

# Clase 07- Fenómenos Electrostáticos.

Prof. Juan Mauricio Matera

06 de septiembre de 2024

# Fenómenos electrostáticos

# Historia

Los fenómenos eléctricos son conocidos desde la época de la civilización griega (600 AC): al frotar ámbar (resina vegetal solidificada) con un trozo de lana podía atraer objetos livianos (pequeños trozos de papiro)

- ▶ 640-546 AC: Thales de Mileto
- ▶ 1540-1603: William Gilber: observó la misma propiedad al frotar vidrio con seda.



# Historia

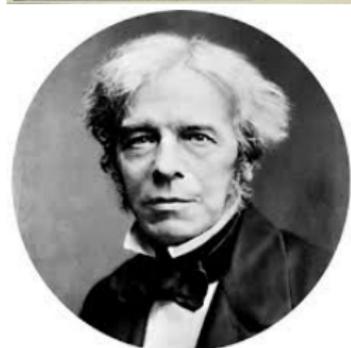
Los fenómenos eléctricos son conocidos desde la época de la civilización griega (600 AC): al frotar ámbar (resina vegetal solidificada) con un trozo de lana podía atraer objetos livianos (pequeños trozos de papiro)

- ▶ 640-546 AC: Thales de Mileto
- ▶ 1540-1603: William Gilber: observó la misma propiedad al frotar vidrio con seda.

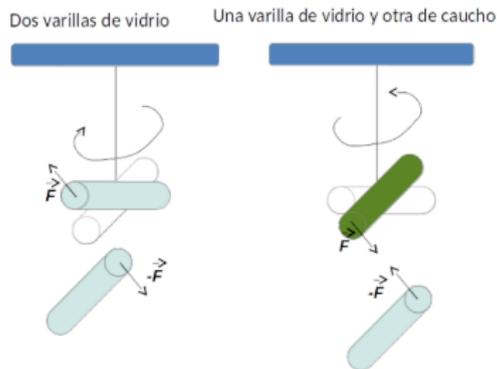
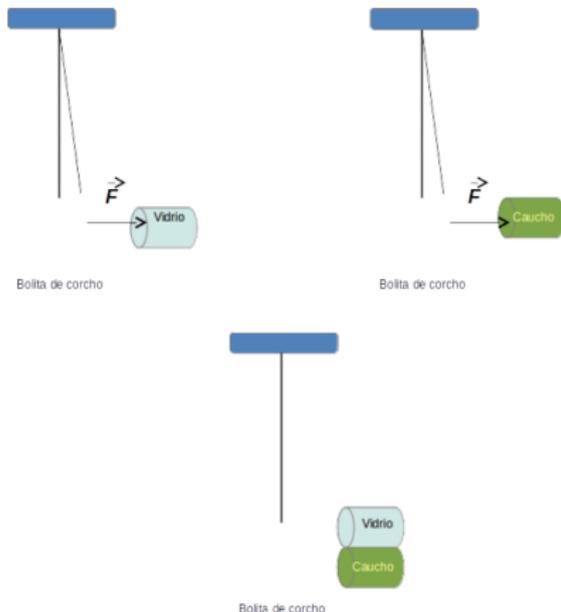


El nombre en griego correspondiente a ámbar es **elektron**, Gilbert comenzó a utilizar el término eléctrico para referirse al material que se comportaba igual que el ámbar, originando los términos **electricidad** y **carga eléctrica**.

- ▶  $\approx$  1700: Stephen Gray: encontró que la atracción o repulsión podía ser transferida vía contacto metálico.
- ▶ 1698-1739: Charle Du Fay: encuentra dos tipos de electricidad
- ▶ 1747: Benjamin Franklin: realiza un modelo eléctrico
- ▶ 1785: Charles Coulomb: encuentra la expresión de la ley de atracción y repulsión entre cargas
- ▶ Fin del siglo XIX: Millikan y Thomson: cuantización de la carga, descubrimiento del electrón
- ▶ Fin del siglo XIX: Faraday y Maxwell: ley de inducción electromagnética, ecuaciones fundamentales del electromagnetismo



Los cuerpos materiales adquieren **SÓLO dos estados** de electrización diferentes, los que comparten la del vidrio y los que comparten la del plástico. Es una propiedad de la materia.



- ▶ Los cuerpos que poseen la **MISMA** clase de electrización se **REPELEN**
- ▶ Los cuerpos con **DIFERENTE** clase de electrización se **ATRAEN**

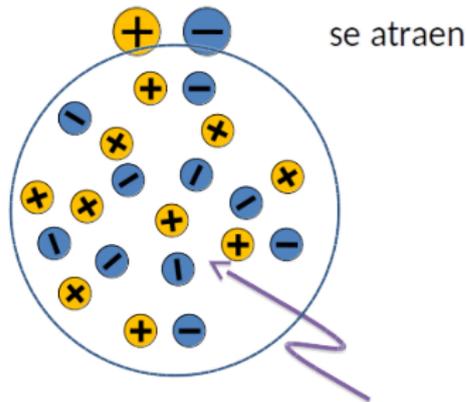
## Carga eléctrica

## Modelo de eléctrico (B. Franklin)

Dos tipos de carga eléctrica: + (vidrio) y - (ambar)

Se supone que todo objeto en su estado "normal" (que no exhibe el estado de electrización) posee la misma cantidad de carga positiva que negativa.

