

Clase 13 - Campo Magnético - Ley de Biot y Savart - Fuerza Magnética

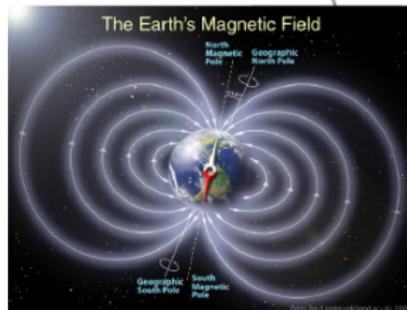
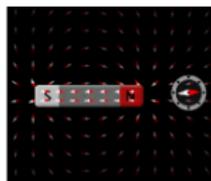
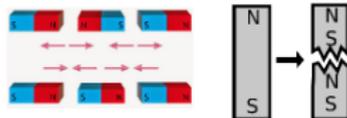
Prof. Juan Mauricio Matera

7 de octubre de 2024

Fenómenos Magnéticos

Hasta 1819 se sabía que

- ▶ existían materiales “imantados” (como la piedra imán) que atraían a ciertos metales.
- ▶ Una aguja **imantada**s tendían a alinearse en la dirección Norte-Sur en ausencia de otros imanes (brújulas).
- ▶ Los imanes naturales tienen dos polos, llamados “Norte” y “Sur”. Los polos iguales se repelen, y los polos distintos se atraen.
- ▶ No es posible **aislar** un polo: al romper un imán, cada fragmento tendrá también un **polo Norte** y un **polo Sur**
- ▶ El planeta tierra se comporta como un imán gigante, cuyos polos se encuentran aproximadamente alineados con los polos geográficos



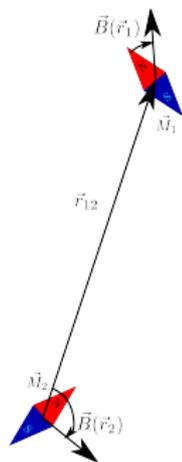
Interacción entre imanes

- ▶ Podemos representar a un material imantado como formado por **imanes elementales**, caracterizados por un **momento magnético** \vec{M} .
- ▶ Se verifica experimentalmente que el torque que **siente** un **momento magnético** \vec{M}_1 en presencia de otro \vec{M}_2 , se puede expresar como

$$\mathcal{T} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}_1 \times \frac{3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{M}_2)\hat{r}_{12} - \vec{M}_2}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Esta expresión es sospechosamente semejante a la del torque que el campo de un dipolo eléctrico ejerce sobre otro dipolo eléctrico!

- ▶ Aquí, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ es una constante de proporcionalidad llamada **Permeabilidad Magnética del vacío**.
- ▶ Con esta definición \vec{M} tendrá unidades de Am^2 .



- ▶ En presencia de una **distribución** general de dipolos, podemos expresar el torque que siente un momento magnético **de prueba** $\delta\vec{M}$ como $\mathcal{T} = \delta\vec{M} \times \vec{B}(\vec{r}_1)$ donde

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\hat{r}_{1k} \cdot \vec{M}_k)\hat{r}_{1k} - \vec{M}_k}{|\vec{r}_{1k}|^3}$$

donde la suma no incluye al momento $\delta\vec{M}$.

- ▶ Dada una distribución de momentos magnéticos, $\vec{B}(\vec{r})$ define un campo vectorial en todo el espacio: el **Campo Magnético**.
- ▶ Esta definición recuerda a la de **Campo Eléctrico** $\vec{F}_e = \delta q \vec{E}(\vec{r})$

Campo Magnético

- ▶ En general, definimos el **Campo magnético, Densidad de Flujo Magnético ó Campo de Inducción Magnética** \vec{B} en cada punto del espacio como un vector tal que, un **momento magnético de prueba** $\delta\vec{M}$ ubicado en ese punto siente un **torque** $\vec{\mathcal{T}}_{\vec{r}} = \delta\vec{M} \times \vec{B}$.
- ▶ Apunta en la dirección y sentido en que se alinea el momento magnético (de prueba) en forma **estable**.
- ▶ El módulo de \vec{B} es proporcional a la magnitud del torque.
- ▶ La fuerza que siente un **momento magnético** en presencia de ese campo magnético es $\vec{F} = \nabla(\vec{M} \cdot \vec{B})$

