Clase 08 - Campo Eléctrico. Ley de Gauss.

Prof. Juan Mauricio Matera

09 de septiembre de 2024

Campo Eléctrico.

Definiciones

- **Carga de prueba**: una carga idealmente "puntual" (pequeña frente a cualquier otra escala del sistema), de un valor lo bastante pequeño como para no perturbar el **equilibrio** de la distribución de cargas.
- **Campo eléctrico**: Es un vector $\vec{E}(\vec{r})$ que podemos asignar a cada punto del espacio, tal que la fuerza que siente una carga de prueba δq, ubicada en la posición $\vec{r}$ satisface $\vec{F}_{\delta q} = \delta q \vec{E}(\vec{r})$ Dada una distribución de cargas, el **campo eléctrico** en un punto existe independientemente de la presencia o no de una carga de prueba

- El campo eléctrico de una carga puntual q ubicada en un punto $\vec{r}$ será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

En este punto, introducimos la constante $\varepsilon_0 = 8,85\mathrm{pFm}^{-1} = \frac{1}{4\pi k}$ llamada **permitividad del vacío**

- Por su definición, el campo eléctrico satisface el **principio de superposición lineal**: El campo en presencia de dos distribuciones de carga es la suma de los campos que generarían las distribuciones por separado.

¿Por qué introducir el concepto de Campo eléctrico?

El campo eléctrico nos permite separar -formalmente- el problema de evaluar las interacciones en un sistema de cargas en dos pasos:

- Calcular el campo generado por la distribución de cargas (excepto potencialmente aquella sobre la que queremos calcular la fuerza.
- Calcular la fuerza que ejerce el **campo** sobre cada partícula.

Veremos más adelante que más allá de proveer una herramienta matemática, conviene pensar al campo eléctrico como un **ente físico independiente**, que es afectado por la presencia de cargas eléctricas, y que a su vez afecta el movimiento de estas.

Valores típicos del campo eléctrico

El campo eléctrico se mide en $\mathrm{Newton}/\mathrm{Coulomb}$. Algunos valores típicos típicos son

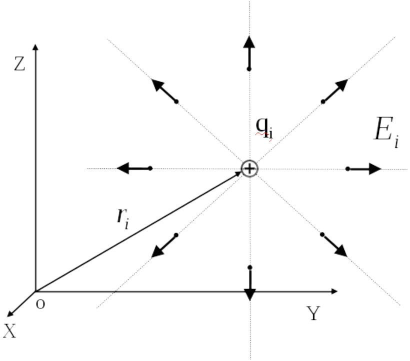
Medio	$\lvert\vec{E}\rvert$ (N/C)
Atmósfera limpia	100
Vidrio Frotado	1×10^3
Fotocopiadora	1×10^5
Nube de Tormenta	1×10^5
Chispa en el aire	5×10^6

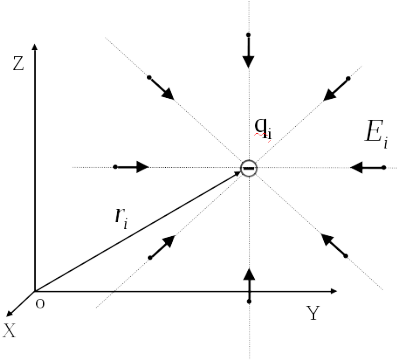
- Carga del electrón $1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$
- Carga total sobre la superficie del Van der Graff: $q \approx 10\mathrm{nC} - 1\mu\mathrm{C}$

Campo Eléctrico de una Carga Puntual

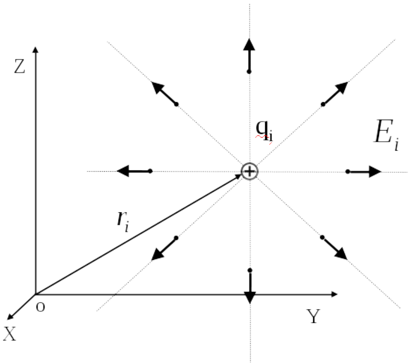
A partir de la Ley de Coulomb, el campo eléctrico de una carga puntual de magnitud q, ubicada en $\vec{r}_0$ viene dado por