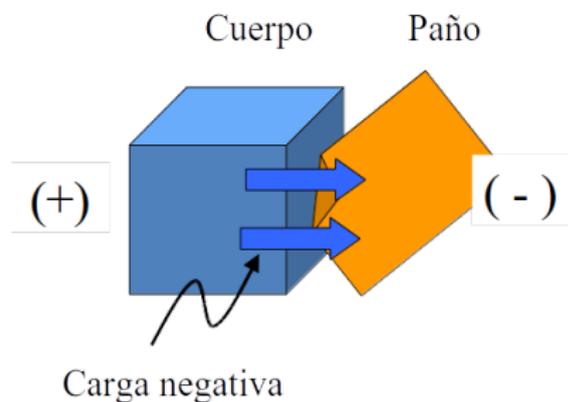
 o  se repelen



*Cargas eléctricas*

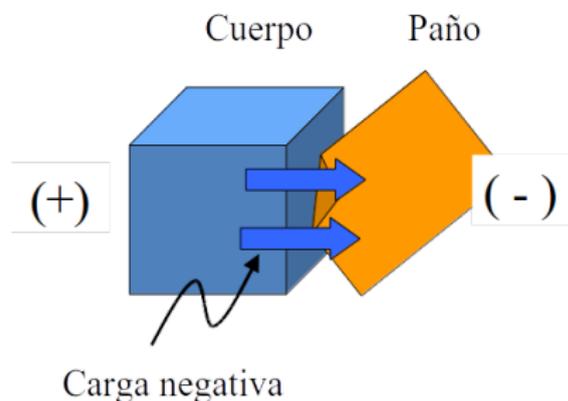
## Separación y Conservación de la carga

Cuando dos objetos se frotan, parte de una de las cargas se transfiere de un cuerpo a otro, **uno queda con un exceso y el otro con un defecto de igual valor de esa carga.**



## Separación y Conservación de la carga

Cuando dos objetos se frotan, parte de una de las cargas se transfiere de un cuerpo a otro, **uno queda con un exceso y el otro con un defecto de igual valor de esa carga.**



En este proceso la carga no se crea ni se destruye, sino que se transfiere de un cuerpo al otro. La carga total de los dos objetos no cambia: **la carga se conserva.**

# Cuantización de la carga: El experimento de Millikan (1909)

Robert Millikan encontró que la carga eléctrica es siempre un múltiplo de una cierta carga fundamental:

$$Q = Nq \quad N \in \mathbb{Z}$$

$$q = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$$

Donde C es la **unidad de carga eléctrica** del sistema MKS: el **Coulomb**

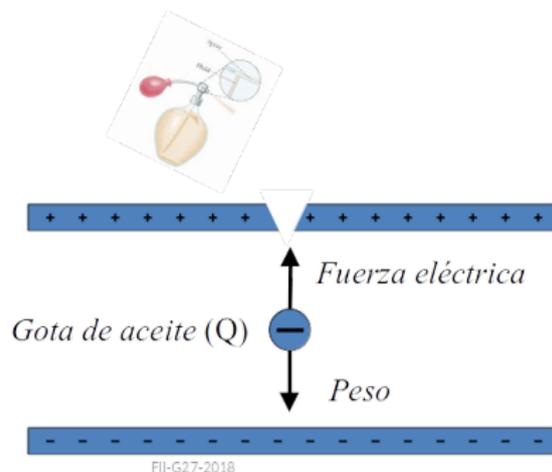


Figure 1: Experiencia de Millikan

## La materia

- ▶ La materia está formada por **átomos**
- ▶ Los protones tienen carga positiva ( $1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ ), mientras que los electrones tienen carga negativa ( $-1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ ).
- ▶ La masa del núcleo, que está formado por protones y partículas neutras (neutrones) se expresa en unidades de masa atómica ( $uma = 1,6 \times 10^{-27}\text{kg}$ ) por su número másico  $A$ .
- ▶ La cantidad de protones en una especie atómica se denomina **Número atómico  $Z$** .
- ▶ Los electrones con igual

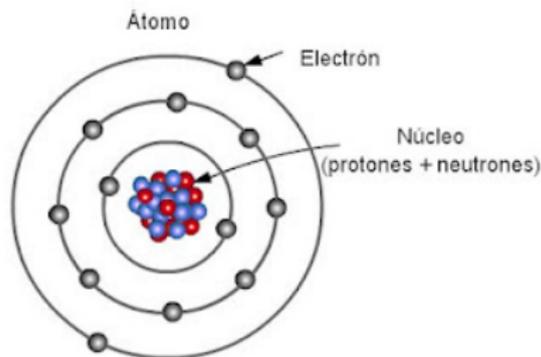


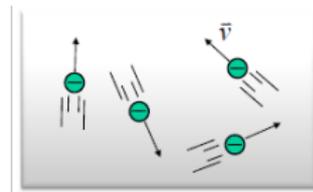
Figure 2: Modelo atómico de Bohr

## Tipos de materiales (S. Gray)

- ▶ **Conductores:** una fracción de las cargas se pueden mover libremente.