Unidades

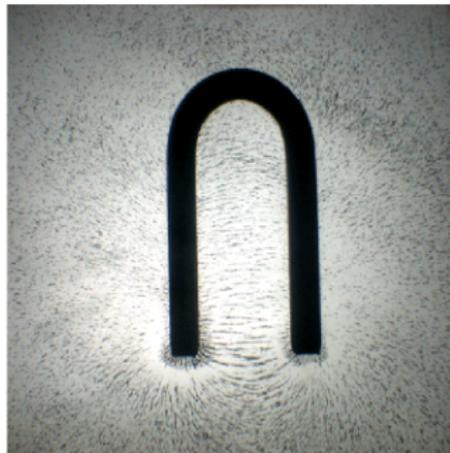
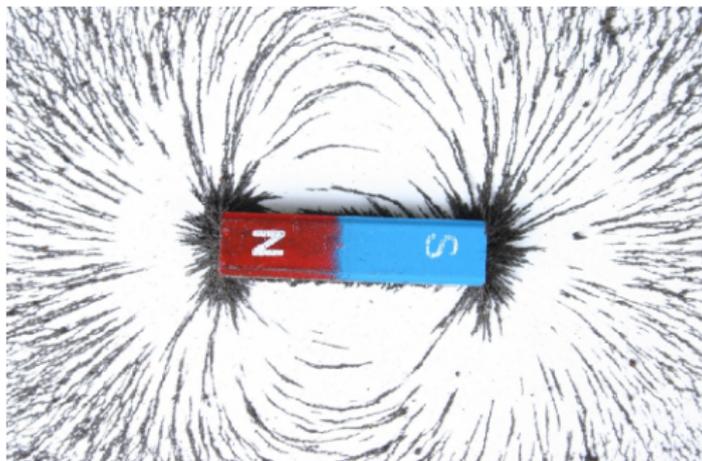
En el sistema internacional la intensidad del campo magnético se mide en Teslas ($T = \text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}$).

	Valores típicos
Enana Blanca	10kT
Acelerador de Partículas	10T
Resonancia Magnética	1,5T
Manchas Solares	1T
Imán Neodimio / Hard Disk	0,01T
Junto a un teléfono móvil	100 μ T
Superficie de la Tierra	50 μ T
Cerebro humano	10 ⁻¹³ T

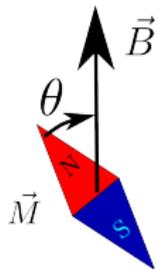
Otra unidad que se utiliza para la medida de intensidades de campos magnéticos es el Gauss ($G = 10^{-4}\text{T}$).

Líneas de Campo Magnético

- ▶ De manera análoga a como definimos las **Líneas de Campo Eléctrico**, definimos las **Líneas de Campo Magnético** como curvas tangentes al campo magnético.
- ▶ Por lo tanto, **nunca se cruzan entre sí**.
- ▶ Cruzan a los momentos magnéticos en dirección Sur-Norte.
- ▶ La densidad de líneas que atraviesan una región del espacio es proporcional a la intensidad del campo en ese punto.



Medida de la Magnitud del campo magnético



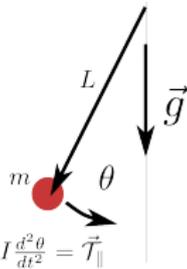
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \vec{\tau}_{\parallel}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -|\vec{M}||\vec{B}|\sin(\theta)$$

$$\approx -|\vec{M}||\vec{B}|\theta$$

$$\theta(t) \approx A \cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{|\vec{B}||\vec{M}|}{I}}$$