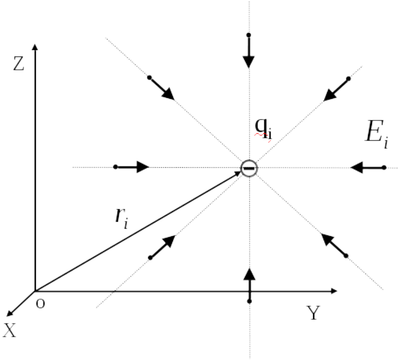
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$



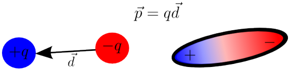


- $\vec{E}(\vec{r})$ apunta en la dirección de la carga puntual que le da origen.
- Si la carga es positiva, $\vec{E}(\vec{r})$ apunta en el sentido que se **aleja** de la carga, y si es negativa, en el sentido que apunta **hacia** la carga.
- La magnitud del campo cae como la inversa al cuadrado de la distancia a la carga.





Campo Eléctrico de dos cargas puntuales: el **dipolo eléctrico**



Veremos más adelante que el campo eléctrico de un dipolo puede expresarse como

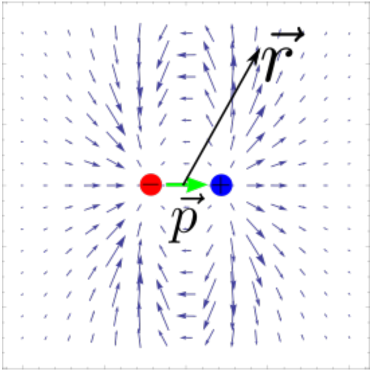
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

- **momento dipolar eléctrico** definido por $\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$.

- **Dipolo eléctrico** (ideal): dos cargas puntuales de igual magnitud y diferente signo separadas por una distancia pequeña respecto a la distancia de observación.
- El **momento dipolar eléctrico** es una magnitud **vectorial**.
- **momento dipolar** de una **distribución de carga continua**

$$\vec{p} = \int_{\mathcal{R}} \rho(\vec{r})\vec{r}\,d\mathcal{R}\,.$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

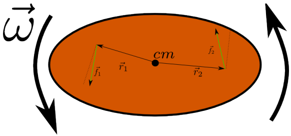


- Simétrico respecto al eje de simetría.
- En el plano perpendicular, el campo apunta en la dirección opuesta a $\vec{p}$
- Sobre el eje del dipolo, el campo apunta siempre en la dirección de $\vec{p}$ y a distancias iguales, tiene el doble de magnitud que sobre el plano perpendicular.
- La magnitud del campo decae como $1/r^3$.

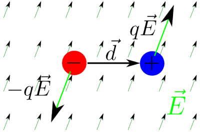
Aplicaciones

- El dipolo eléctrico es el **modelo** más sencillo de un sistema cuya **carga neta es cero**, con una **distribución de carga** no trivial.
- En presencia de campos externos, los materiales sufren redistribuciones de cargas, que dan lugar a momentos dipolares, proporcionales a la intensidad del campo externo: se **polarizan**.
- El **torque** sobre un dipolo dá información sobre la intensidad y la dirección del campo en el que está inmerso. Este viene dado por

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{p} \times \vec{E}$$



$$\frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i \qquad \vec{P}_{cm} = m\vec{v}_{cm}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{T}}_i \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$
$$\vec{\mathcal{T}}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$



$$\sum_i \mathcal{T}_i = \frac{\vec{d}}{2} \times (q\vec{E}) - \frac{\vec{d}}{2} \times (-q\vec{E}) = \vec{p} \times \vec{E}$$

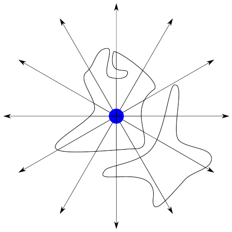
Líneas de Campo Eléctrico

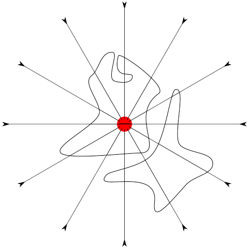
- Son curvas en el espacio que son **tangentes** al campo eléctrico en cada punto por el que pasan.
- La **densidad de líneas** es proporcional a la magnitud del campo eléctrico.
- Son una forma alternativa de representar al campo eléctrico.
- Son un recurso útil para estimar *cualitativamente* el campo eléctrico en torno a una distribución de cargas.
- En general, no coinciden con las trayectorias de las partículas cargadas.
- Las líneas de campo presentan las mismas simetrías que el sistema que las produce.