# Tipos de materiales (S. Gray)

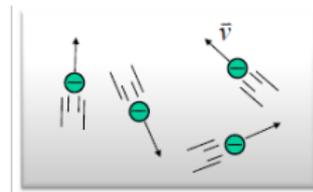
- ▶ **Conductores:** una fracción de las cargas se pueden mover libremente.



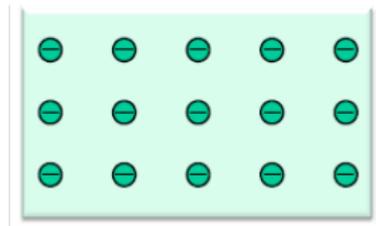
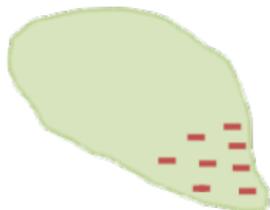
- ▶ **Aislantes** (no conductor): las cargas no se pueden mover libremente.

# Tipos de materiales (S. Gray)

- ▶ **Conductores:** una fracción de las cargas se pueden mover libremente.



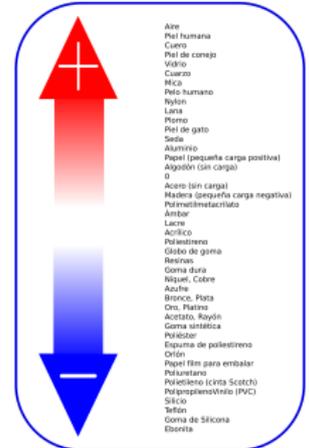
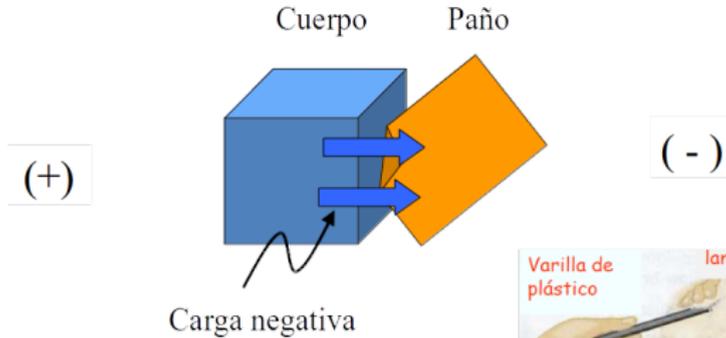
- ▶ **Aislantes** (no conductor): las cargas no se pueden mover libremente.



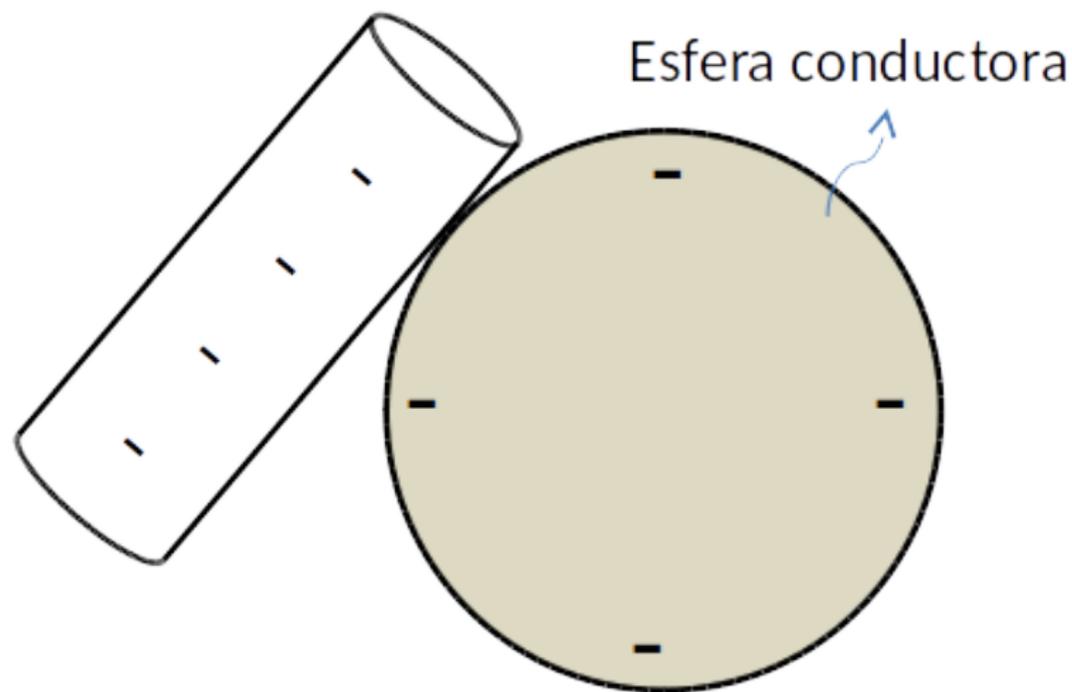
## ¿Cómo adquieren carga los materiales?