$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \vec{\tau}_{\parallel}$$

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mL|\vec{g}|L \sin(\theta)$$

$$\approx -m|\vec{g}|L\theta$$

$$\theta(t) \approx A \cos(\omega t)$$

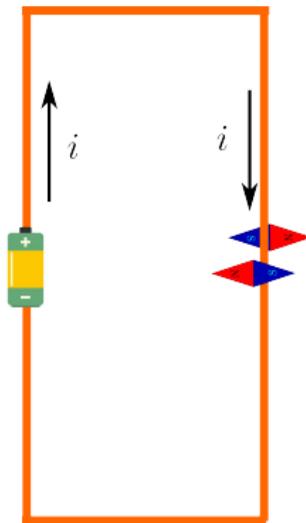
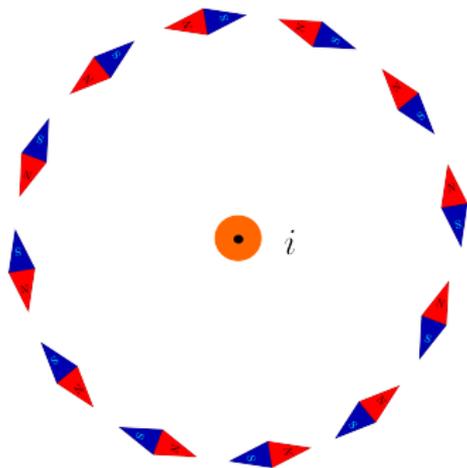
$$\omega = \sqrt{\frac{|g|}{L}}$$

Ley de Biot y Savart

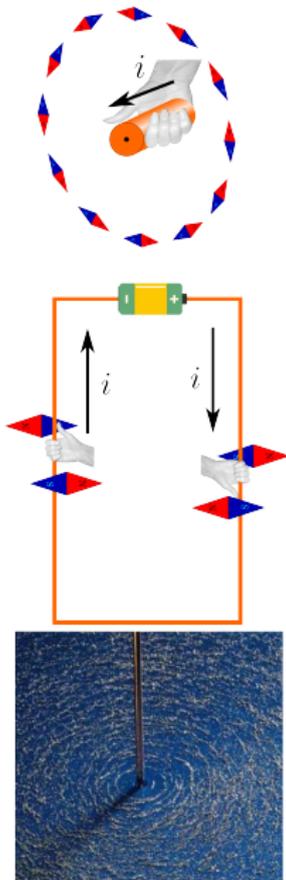
Experimento de Oersted (1819)

Descubre que la aguja de una brújula se desvía en presencia de corrientes eléctricas, del mismo modo que lo haría en presencia de un imán.

Realiza experiencias sobre la fuerza mutua entre conductores rectilíneos largos, en función de la corriente que llevan.



Hans Christian Oersted
(1777-1851)



Cerca del centro del alambre que lleva la corriente, el campo magnético

- ▶ yace sobre el plano perpendicular al alambre.
- ▶ es perpendicular a la dirección radial (las líneas de campo son circunferencias concéntricas con la corriente).
- ▶ su sentido obedece a la **regla de la mano de derecha**
- ▶ Su intensidad es inversamente proporcional a la distancia al alambre.
- ▶ su intensidad es proporcional a la corriente.

O, en forma sintética,

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{u}_{\parallel} \times \hat{r}}{|r|}$$

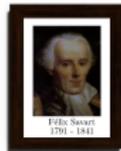
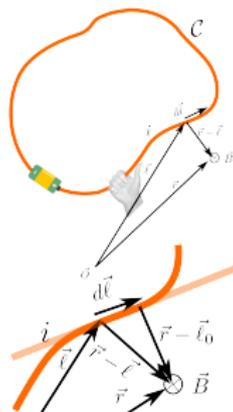
donde \hat{u}_{\parallel} es el **vector** en la dirección de avance de la corriente.

Ley de Biot y Savart (1820)

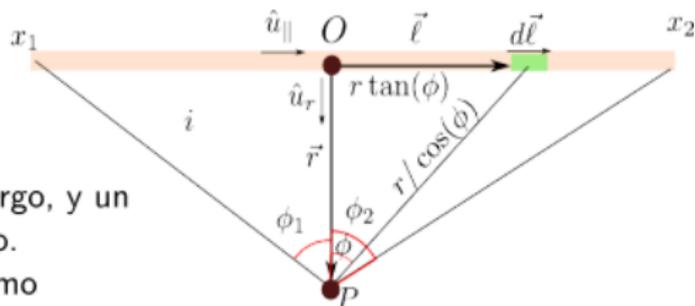
Biot y Savart generalizaron esta relación para corrientes a lo largo de curvas cerradas en general, en cualquier posición del espacio:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

que se reduce al resultado de Oersted si \vec{r} es cercano a algún punto del alambre que lleva la corriente. . .



Campo en presencia de una corriente rectilnea



Consideremos un alambre largo, y un punto P cercano a su centro.