Reglas para dibujar líneas de campo

- Las líneas “salen” de las cargas positivas y “entran” en las negativas.
- El número de líneas que entran o salen es proporcional al valor de la carga
- Las líneas se dibujan simétricamente.
- La densidad de las líneas es proporcional a la intensidad del campo eléctrico.
- Las líneas de campo no se cortan entre sí.
- Cerca de una carga puntual, y a grandes distancias de las distribuciones de carga, la distribución de líneas de campo debe ser homogenea.

Líneas de campo en torno a una carga puntual



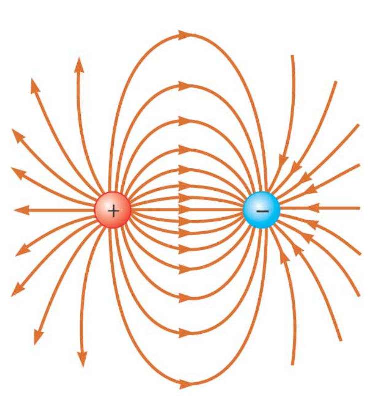


- Son radiales
- **Salen** de las cargas positivas, y **Entran** en las negativas
- Están **distribuídas uniformemente** en todas las direcciones.
- En cualquier superficie cerrada que **no** contiene a la carga, el número de **líneas** de campo que la **cruzan en dirección saliente** es igual al número que la **cruza en dirección entrante**.
- En cualquier **superficie cerrada** que contenga a la carga, el número de **líneas** de campo que la cruzan en dirección **saliente menos** el número que la cruza en **dirección entrante** es *constante*.

Líneas de campo eléctrico en torno a un dipolo

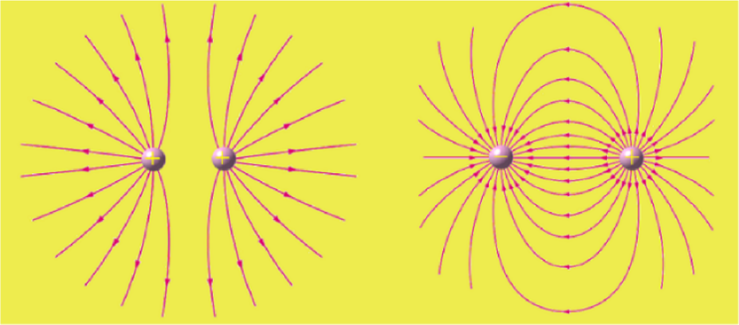
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

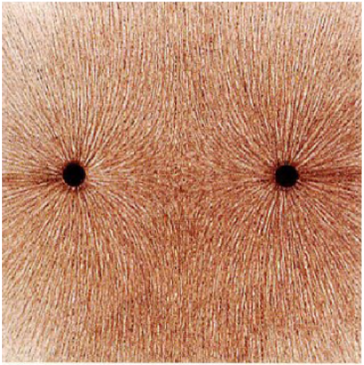
Nótese que al alejarnos del dipolo, el número de líneas de campo salientes se reduce, ya que estas “vuelven” a la carga negativa.

