

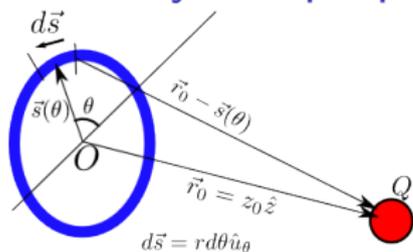
Clase 10 - Calculo de potenciales. Electroestática en presencia de conductores. Polarizabilidad.

Prof. Juan Mauricio Matera

16 de septiembre de 2024

Cálculo de potenciales y campos

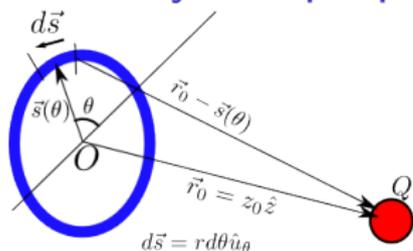
Potencial y campo por un anillo cargado



Podemos calcular el potencial sobre el eje del anillo notando que la contribución de cada elemento de carga al potencial va como

$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}}$, ya que todos los elementos están a la misma distancia. De esta manera, la integral es trivial:

Potencial y campo por un anillo cargado



Podemos calcular el potencial sobre el eje del anillo notando que la contribución de cada elemento de carga al potencial va como

$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}}$, ya que todos los elementos están a la misma distancia. De esta manera, la integral es trivial:

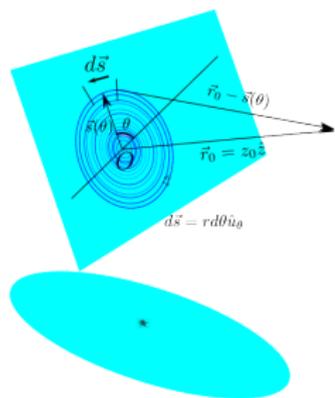
$$V(z) = \int_{\text{anillo}} dV = \int_{\text{anillo}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}}$$

Por la simetría del sistema, sabemos que el campo eléctrico sobre el eje sólo puede apuntar en la dirección de este. Por lo tanto,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = \frac{Qz\hat{z}}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

que es el resultado obtenido anteriormente (pero con más trabajo).

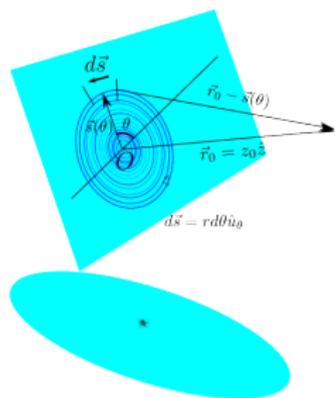
Disco y Plano Cargados



A partir del resultado para el potencial de un anillo, es posible calcular directamente el potencial debido a un disco cargado sobre su eje de simetría, como la integral de las contribuciones de muchos anillos:

$$\begin{aligned} V_{\text{disco}}(z) &= \int_{\text{anillos}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \int_0^a \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Disco y Plano Cargados



A partir del resultado para el potencial de un anillo, es posible calcular directamente el potencial debido a un disco cargado sobre su eje de simetría, como la integral de las contribuciones de muchos anillos:

$$\begin{aligned}V_{\text{disco}}(z) &= \int_{\text{anillos}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \int_0^a \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right)\end{aligned}$$

Luego, debido a la **simetría**,

$$\vec{E}(z) = -\nabla V = -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)$$

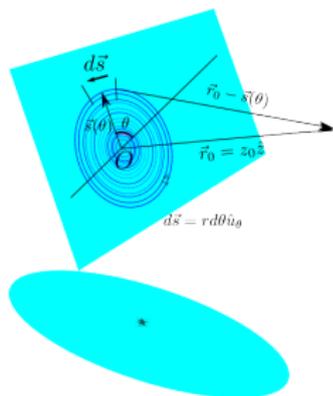
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

- ▶ El límite $a \rightarrow \infty$ en la expresión para el campo eléctrico es finito
- ▶ Esto no es así para el potencial: para todo z finito, V es infinito.
- ▶ Si **antes** de tomar el límite, fijamos el **referencial** en el origen,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z) &= V(z) - V(0) \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} - \sqrt{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$a \rightarrow \infty \quad \tilde{V}(z) \rightarrow \frac{-\sqrt{z^2}\sigma}{2\epsilon_0}.$$



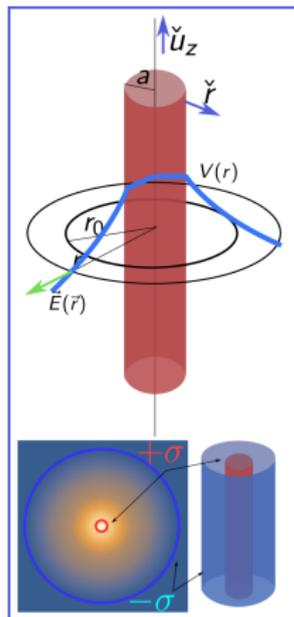
Este fenómeno ocurre en general con distribuciones de cargas no localizadas: las contribuciones provenientes de cargas arbitrariamente distantes no pueden despreciarse en la evaluación del potencial.