- ▶ Los aislantes se pueden cargar por frotamiento (**Efecto Triboeléctrico**)
- ▶ Los conductores se pueden cargar por contacto o por inducción
- ▶ En la carga por inducción no existe contacto entre el elemento cargado y el elemento a cargar

# Carga por frotamiento (Triboelectricidad)

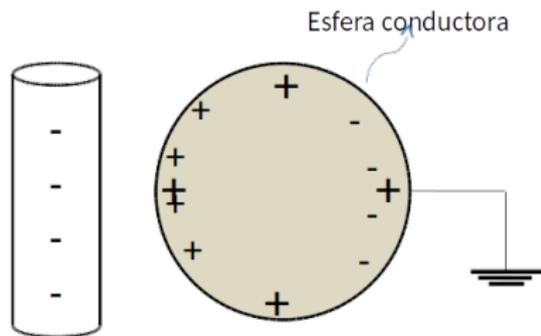


## Carga por contacto



- ▶ La carga se distribuye por toda la superficie del conductor.
- ▶ La carga que adquiere la esfera conductora tiene el mismo signo que la carga de la barra

# Inducción



- ▶ No existe contacto entre la barra cargada y la esfera conductora.
- ▶ La carga se distribuye por toda la superficie del conductor.
- ▶ La carga que adquiere la esfera conductora tiene signo opuesto que la carga de la barra.

# El generador de Van der Graaff



Figure 3: Generador de Van der Graaff

Es capaz de generar varios  $\mu\text{Coulombs}$ . ¿Y qué es un Coulomb?

# Cómo se mide la carga eléctrica?



Figure 4: El electroscópio

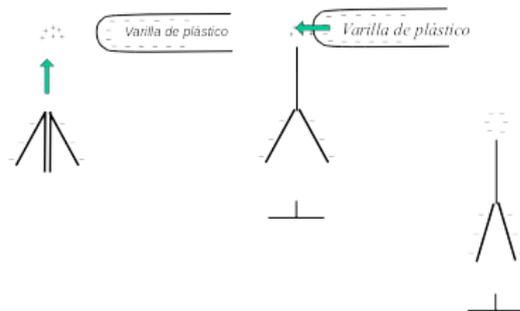


Figure 5: Funcionamiento

## La ley de Coulomb

- ▶ Para dar una medida precisa de carga eléctrica, hace falta conocer su efecto sobre una cantidad medible.
- ▶ Por ejemplo,
  - ▶ para medir un esfuerzo, usamos que el estiramiento de un resorte es proporcional a la magnitud del esfuerzo aplicado (ley de Hook).
  - ▶ para medir una temperatura, usamos que la dilatación de ciertos cuerpos es proporcional a la temperatura.
  - ▶ Para medir la masa de un cuerpo, usamos que el peso sobre un cuerpo es proporcional a su masa.
- ▶ ¿Cómo modelamos la fuerza entre cuerpos cargados?

Charles Coulomb (1785) realizó experimentos para investigar las relaciones cuantitativas de las interacciones de atracción y repulsión de cargas.

Partió de la hipótesis de que la fuerza eléctrica debía parecerse a otra fuerza de acción a distancia bien conocida, la ley de gravitación de Newton:

$$\vec{F}_{g,21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

donde 1 y 2 son dos partículas puntuales.