Conviene parametrizar C como $\vec{\ell}(\phi) = r \tan(\phi) \hat{u}_{\parallel}$, de manera que

$$d\vec{\ell} = \frac{r d\phi}{\cos(\phi)^2} \hat{u}_{\parallel}.$$

$$\phi_i = \arctan(x_i/r)$$

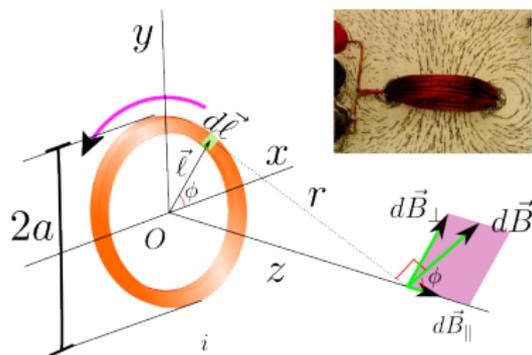
$$|x_i| \gg r \Rightarrow |\phi_i| \rightarrow \pi/2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\phi) d\phi = \sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2) = 2$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r \hat{u}_{\parallel}}{\cos(\phi)^2} \times \frac{(-r \tan(\phi) \hat{u}_{\parallel} + \vec{r}) d\phi}{(r/\cos(\phi))^3} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r \hat{u}_{\parallel}}{\cos(\phi)^2} \times (\vec{r}) d\phi \\ &= \frac{\mu_0 i \hat{u}_{\parallel} \times \hat{r}}{4\pi r} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos(\phi) d\phi \rightarrow \frac{\mu_0 i \hat{u}_{\parallel} \times \hat{r}}{2\pi r} \end{aligned}$$

Notar que el resultado no cambia si la curva es sólo aproximadamente recta dentro de una longitud $L \ll r$ alrededor del origen.

Campo de una espira circular sobre su eje



Con el eje z a lo largo del eje de simetría, y el origen en el centro de la espira, parametrizamos la curva \mathcal{C} como

$$\vec{\ell}(\phi) = a(\cos(\phi)\hat{u}_x + \sin(\phi)\hat{u}_y),$$
$$d\vec{\ell} = a(-\sin(\phi)\hat{u}_x + \cos(\phi)\hat{u}_y)d\phi,$$
$$-d\vec{\ell} \times \vec{\ell} = a^2\hat{u}_z d\phi$$

Debido a la simetría, el campo será paralelo al eje: $\mathbf{B}(z) = B(z)\hat{u}_z$, con

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\hat{u}_z \cdot d\vec{\ell} \times (z\hat{u}_z - \vec{\ell})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 d\phi}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi} \frac{2\pi}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} (i a^2 \pi) \frac{2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Campo de una espira cuadrada

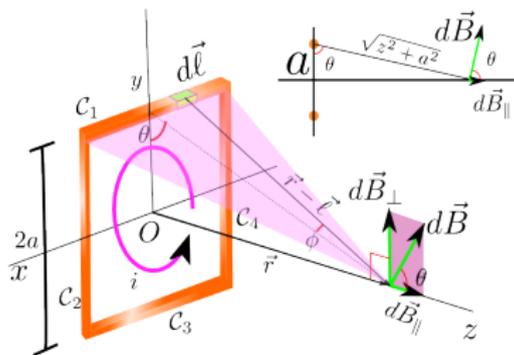
Para este caso, debemos descomponer la integral sobre la curva \mathcal{C} en sus cuatro lados $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^4 \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_m} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

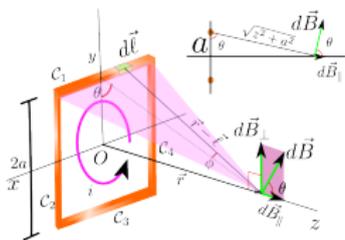
Debido a la simetría del problema,

- ▶ El campo magnético sólo puede tener componente sobre el eje de la espira
- ▶ La contribución en esa dirección de los cuatro lados son iguales.

$$B(z) = 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\hat{u}_z \cdot d\vec{\ell} \times (z\vec{u}_z - \vec{\ell})}{(z^2 + |\vec{\ell}|^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\hat{u}_z \cdot \vec{\ell} \times d\vec{\ell}}{(z^2 + |\vec{\ell}|^2)^{3/2}}$$