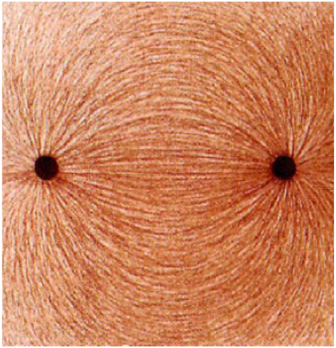


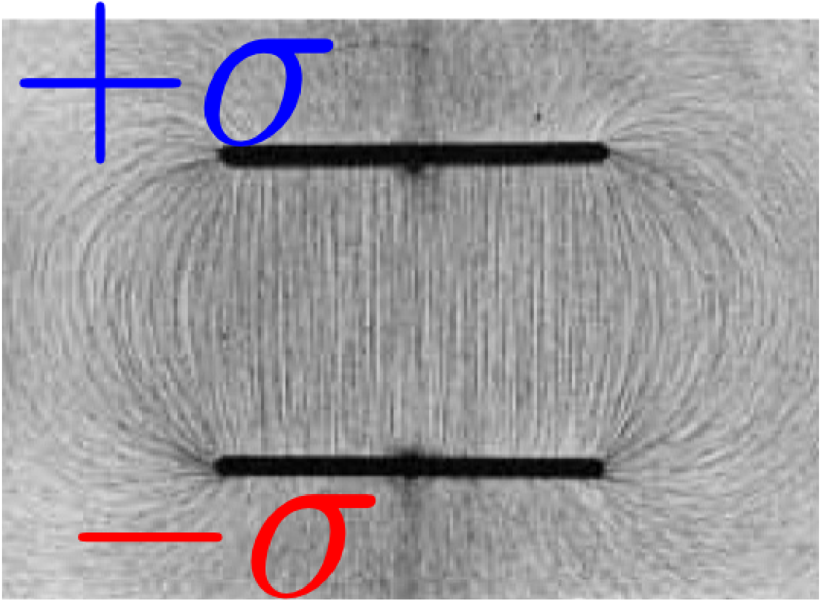
“Viendo” las líneas de campo

- En presencia de un campo externo, las partículas tienden a ganar un **momento dipolar**, generalmente paralelo a la dirección más alargada.
- Un dipolo eléctrico en presencia de un campo externo, siente un **torque** $\mathcal{T} = \vec{p} \times \vec{E}$, que tiende a alinear a los dipolos con el campo.
- Los extremos de un dipolo tienden a atraer a los extremos de otros dipolos de manera que forman “cadenas”. Estas “cadenas” son tangentes al campo eléctrico, y por lo tanto, **siguen a las líneas de campo eléctrico**!

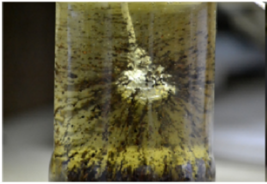




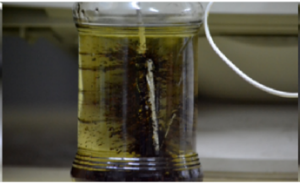



$+\sigma$
$-\sigma$

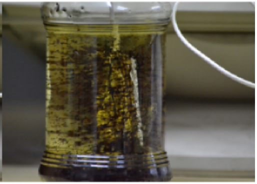
Esfera



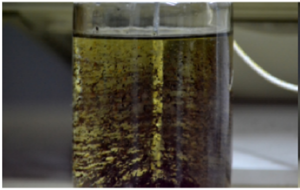
Plano



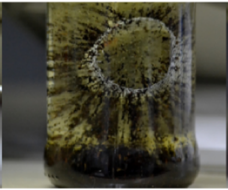
Plano



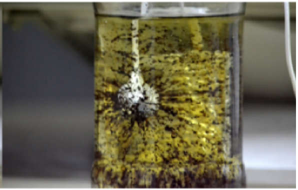
Hilo



Cilindro hueco



Esfera con Plano

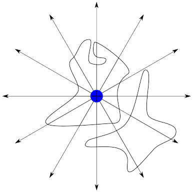


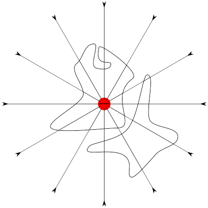
Ley de Gauss

El flujo de un campo coulombiano

La expresión para el campo eléctrico de una carga puntual, se parece sospechosamente al de la **densidad de flujo de energía** para una **onda esférica**:

$\vec{E}(\vec{r})$	$\vec{s}_{\mathcal{E}}(\vec{r})$
$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\frac{I_0 r_0^2}{r^2}\hat{r}$





- $\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 0$ fuera del origen (calcular).
- Si $\mathcal{S}$ es una esfera centrada en el origen, $\int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 1$.
- El flujo neto que atraviesa **cualquier superficie cerrada que contenga al origen** es independiente de la superficie elegida.
- El flujo neto que atraviesa **cualquier superficie cerrada que no contenga al**

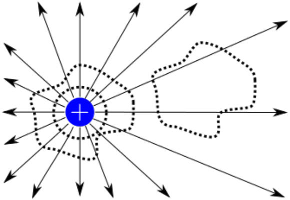
- Para el caso de la **densidad de flujo de energía** para una onda,
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}$$
donde $P_{\mathcal{S}}$ representa la **potencia total** entregada por todas las fuentes ubicadas en el interior de $\mathcal{S}$, y es una expresión del **Principio de Conservación de la Energía**.
- Para el campo eléctrico de una carga puntual en reposo, vale en general que
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathcal{S}}}{\varepsilon_0}$$
donde $Q_{\mathcal{S}}$ es la **carga encerrada** por la superficie $\mathcal{S}$. Por el principio de superposición, esta identidad vale para **cualquier** distribución de carga. Esta identidad se conoce como **Ley de Gauss**...

