

Clase 09 - Potencial Electrostático. Energía Potencial Electrostática.

Prof. Juan Mauricio Matera

13 de septiembre de 2019

El potencial electrostático

El campo electrostático es **Conservativo**

- ▶ Una forma conveniente de expresar el campo de una carga puntual es en términos del **gradiente** de una función escalar:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\nabla \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

(recordemos que $\nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$ y que $\nabla\phi(|\vec{r}|) = \phi'(r)\hat{r}$)

- ▶ Que un campo vectorial \vec{W} pueda expresarse como el gradiente de una función escalar ϕ tiene como consecuencia que, para cualquier curva \mathcal{C} que inicia en el punto \vec{r}_i y termina en el punto \vec{r}_f

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} -\nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(\vec{r}_i) - \phi(\vec{r}_f)$$

- ▶ Además, si \mathcal{C} es una curva cerrada, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = 0$
- ▶ Decimos por lo tanto que tal campo es **Conservativo**
 - ▶ $\int_a^b \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \phi(a) - \phi(b)$ independiente del camino.
 - ▶ $\nabla \times \vec{W} = 0$ (campo longitudinal).

Potencial electrostático

- ▶ Partiendo de que el **campo electrostático** de una carga puntual es **conservativo**, vemos que (por el **principio de superposición lineal**) el **campo electrostático** debido a **cualquier** distribución de cargas también lo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

$$\text{con } V(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')d^3r'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

- ▶ Llamamos a $V(\vec{r})$ el potencial electrostático asociado a \vec{E} referido a ∞ .
- ▶ En términos del campo eléctrico, podemos expresar esta función como la integral de línea

$$V(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

para una curva que conecta un punto *infinitamente lejano* con \vec{r} .

Referenciales

- ▶ La función

$$V_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$$

también satisface

$$\vec{E} = -\nabla V_{\vec{r}_0}$$

- ▶ Llamamos a $V_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$ el *potencial de \vec{E} referido a \vec{r}_0* y a \vec{r}_0 el *referencial*.

Interpretación física

$$\begin{aligned}W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\&= \int_C -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\&= q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) \\ \Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i) &= V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)\end{aligned}$$

La **diferencia de potencial** entre dos puntos es el **trabajo cuasi-estático por unidad de carga**, requerido para arrastrar **en contra del campo eléctrico** una carga de prueba δq a lo largo de una curva que una esos puntos.

- ▶ Identificamos entonces a $-q\Delta V(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$ con el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga que se desplaza entre esos puntos.
- ▶ En ausencia de otras fuerzas, $W_E = q\Delta V(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$ es igual al cambio en la energía cinética de una partícula al moverse del punto \vec{r}_i al punto \vec{r}_f .

Unidades y medida de diferencias de potencial

- ▶ La unidad de diferencia de potencial en el sistema internacional es el **Volt** $V = \text{Joule Coulomb}^{-1}$.
- ▶ Las diferencias de potencial se miden con instrumentos llamados **Voltímetros**



- ▶ Observe que un **voltímetro** necesita **dos** terminales: una a ubicar en \vec{r}_i (el cable negro) y otra en \vec{r}_f (cable rojo).

La ecuación de Poisson

- ▶ Debido a la **Ley de Gauss**, el potencial electrostático satisface la **Ecuación de Poisson**:

$$-\nabla^2 V = \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

donde ∇^2 es el **Operador Laplaciano** $\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$ Ver clase 4

- ▶ Las soluciones de la ecuación de Poisson en una región son únicas dadas ρ y el valor de V sobre *su borde*.

Superficies Equipotenciales

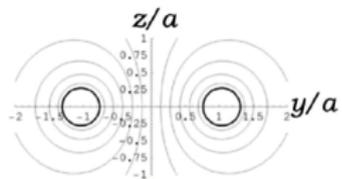
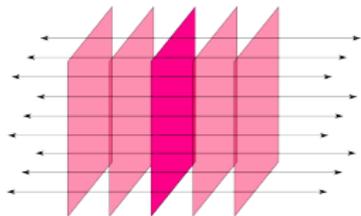
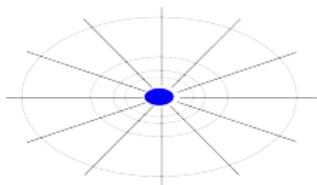
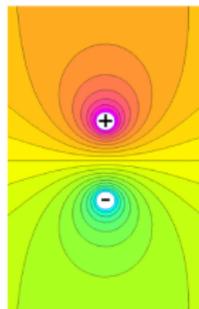
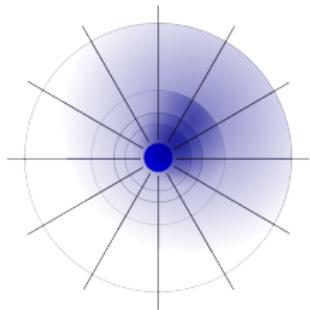
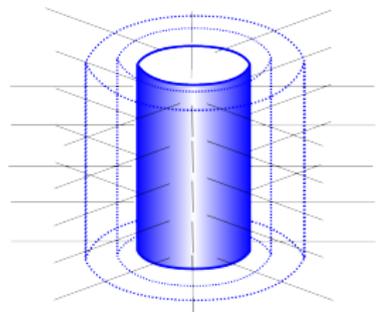
Definición