De esta manera,
 $\vec{B}(z) = B(z)\hat{u}_z$, con



Parametrizando

$$\vec{l} = -\sqrt{a^2 + z^2} \tan(\phi) \hat{u}_x + a \hat{u}_y,$$

$$d\vec{l} = -\frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\cos^2(\phi)} \hat{u}_x d\phi - \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \frac{a\sqrt{a^2 + z^2} / \cos^2(\phi) d\phi}{(\sqrt{a^2 + z^2} / \cos(\phi))^3}$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{\pi(a^2 + z^2)} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \cos(\phi) d\phi = \frac{2\mu_0 i a}{\pi(a^2 + z^2)} \sin(\phi_0)$$

$$= \frac{2\mu_0 i a}{\pi(a^2 + z^2)} \frac{a}{\sqrt{2a^2 + z^2}}$$

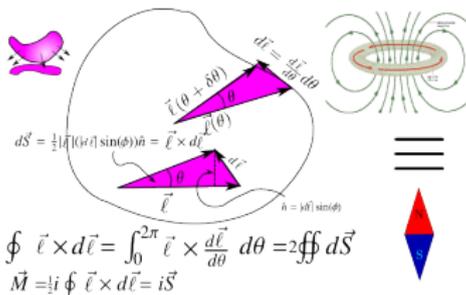
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} (4a^2 i) \frac{2}{(z^2 + a^2)\sqrt{2a^2 + z^2}}$$

Campo de una espira a grandes distancias

En el límite opuesto, si $|\vec{r}| \gg |\vec{\ell}|$ sobre toda la curva \mathcal{C} , se puede probar que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\hat{r} \cdot \vec{M})\hat{r} - \vec{M}}{r^3}$$

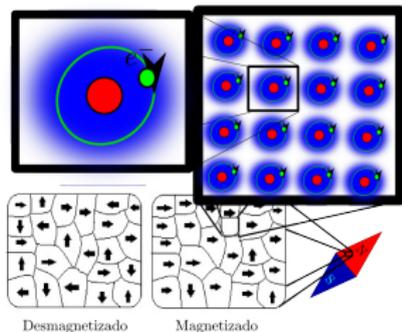
con $\vec{M} = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}} \vec{\ell} \times d\vec{\ell} = i \oint_{\mathcal{S}} d\vec{S} = i\vec{S}$, con \mathcal{S} cualquier superficie que tenga a \mathcal{C} como borde.



- ▶ Si \mathcal{C} yace en un plano, \vec{S} es perpendicular al plano, y su magnitud es el área de la superficie que encierra \mathcal{C} .
- ▶ El sentido de \vec{S} viene dado por la **regla de la mano derecha**.
- ▶ De esta manera, un lazo de corriente se comporta como un momento magnético \Rightarrow todo momento magnético **puede modelarse** como el resultado de

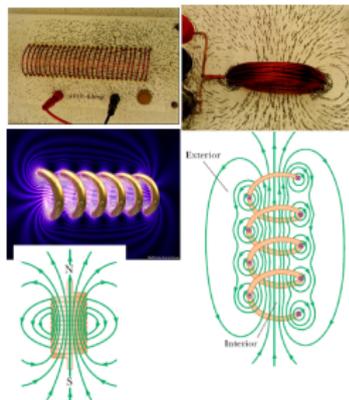
Origen microscópico del magnetismo

- ▶ Hoy sabemos que el origen del magnetismo en la materia son los momentos magnéticos atómicos.
- ▶ Típicamente, los electrones se mueven en forma errática dentro de sus orbitales: La corriente neta promedio es nula.
- ▶ En ciertas especies atómicas (como el *Fe* y el *Ni*, entre otros), la corriente media es no nula: cada átomo se comporta como un **momento magnético atómico**.
- ▶ A temperaturas suficientemente altas, la agitación térmica **desorganiza** estas corrientes y el magnetismo desaparece.
- ▶ Bajo el efecto de un campo externo, es posible “ordenar” los imanes atómicos: es el origen de la magnetización temporaria.



Bobinados y Solenoides

- ▶ El campo magnético que puede producirse mediante una espira está limitado por la intensidad máxima de corriente que es posible hacer circular por esta.
- ▶ En las aplicaciones, se logran campos mucho más intensos mediante alambres enrollados, compuestos por un gran número de espiras. De esta manera la intensidad del campo se multiplica por el número de espiras que componga al bobinado.
- ▶ Si el bobinado está enrollado en forma **helicoidal**, las líneas de campo en su interior son forzadas a mantenerse paralelas a su eje $\rightarrow \vec{B} \approx$ es uniforme en su interior. Decimos entonces que el bobinado es un **solenoides**.