Enunciado:

*El flujo del campo eléctrico a través de cualquier **superficie cerrada** $\mathcal{S}$ es igual a la **carga neta** encerrada por la superfice, dividida por ε_0.*

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathcal{S}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Es una **Ley Fundamental** de la naturaleza, válida siempre.
- Su **validez** se basa en los **experimentos**, no en una **demostración**.
- Decimos que las **cargas positivas** son las **fuentes** del campo eléctrico.
- Las **cargas negativas** son **sumideros** del campo eléctrico.



Karl F. Gauss
(1777-1855)

Daniel Kehlmann, "La Medición del mundo"

Consecuencia 1: Ley de Coulomb

- Una carga puntual **en reposo** tiene **Simetría esférica**. Por lo tanto,
  - La magnitud del campo sólo puede depender de la distancia a la carga.
  - La dirección del campo debe yacer en la dirección que une la carga con el punto de observación.
  - El sentido del campo respecto a esa dirección no puede depender del punto de observación. De esta manera,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(|\vec{r}|)\hat{r} \qquad\qquad \vec{r}_q = \vec{0}$$

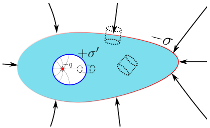
- Si elegimos ahora $\mathcal{S}$ como una superficie esférica concéntrica a la carga,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{S}} (E_r(r)\hat{r}) \cdot (\hat{r} r^2 \sin(\theta)) d\theta d\phi \\ &= E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

  Luego, la fuerza que siente una carga Q en $\vec{r}_Q$, **en presencia** de una carga q en $\vec{r}_q$ será $\vec{F}_Q = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_Q - \vec{r}_q|^2}\hat{r}_{Qq}$ en coincidencia con la Ley de Coulomb ($k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$).

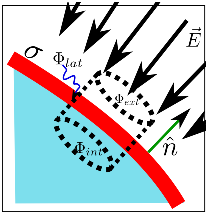
Consecuencia 2: Carga en conductores en equilibrio

- En el interior de un conductor cargado, existen cargas libres de moverse.
- Por lo tanto, si hubiese un campo eléctrico en su interior, no estaría en equilibrio $\Rightarrow \vec{E} = 0$ en el interior de un conductor.
- Sea $\mathcal{S}$ una superficie cerrada cualquiera, **contenida** en el conductor. El **flujo eléctrico** sobre dicha superficie es nulo.
- Por la **Ley de Gauss**, la **carga encerrada** por esa superficie debe ser nula $\Rightarrow$ **toda la carga debe estar en la superficie del conductor**.



Consecuencia 3: Campo eléctrico superficial en conductores

- Sobre la superficie de un conductor en equilibrio, $\vec{E}$ debe ser **normal**.
- $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ en cada punto de la superficie del conductor.
  1. Superficie de Gauss cilíndrica, de altura h y radio r pequeños, con tapas **paralelas** a ambos lados de la superficie.
  2. La carga contenida es $Q = \sigma\pi r^2$.
  3. El flujo total sobre la superficie será $\Phi_{total} = \Phi_{int} + \Phi_{ext} + \Phi_{lat}$.
  4. $\Phi_{int} = 0$ ya que $\vec{E} = \vec{0}$ en el interior, y $\Phi_{lat} = 0$, ya que $\vec{E}$ es siempre $\parallel$ a la superficie. Por lo tanto, $\Phi_{total} = \Phi_{ext} = \pi r^2 \vec{E}\cdot\hat{n}$.

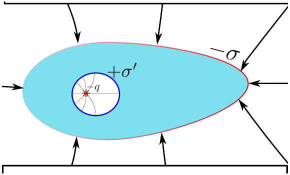


  5. Por la **Ley de Gauss** $\Phi_{total} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$
- $\vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{\pi r^2\sigma}{\pi r^2\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Blindaje eléctrico. Jaula de Faraday.