Propuso entonces que

$$\vec{F}_{e,21} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

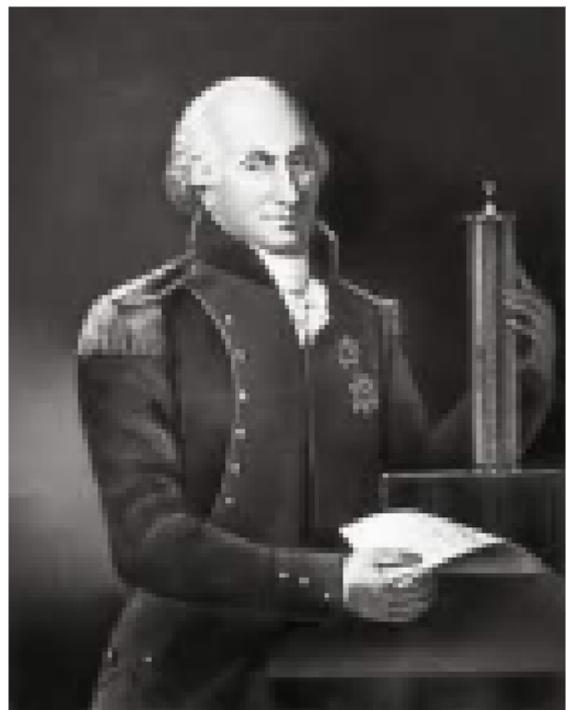


Figure 6: Charles Coulomb

Para probarlo, Coulomb inventa la llamada **balanza de torsión**

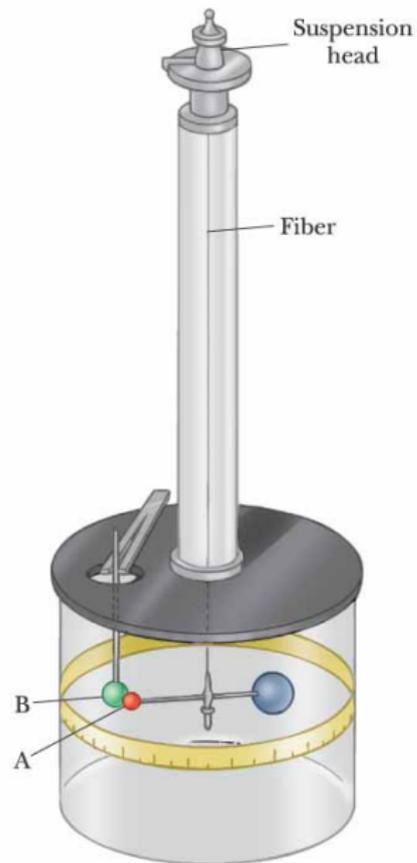
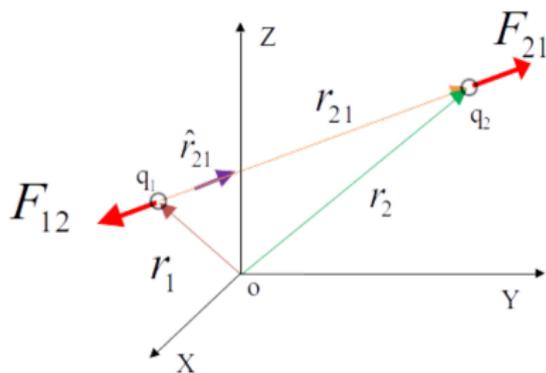


Figure 7: Balanza de Torsión.

## Resultados de la experiencia de Coulomb

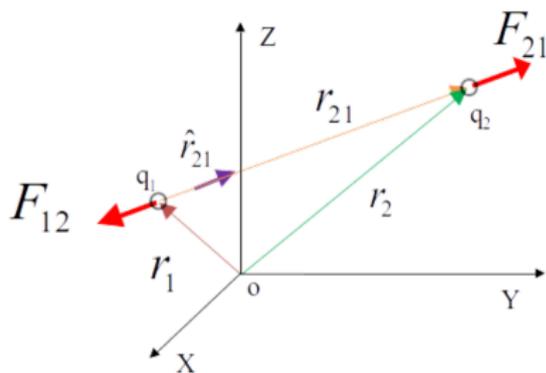
- ▶ La dirección de la fuerza entre dos cargas es la misma dirección que une a las dos cargas.
- ▶ La fuerza es atractiva si las cargas tienen signo diferente y repulsiva si las cargas tienen el mismo signo.
- ▶ El módulo de la fuerza es proporcional al producto de las cargas.
- ▶ El módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas.



$$\text{con } k = 8,9975 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

## Resultados de la experiencia de Coulomb

- ▶ La dirección de la fuerza entre dos cargas es la misma dirección que une a las dos cargas.
- ▶ La fuerza es atractiva si las cargas tienen signo diferente y repulsiva si las cargas tienen el mismo signo.
- ▶ El módulo de la fuerza es proporcional al producto de las cargas.
- ▶ El módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas.



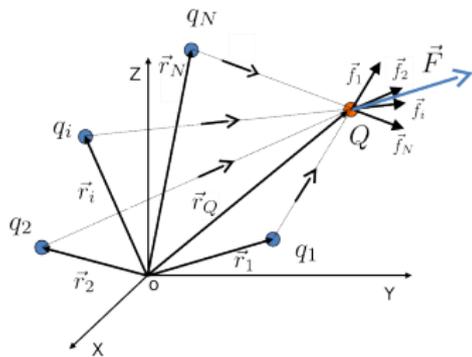
$$\text{con } k = 8,9975 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

# Principio de superposición

La fuerza neta que un conjunto de cargas  $q_i$  ejerce sobre una carga  $Q$  es igual a la resultante de las fuerzas  $\vec{F}_i$  que cada carga ejerce sobre  $Q$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_i \vec{f}_i \\ &= \sum_i \frac{kQq_i}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_i}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_i|}\end{aligned}$$



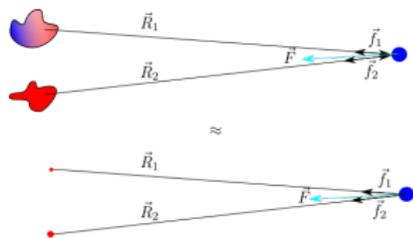
- ▶ Notar que los términos de la suma son vectores!
- ▶  $|\vec{A} + \vec{B}| \neq |\vec{A}| + |\vec{B}|$  en general!.
- ▶ Si todas las cargas  $q_i$  están **en el mismo punto**, el conjunto de cargas produce una fuerza equivalente a una única carga  $q = \sum_i q_i$ .

## Distribuciones de cargas discretas

Hasta ahora, describimos a la fuerza eléctrica como una interacción entre partículas puntuales que, vía el principio de superposición lineal, podíamos extender a la interacción de una carga puntual  $Q$  con un sistema compuesto de muchas partículas puntuales  $q_i$ .

Llamaremos a tal sistema compuesto, una **distribución discreta de cargas puntuales**.

Este modelo es adecuado en tanto el tamaño de los cuerpos cargados que componen la distribución de carga, sean de dimensiones mucho menores a la distancia de cualquiera de los cuerpos a la carga  $Q$  ya que en tal caso, la ley de Coulomb predecirá fuerzas similares.