Potencial en simetría cilíndrica

- ▶ Potencial para un *tubo* de radio a . Debido a la simetría cilíndrica, $V(\vec{r}) = V(r)$ con $r = |\vec{r} \times \check{u}_z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- ▶ Proponemos
$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(r_0 / \max(r, a)).$$
- ▶ Verificamos que para $r \neq a$, $\nabla^2 V = 0$.
- ▶ Referencial en r_0
- ▶ Vía la ley de Gauss y $\vec{E} = -\nabla V$, $\lambda \rightarrow$ *densidad lineal de carga*.
- ▶ Distribuciones más generales vía superposición:

$$V(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma(r') r' \log\left(\frac{r_0}{\max(r, r')}\right) dr'$$

- ▶ $r_0 \neq 0!$

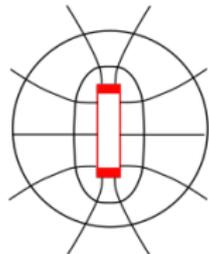
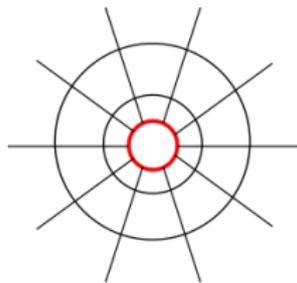


Campos y potenciales en conductores cargados

- ▶ Hasta ahora tratamos el problema electrostático asumiendo dada la distribución de cargas.
- ▶ En presencia de conductores, la distribución de carga se *acomoda* para que el potencial en su seno sea constante (condición de equilibrio).
- ▶ El potencial electrostático queda completamente determinado dada la distribución de las cargas “libres” y los potenciales relativos de los conductores.
- ▶ En ausencia de cargas externas, se reduce a determinar las soluciones del *Problema de Laplace* $\nabla^2\phi = 0$.
- ▶ En general, encontrar las soluciones de este problema requiere de técnicas avanzadas.
- ▶ Por ahora, nos vamos a concentrar en algunos casos y técnicas simples.

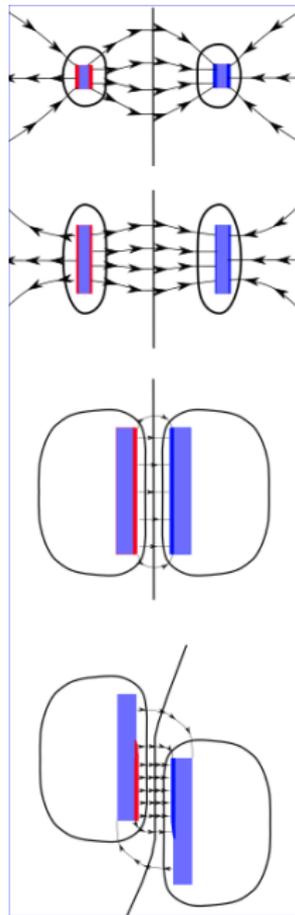
Un conductor cargado

- ▶ Podemos analizar cualitativamente la situación utilizando el concepto de *superficies equipotenciales*.
- ▶ A grandes distancias, debe lucir como una carga puntual.
- ▶ Las superficies equipotenciales no se cortan entre sí, y envuelven al conductor.
- ▶ Debe presentar las mismas simetrías que los conductores.
- ▶ Las líneas de campo deben ser normales en la superficie del conductor.



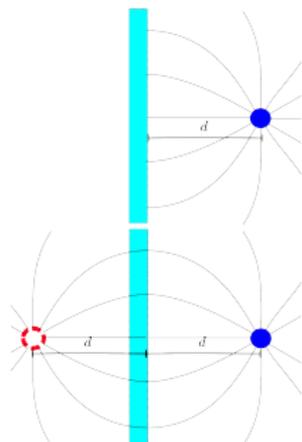
Dos conductores planos enfrentados con cargas opuestas

- ▶ De la misma manera, podemos analizar el caso de dos conductores con cargas opuestas.
- ▶ A grandes distancias, debe lucir como un *dipolo eléctrico*



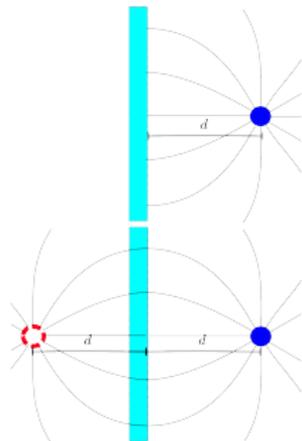
Carga frente a un plano: el método de las imágenes

- ▶ Una técnica más analítica, aplicable en algunos casos, es “reciclar” soluciones obtenidas para distribuciones de carga fijas, que generen equipotenciales sobre la superficie de un conductor.
- ▶ Por ejemplo, si queremos anular el potencial en el entorno de un plano conductor, generado por una carga puntual, podemos “simularlo” con el potencial de una carga puntual de carga “opuesta”.