Una superficie equipotencial es el **lugar geométrico** formado por los puntos del espacio donde el **potencial electrostático** toma un valor constante.

▶ Propiedades

- ▶ Son ortogonales al campo electrostático \Rightarrow son cruzadas ortogonalmente por las líneas de campo electrostático.
- ▶ Toda superficie equipotencial cerrada, encierra una cierta cantidad de carga neta.
- ▶ Se hacen más próximas donde el campo es más intenso.
- ▶ Alrededor de una carga puntual, tienden a la forma esférica concéntrica a la carga.
- ▶ Para una distribución localizada con carga neta no nula, tienden a una forma esférica para distancias grandes a la distribución.
- ▶ Los conductores definen **volumenes equipotenciales**: cualquier superficie interior a un conductor es una equipotencial.

Ejemplos

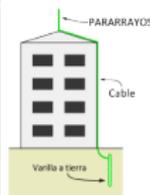
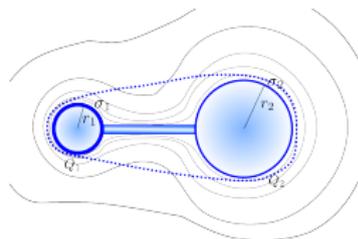


Efecto punta

- ▶ Sobre la superficie de un conductor, la densidad de carga superficial es **inversamente proporcional** al radio de curvatura.
- ▶ Como consecuencia de esto, los campos sobre la superficie de un conductor son más intensos cerca de las **puntas** de un conductor.

Consideremos dos esferas conductoras de radios r_1 y r_2 , alajeadas entre sí, y unidas por un hilo delgado.

- ▶ Ambas esferas están al mismo potencial $V_1 = V_2$
- ▶ La distribución de cargas sobre cada una de ellas no es influenciada por la otra (simetría esférica). Luego,
$$V_i = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \text{ (referido a infinito)}$$
- ▶ $\Rightarrow \frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}$. La carga neta es



Conexión a tierra

- ▶ La **conexión a tierra** puede considerarse un caso extremo del **efecto punta**: al conectar un conductor a otro enormemente más grande (la tierra) todas las cargas se escapan a este último, dando como resultado un potencial nulo.

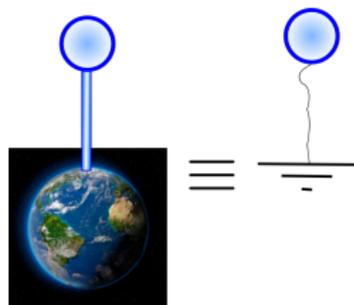
- ▶ La carga total se conserva:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \text{cte.}$$

- ▶ $\Rightarrow Q_i = Q_T \frac{r_i}{r_1 + r_2}$.

- ▶ Si $r_2 \rightarrow \infty$,

$$Q_1 \rightarrow 0 \Rightarrow V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \rightarrow 0 \text{ (referido a infinito).}$$



Energía Electroestática

Energía Electroestática de un sistema de cargas puntuales

Dada una cierta distribución de **cargas puntuales** $\{q_i\}$ ubicadas en los puntos \vec{r}_i podemos calcular el trabajo mínimo necesario para producirla, suponiendo que traemos las cargas que la forman **una a una** desde el infinito. Este trabajo será la suma de los trabajos W_i requeridos para traer la partícula i -ésima desde infinito hasta su posición. De esta manera la **energía potencial electrostática** U_{pe} de un sistema de cargas puntuales viene dada por

$$U_{pe} = \sum_i W_i$$

$$W_i = q_i V_i(\vec{r}_i) \quad V_i(\vec{r}_i) = \sum_{j < i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Luego,

$$U_{pe} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Densidad de Energía Electroestática