## Distribuciones de cargas

## Motivación

Hasta ahora, discutimos la Ley de Coulomb para la fuerza entre **cargas puntuales**

$$\vec{F}_{21} = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

- ▶ En general, la fuerza eléctrica que experimenta una carga  $Q$  ubicada en la posición  $\vec{r}$  es la resultante de las fuerza ejercida por todas las otras cargas (Principio de superposición).

$$\vec{F}_Q = kQ \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

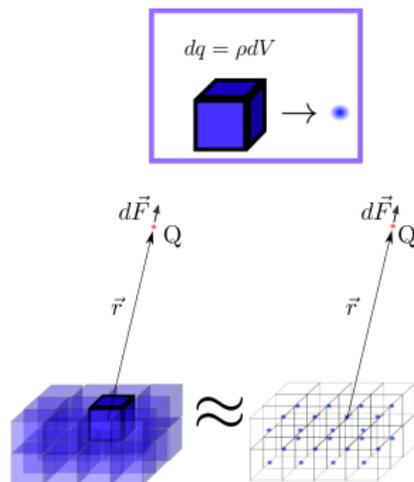
- ▶ En la práctica, los objetos cargados tienen una extensión finita. ¿Cómo generalizamos este resultado en este caso?

## Distribuciones de cargas continuas.

Si el tamaño de los objetos cargados es comparable con la distancia de observación, es posible “descomponer” el objeto extendido en objetos arbitrariamente más pequeños. Asumimos entonces que la carga  $\delta q$  de un elemento de volumen  $\delta \mathcal{R}$  en torno a un punto  $\vec{r}_i$  es proporcional al “tamaño” del elemento:  $dq = \rho |\delta \mathcal{R}|$ .

La fuerza que sentirá una carga  $Q$  ubicada en  $\vec{r}$  será entonces

$$\vec{F}_Q = \sum_i \frac{kQdq}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

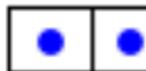
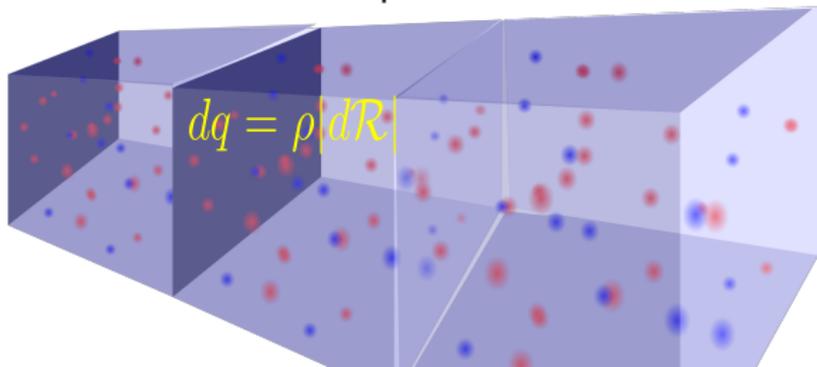


## Distribuciones de cargas continuas vs discretas

Si el sistema de cargas fuente está compuesto por un gran número de cargas pequeñas, distribuidas sobre una cierta región  $\mathcal{R}$ , es conveniente expresar la resultante de fuerzas en términos de una integral:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i \approx \int_{\mathcal{R}} d\vec{F} = \int_{\mathcal{R}} \frac{kQ\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_Q - \vec{r}|^2} \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}|} d^3\vec{r}$$

donde  $\rho(\vec{r})$  es la **carga por unidad de volumen** en torno al punto  $\vec{r}$ .

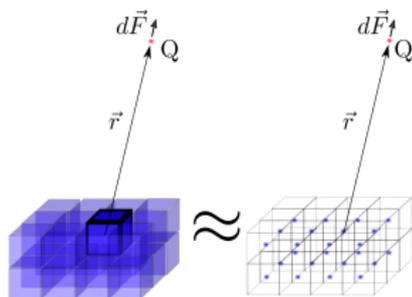
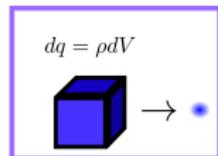


En el límite  $|\delta R| \rightarrow 0$

$$\vec{F}_Q = Q \int_{\mathcal{R}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} k\rho(\vec{r}') |d\mathcal{R}'|$$

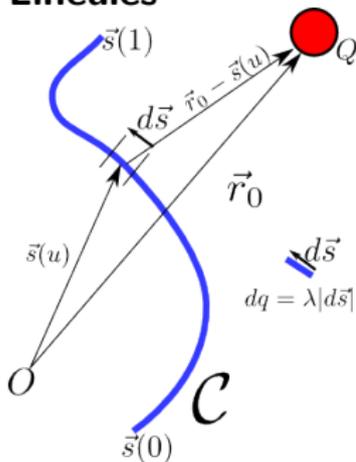
Si la región es tridimensional,  
 $|d\mathcal{R}'| = d^3r' = dx'dy'dz'$ , por lo que la  
 fuerza resultante resulta ser una **integral triple** de un vector:

$$\begin{aligned} \vec{F}_Q &= Q \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} k\rho(\vec{r}') dx' dy' dz' \\ &= kQ \sum_{\mu=x,y,z} \hat{u}_\mu \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{u}_\mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} k\rho(\vec{r}') dx' dy' dz' \end{aligned}$$