Fuerza Magnética sobre corrientes

- ▶ Si un elemento de corriente es capaz de producir un campo magnético que ejerce torque sobre un momento magnético (y por lo tanto una fuerza), el principio de acción y reacción implica que en presencia de un campo magnético, una corriente debe estar sujeta a una fuerza. Es posible deducir por este camino que la fuerza que siente un elemento de conductor $d\vec{l}$ que transporta una corriente i será

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Definición de la unidad de corriente

Hasta el año 2019, en el sistema internacional se definía el Ampere A como aquella corriente que al circular por dos conductores rectilíneos paralelos, dá origen a una fuerza por unidad de longitud sobre los conductores de magnitud $2 \times 10^{-7} \text{N/m}$.

De esta definición se seguía el valor de la permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

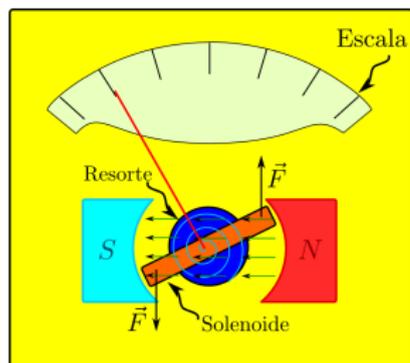
- ▶ A partir del 20 de mayo de 2019, la definición del A como unidad fundamental cambió, tomándose como unidad fundamental el Coulomb $[\text{C}] = \frac{e}{1.602176634 \times 10^{-19}}$ donde e es la *carga del electrón*.
- ▶ $[\text{A}]$ queda definido entonces como la corriente de un $[\text{C}]$ por $[\text{s}]$.
- ▶ Con esta redefinición, el valor de μ_0 es determinado experimentalmente.

Aplicaciones

Aplicación: Electroimanes

- ▶ Los electroimanes se utilizan en un amplio rango de aplicaciones, que van desde levantar chatarra, o producir los grandes campos magnéticos utilizados en dispositivos de imágenes médicas (RMN) (del orden de 1T), a los cabezales de escritura en el interior de los discos magnéticos (discos rígidos) del orden de centenas de G.
- ▶ En electricidad y electrónica se los utilizan para controlar interruptores y desacoplar circuitos.
- ▶ También los encontramos en dentro de los parlantes en auriculares y equipos de sonido, para la conversión de señales eléctricas en ondas sonoras.

Aplicación: El galvanómetro

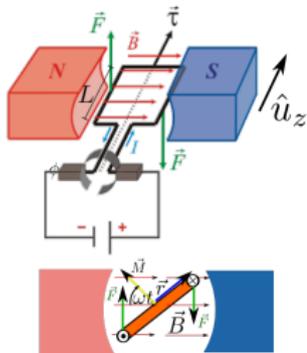


- ▶ Consiste en un solenoide acoplado a un muelle, en presencia de un campo magnético fijo, uniforme.
- ▶ Al circular una corriente por el solenoide, el torque debido a la fuerza magnética desplaza la posición de equilibrio del solenoide:

$$\vec{\tau}_{muelle} + \vec{\tau}_B = -k\delta\phi\hat{u}_z + 2iLrNB \cos(\delta\phi)\hat{u}_z$$

$$\text{luego, } i = \frac{k\delta\phi}{2LrNB \cos(\phi)} \approx \frac{k\delta\phi}{2LrNB}.$$

Aplicación: El motor eléctrico



$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= 2\vec{r} \times \vec{F} \\ &= 2riB|\sin(\omega t)|L\hat{u}_z\end{aligned}$$

- ▶ Los motores eléctricos convierten energía eléctrica en energía mecánica.
- ▶ La corriente eléctrica que circula por el bobinado interactúa con el campo de los imanes originando un torque.
- ▶ Ese torque es utilizado para impulsar diferentes dispositivos mecánicos.
- ▶ En los motores reales, se utilizan bobinados con muchas espiras, de manera que el torque resultante es proporcional al número de estas.
- ▶ La potencia mecánica del motor viene dada por

$$\begin{aligned}P &= \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} = (2riBL|\sin(\omega t)|)\omega = i \left| \frac{d}{dt} BS \right| \\ &= \left| \frac{d\vec{M} \cdot \vec{B}}{dt} \right| = \left| - \frac{d}{dt} U_M \right|\end{aligned}$$

donde identificamos a la potencial con el módulo de la derivada de la **energía potencial magnética**.