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') d^3r d^3r'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \\&= \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d^3r \quad \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \\&= \frac{1}{2} \int -\epsilon_0 V(\vec{r}) \nabla^2 V(\vec{r}) d^3r \quad -V \nabla^2 V = \nabla \cdot (-V \nabla V) + |\nabla V|^2 \\&= \frac{1}{2} \int \epsilon_0 |\nabla V|^2 d^3r + \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \nabla \cdot (-V(\vec{r}) \nabla V(\vec{r})) d^3r \\&= \int \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} d^3r \quad \nabla V = -\vec{E} \quad \text{"Término de borde"}\end{aligned}$$

Por este motivo, se suele denominar a $\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2}{2}$ la **densidad de energía electrostática**.

Energía de interacción

- ▶ Para un sistema formado por varias distribuciones de carga localizadas,

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \rightarrow U = \sum_i U_i + \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

- ▶ $U_i = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i$ es la *autoenergía*
- ▶ $U_{i \neq j} = \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$ es la *energía de interacción*.
- ▶ En la práctica, si la distribución dentro de una carga localizada no cambia, sólo importa la *energía de interacción*:
- ▶ La energía asociada a una carga puntual es *infinita*, pero no *cambia* en el tiempo.
- ▶ Podemos asumir que en lugar de una carga puntual, la carga se distribuye uniformemente en una esfera de radio pequeño. Llamamos *radio clásico* de una partícula de masa m al radio a tal que $\int U(r_c) d^3r = mc^2$

Para un electrón $r_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{m}$

¿Cuánto vale para un protón?
¿Y para un neutrón?

Potencial y campo de un dipolo

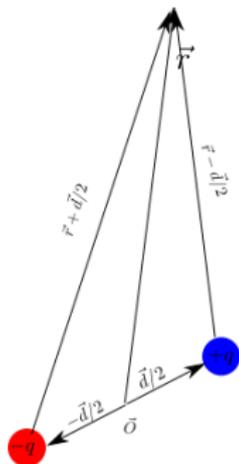
El concepto de potencial electrostático nos dá una herramienta muy útil a la hora de calcular campos eléctricos, ya que nos evita trabajar con **magnitudes vectoriales** en los pasos intermedios del cálculo. La estrategia consiste en:

- ▶ Construir los potenciales de las cargas individuales que forman la distribución de carga.
- ▶ Sumarlos (integrarlos) todos.
- ▶ Calcular el campo como $-\nabla V$.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Potencial de un dipolo eléctrico

$$\begin{aligned}V(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{d}/2|} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + \vec{d}/2|} \\&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(|\vec{r} - \vec{d}/2|^{-1} - |\vec{r} + \vec{d}/2|^{-1} \right) \\&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(1 + \frac{|\vec{d}|^2}{4r^2} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^{-1/2} - \right. \\&\quad \left. \left(1 + \frac{|\vec{d}|^2}{4r^2} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^{-1/2} \right) \\&\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} \right) \right) \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$



con $r = |\vec{r}|$, donde usamos que
 $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \dots$

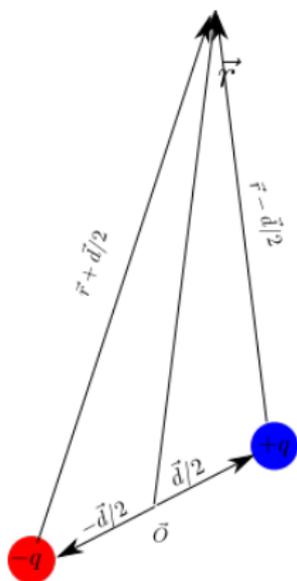
Campo Eléctrico del dipolo

Calculando (menos) el gradiente del potencial, recuperamos la expresión para el campo eléctrico del dipolo:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{r} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

donde usamos que $\nabla f(|\vec{r}|) = f'(|\vec{r}|)\hat{r}$ y $\nabla \vec{p} \cdot \vec{r} = \vec{p}$.

- ▶ Notamos que es la expresión que adelantamos en clases anteriores.
- ▶ La misma se podría haber construido directamente sumando los campos y desarrollando (pero al ser vectores era más laborioso).



Ejercicios

1. Dada una carga Q , determine el potencial y el campo en todo el espacio asumiendo que la carga se distribuye a) uniformemente sobre una superficie esférica de radio a . b) uniformemente en la superficie de esa esfera c) con una densidad volumétrica $\rho(r) \propto e^{-r/a}$.
2. Calcule la energía electrostática de las tres distribuciones y determine cuál es la configuración de menor energía.