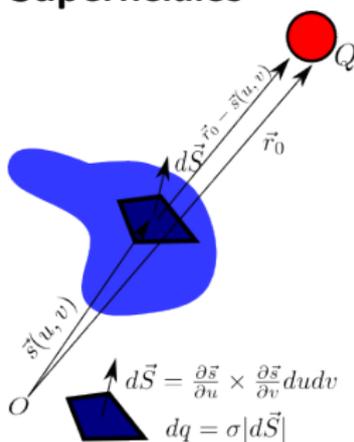
# Distribuciones de carga lineales, superficiales y volumétricas

## Lineales



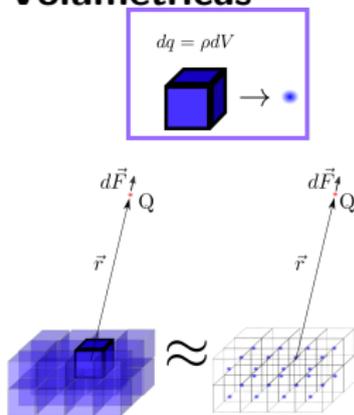
$\lambda$ : Densidad **lineal** de carga (C/m)

## Superficiales



$\sigma$ : Densidad **superficial** de carga (C/m<sup>2</sup>)

## Volumétricas



$\rho$ : Densidad **volumétrica** de carga (C/m<sup>3</sup>)



## Valores típicos de la densidad de carga en diferentes sistemas

Algunos valores típicos para la **densidad superficial de carga**

Medio	$\sigma$ ( $\mu\text{C}/\text{m}^2$ )
Superficie cable	$1 \times 10^{-4}$
Vidrio Frotado	0,01
Van der Graff	0,1
Fotocopiadora	1
Nube de Tormenta	1

Relámpago  $\lambda = 0,1\text{C}/\text{m}$  "... 1,21 Gigawatts!"

Nube de tormenta  $\rho = 0,1\mu\text{C}/\text{m}^3$

Interior de un átomo  $\rho \approx -10^{10}\text{C}/\text{m}^3$



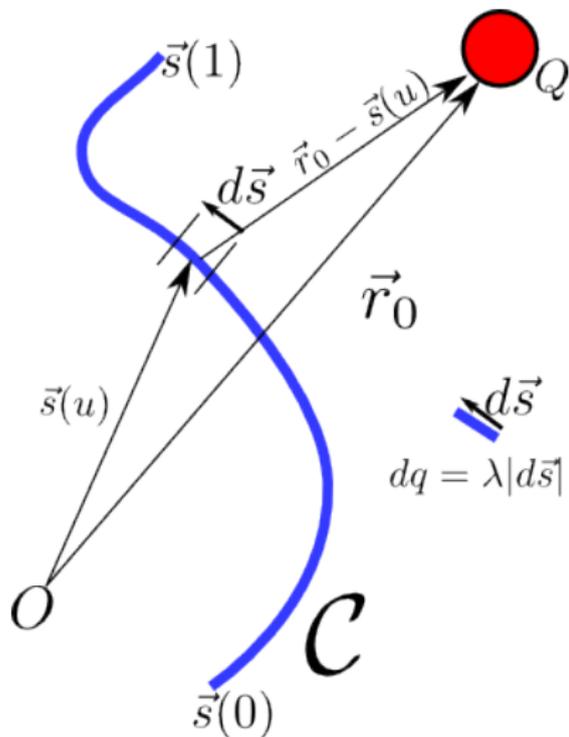
## Distribuciones de carga 1D

En algunos casos, podemos asumir que la carga se encuentra distribuída sobre una curva, esto es, una región de sección despreciable en el problema. En tal caso,

$$\vec{F}_Q = kQ \int_C \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \lambda(\vec{s}) |d\vec{s}|$$

donde  $\vec{s}$  es una **parametrización** de la curva  $C$ , esto es, una función que recorre la curva  $C$  para diferentes valores de su argumento.

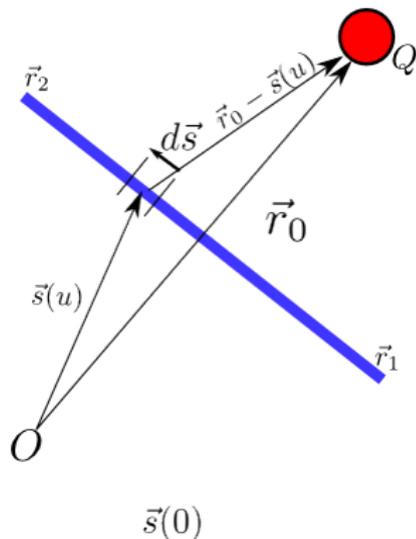
$\lambda(\vec{s})$  es la **densidad lineal de carga** y tiene unidades de carga por unidad de distancia (C/m).



