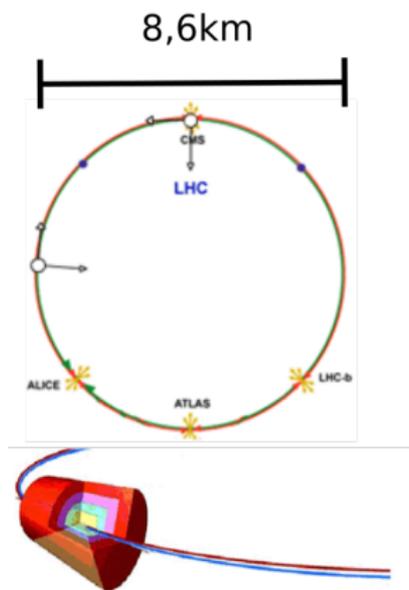
Ciclotrón (1930)

- ▶ Desarrollado por Ernest O. Lawrence.
- ▶ Es uno de los tipos más antiguos de aceleradores de partículas cargadas.
- ▶ Consta de dos placas semi-circulares huecas, sometidas a una diferencia de potencial alternante.
- ▶ Un campo magnético uniforme fuerza a las partículas a mantenerse en un movimiento circular.
- ▶ Si la frecuencia angular de la tensión alterna coincide con la **frecuencia de ciclotrón** $\omega = \frac{q|\vec{B}|}{m}$, la trayectoria de las partículas será una espiral de radio y velocidad



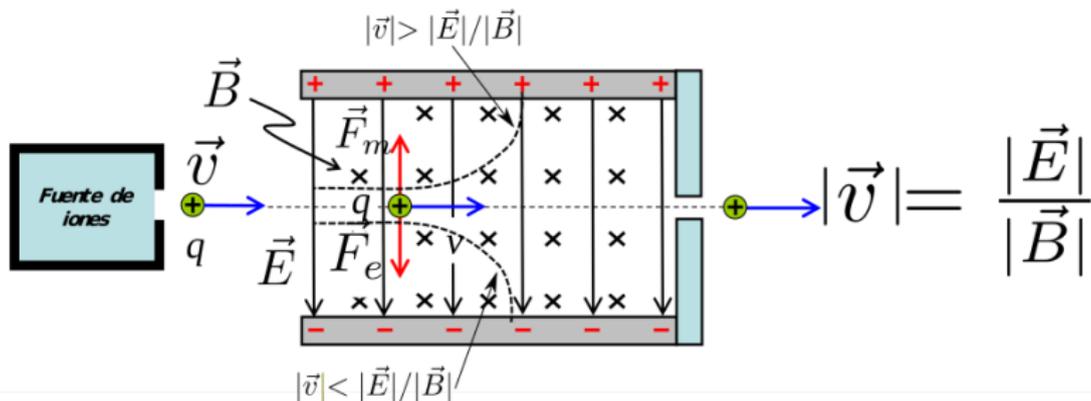
El Sincrotrón

- ▶ Al alcanzar velocidades próximas a las de la luz, la masa de las partículas comienza a crecer, con lo que la **frecuencia de ciclotrón** se ve alterada.
- ▶ Esto produce una pérdida en la condición de resonancia, con la consecuente reducción de la eficiencia.
- ▶ EL sincrotrón permite alcanzar energías relativistas ajustando la frecuencia del potencial de acelerado.
- ▶ El mayor Sincrotrón construido forma parte del LHC.
- ▶ Velocidades de $.999c$
- ▶ Construcción: $.3 \times 10^9$ EUR +
Operación: $.765 \times 10^9$ EUR/año.

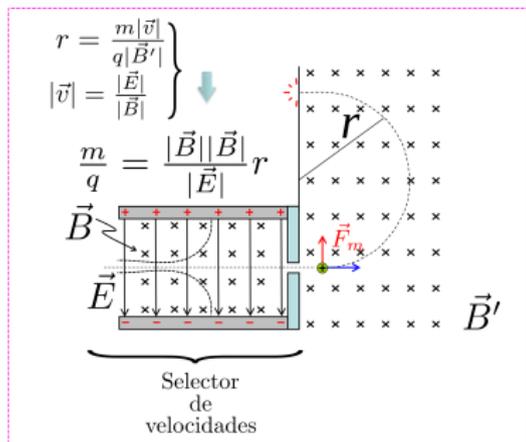


Selector de velocidades

$$q(\vec{E}_e + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$



Espectrómetro de Masas



- ▶ Cuando un átomo o molécula pierde algunos de sus electrones, queda eléctricamente cargado.
- ▶ El espectrómetro de masas es un dispositivo ideado para identificar y separar diferentes clases de átomos y moléculas presentes en una muestra, con diferente relación m/q .