O ¿Por qué no me anda el 3g en el aula?



- Debido a la condición de equilibrio, una región rodeada por un conductor queda **electromagnéticamente blindada**, de la región exterior.
- El campo en el exterior sólo depende de la **carga neta** y la forma de la superficie exterior del conductor.
- Si el conductor se conecta a tierra, el blindaje es completo: las cargas encerradas no "ven" a las cargas en el exterior ni viceversa.

El efecto persiste aún si

- el conductor no es "maciso".
- Las distribuciones de cargas encerradas, y/o en el exterior no

Cálculo de Campos Eléctricos en sistemas simétricos.

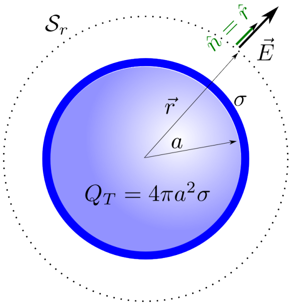
El método que utilizamos para recuperar la Ley de Coulomb puede utilizarse para calcular campos eléctricos en sistemas que presentan un grado de simetría suficientemente grande:

1. Exáminamos las simetrías, y determinamos las posibles componentes no nulas del campo eléctrico.
2. Proponemos una “forma” para el campo eléctrico, en función de algunos parámetros a determinar.
3. Para calcular su valor en un punto, elegimos una **superficie gaussiana** $\mathcal{S}$ que pase por el punto, tal que el campo eléctrico sea, o bien 1. **normal** y **constante**, o bien 2. **paralelo** en todos sus puntos.
4. Usamos la ley de Gauss para determinar los parámetros en función de la carga encerrada.
5. Calculamos la carga encerrada por $\mathcal{S}$ y remplazamos.

Ejemplo 1: Campo por una distribución esférica de carga

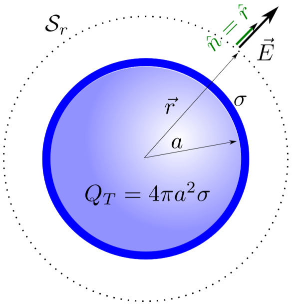
Una distribución de carga esférica tiene las siguientes simetrías:

- Es invariante ante *rotaciones* alrededor de cualquier eje que contenga al centro de la distribución.
- Es invariante ante cualquier *reflexión* respecto a un plano que contenga al centro de la distribución.



1. Proponemos una forma para el campo eléctrico:
   a. El campo es **radial**
   b. La componente radial sólo puede depender de la distancia entre el punto de observación y el centro de la distribución.
2. $$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\hat{r}$$

   , con $\hat{r} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$, donde $\vec{r}_0$ es el centro de la distribución.
3. Para calcular el campo en el punto $\vec{r}$, elegimos una **superficie gaussiana esférica** $\mathcal{S}$, centrada en $\vec{r}_0$, y de radio $|\vec{r} - \vec{r}_0|$. De esta manera, el campo propuesto es siempre normal a la superficie, y su componente normal es constante.



4. Por la ley de Gauss,

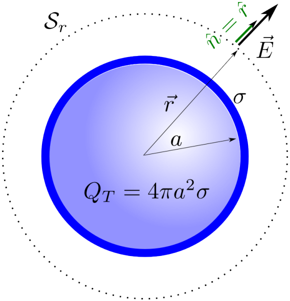
$$E(r)4\pi r^2 = Q(r)/\varepsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

con $Q(r)$ la carga encerrada por la superficie gaussiana de radio r.

5. Consideramos dos casos:
   - Para una **distribución superficial** de carga sobre una esfera de radio R,

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi R^2\sigma & r>a \\ 0 & r<a \end{cases}$$

     (recordar el resultado obtenido mediante la ley de Coulomb)

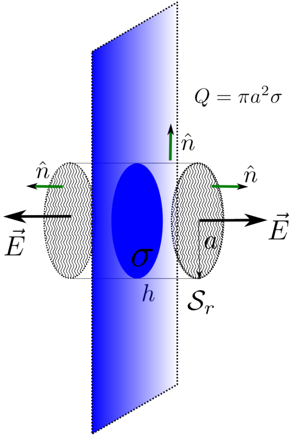


   - Para una distribución volumétrica de carga $\rho(r)$:

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr$$

Ejemplo 2: Campo generado por un plano cargado

1. Simetrías:
   - Traslaciones paralelas al eje.
   - rotaciones en torno a cualquier eje perpendicular.
   - Reflexiones respecto al plano.
   - Reflexiones respecto a planos perpendiculares.
2. Forma del campo. Asumiendo que el origen está sobre el plano, con el eje z perpendicular a este, $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{u}_z$, el campo será de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{u}_z \quad E(-z) = -E(z)$

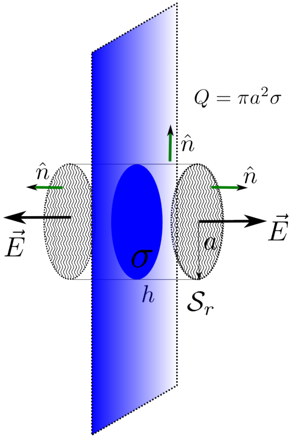


3. Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de radio a y altura h, con el eje perpendicular al plano.
   - El campo es siempre perpendicular a las "tapas" del cilindro, y paralelo a la superficie lateral.
   - La carga encerrada será $Q = \pi a^2 \sigma$

Por la **Ley de Gauss**,
$E(z)\pi a^2 + E(-z)\pi a^2 = 2E(z)\pi a^2 = \frac{\pi a^2 \sigma}{\varepsilon_0}$ luego,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

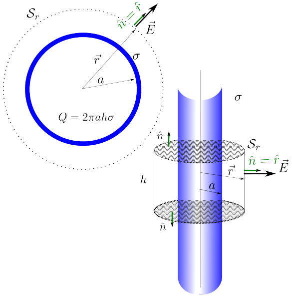
con $\hat{n} = \frac{z}{|z|}\hat{u}_z$ el **vector normal** a la distribución de carga, **orientado** según el **punto de observación**.



Notar que este resultado es consistente con el obtenido para un **disco** sobre su eje, a una distancia z mucho menor que su radio a:

$$\vec{E}_{\rm disco}(z\hat{n}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}})\hat{n} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{a})\hat{n} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = \vec{E}_{\rm plano}(z\hat{n})$$

Ejemplo 3: Campo de una superficie cilíndrica



1. Simetrías:
   - Traslaciones en la dirección del eje del cilindro
   - Rotaciones alrededor del eje
   - Reflexiones respecto de un plano que contenga al eje
   - Reflexiones respecto de un plano perpendicular al eje
2. Forma del campo. Asumiendo que el origen está sobre el eje de simetría, con el eje z sobre ese eje, y $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{u}_z$, el campo será de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$
3. Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de radio r y altura h, concéntrico con el eje de la distribución de carga.
   - El campo es siempre paralelo a las "tapas" del cilindro. Toda la contribución proviene de la superficie lateral.
   - La carga encerrada será $2\pi a h \sigma$

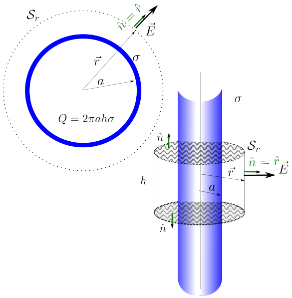
4. Por la **Ley de Gauss**

$$E(r)2\pi rh = \frac{2\pi ah\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

ó, en función de la carga encerrada por unidad de longitud,

$$E(r) = \frac{\lambda(r)}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \lambda(r) = \begin{cases} 2\pi a\sigma & r>a \\ 0 & 0<r<a \end{cases}$$

Este resultado es consistente con aquel obtenido para el hilo infinito, mediante la ley de Coulomb.



Ejercicios

1. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio generado por una esfera de radio R_0, con densidad de carga uniforme ρ_0.
2. Considere la distribución de carga $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$. Calcule:
   - su carga total Q_0,
   - y el campo en todo el espacio.
   - Suponga que una carga puntual $-Q_0$ se localiza a una distancia $r_0 \ll a$ del origen. Determine el momento dipolar de la distribución. ¿Cómo será el campo eléctrico a distacias $r \gg a$?. ¿Qué fuerza experimenta la carga puntual debido al resto?
3. Ver que el resultado obtenido para un alambre recto sigue siendo válido para una **distribución volumétrica de carga** $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ remplazando $\lambda(r) = 2\pi \int_0^r \rho(r^{'}) r^{'} dr^{'}$