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}'|} \right) & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

- ▶ La carga original experimentará una fuerza debida al plano que es idéntica a la ejercida por la carga “imagen”.
- ▶ Notar que el potencial dentro del conductor es nulo.
- ▶ La densidad superficial de carga es proporcional al campo sobre la superficie.
- ▶ Ejercicio: mostrar que la carga neta inducida es igual en magnitud y opuesta a la carga exterior.
- ▶ Usando el principio de superposición, es posible resolver el problema para distribuciones de carga más generales.



Esfera conductora en un campo externo

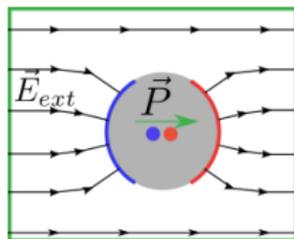
- ▶ Potencial de un campo uniforme:
 $V_{ext}(\vec{r}) = -Ez = -Er \cos(\theta)$
- ▶ El potencial de un dipolo en el origen, en la dirección del campo

$$V_D(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- ▶ La superposición de los dos potenciales resulta en

$$V(\vec{r}) = \frac{p - E4\pi\epsilon_0 r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\theta)$$

- ▶ Eligiendo $p = Ea^3$ el potencial se anula sobre la superficie de la esfera de radio a : En presencia de un campo externo uniforme, la esfera adquiere un momento dipolar $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E} = 3\epsilon_0 \mathcal{V} \vec{E}$ con $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi a^3$ el volumen de la esfera.

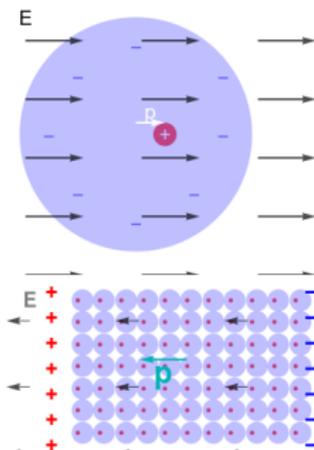


Dieléctricos

- ▶ Decimos que un material es un **dieléctrico** o **aislante** si las cargas eléctricas no pueden desplazarse libremente en su interior.
- ▶ Cuando un **dieléctrico** es sometido a un campo eléctrico externo, los átomos que lo componen sufren una redistribución de carga.
- ▶ Como resultado, estos resultan **polarizados**.
- ▶ El **momento dipolar inducido** por el campo sobre un **diferencial de volumen** viene dado por

$$d\vec{p} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} dV$$

donde χ_E es la **polarizabilidad** del medio y \vec{E} es el campo eléctrico *total*.
 $\nabla \cdot \vec{p} = -\rho_{pol}$, la contribución a la **densidad de carga** del material.



De la **ley de Gauss**,

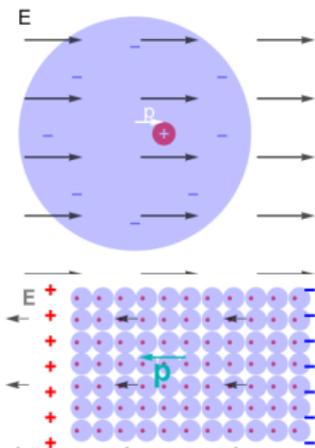
$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{p} = -\epsilon_0 \chi_E \nabla \cdot \vec{E} = -\chi_E \rho_{total}$$

- ▶ La densidad de carga libre viene dada por $\rho_{libre} = (1 + \chi_E) \rho_{total}$. Luego, la densidad de carga *libre* se relaciona con \vec{E} según

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon}$$

con $\epsilon = (1 + \chi_E) \epsilon_0$ la **Constante Dieléctrica** del material.

- ▶ La constante $\epsilon > \epsilon_0$ depende de (la polarizabilidad de) el material.



Desplazamiento Eléctrico

- ▶ El efecto del dieléctrico se reduce a modificar **localmente** la ley de Gauss para las cargas libres.
- ▶ En la literatura, se suele introducir el vector $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ al que se lo llama **vector de desplazamiento eléctrico**, que satisface

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Valores típicos de la constante dieléctrica

Material	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Aire	1,0005 (CNPT)
Agua	80 (20°C)
Aceite	2,8
Parafina	2,1
Vidrio	5,6 – 10
Diamante	5,5 – 10
PVC	30 – 40

Ejercicios

1. Mostrar que una distribución de carga superficial sobre un cilindro genera un potencial de la forma
$$V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(r_0/|\vec{r} \times \check{u}_z|)$$
2. Un cable coaxial consiste de un alambre conductor cilíndrico de diámetro d , recubierto por una capa de aislante de espesor a , que a su vez está recubierto por una película conductora de espesor despreciable. Suponiendo que el conductor interior tiene una densidad lineal de carga λ , y el conductor exterior está conectado a tierra, determine el potencial y el campo en todo el espacio. ¿Cuál es la capacidad del cable por unidad de longitud?
3. Una carga Q se localiza a una distancia D de un plano conductor. Utilizando el método de las imágenes a) mostrar que la carga neta inducida sobre la superficie es $-Q$ b) determinar la energía electrostática de una carga Q localizada a una distancia D de un plano conductor.