## Ejemplo 1: alambre cargado

Si  $\mathcal{C}$  es un segmento de recta que va desde  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ ,

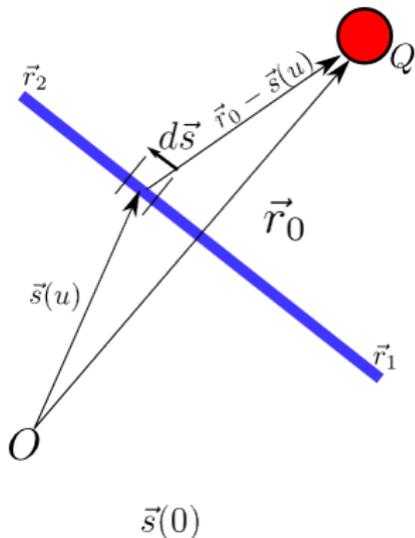
- ▶  $\vec{s}(u) = \vec{r}_1 + u(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ ,
- ▶  $0 < u < 1$
- ▶  $|d\vec{s}| = \left| \frac{d\vec{s}}{du} du \right| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| du$   
 $|du| = du$  si los **límites de integración van de menor a mayor**)



## Ejemplo 1: alambre cargado

Si  $\mathcal{C}$  es un segmento de recta que va desde  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ ,

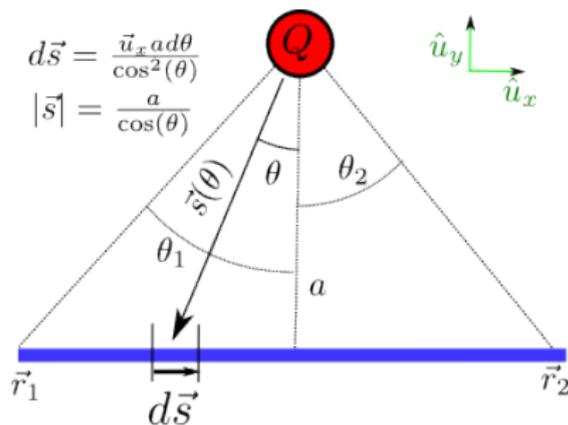
- ▶  $\vec{s}(u) = \vec{r}_1 + u(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ ,
- ▶  $0 < u < 1$
- ▶  $|d\vec{s}| = \left| \frac{d\vec{s}}{du} du \right| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| du$   
 $|du| = du$  si los **límites de integración van de menor a mayor**)



$$\begin{aligned}\vec{F}_Q &= kQ \int_0^1 \lambda(u) \frac{\vec{r}_0 - (\vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)u)}{|\vec{r}_0 - (\vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)u)|^3} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| du \\ &= kQ |\vec{r}_{21}| \int_0^1 \lambda(u) \frac{\vec{r}_{01} - \vec{r}_{21}u}{|\vec{r}_{01} - \vec{r}_{21}u|^3} du \quad \text{con } \vec{r}_{01} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,\end{aligned}$$

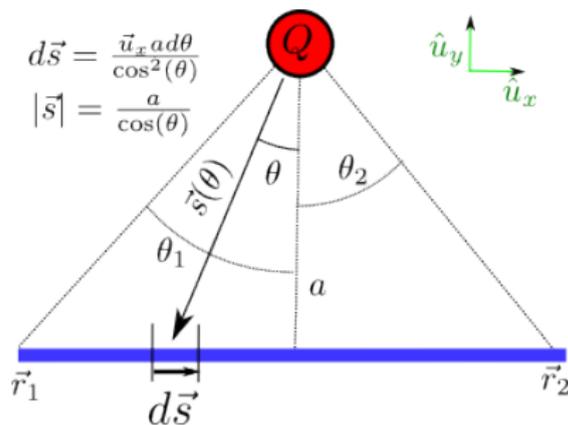
Una elección más inteligente para calcular estas integrales viene de elegir el origen en la carga  $Q$ , y el eje  $x$  paralelo a  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ :

- ▶  $\vec{s}(\theta) = a(-\hat{u}_y + \tan(\theta)\hat{u}_x) + \vec{r}_0$
- ▶  $-\theta_1 < \theta < \theta_2 / \vec{\theta}_i = \vec{r}_i$ .
- ▶  $d\vec{s} = \frac{a}{\cos^2(\theta)} \hat{u}_x d\theta$



Una elección más inteligente para calcular estas integrales viene de elegir el origen en la carga  $Q$ , y el eje  $x$  paralelo a  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ :

- ▶  $\vec{s}(\theta) = a(-\hat{u}_y + \tan(\theta)\hat{u}_x) + \vec{r}_0$
- ▶  $-\theta_1 < \theta < \theta_2 / \vec{\theta}_i = \vec{r}_i.$
- ▶  $d\vec{s} = \frac{a}{\cos^2(\theta)} \hat{u}_x d\theta$



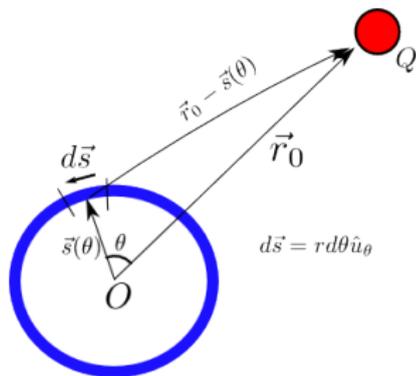
$$\begin{aligned} \vec{F}_Q &= kQ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \lambda(\theta) \frac{a \tan(\theta) \hat{u}_x + a \hat{u}_y}{(a/\cos(\theta))^3} \frac{a d\theta}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{kQ}{a} \hat{u}_x \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \lambda(\theta) \sin(\theta) d\theta + \frac{kQ}{a} \hat{u}_y \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \lambda(\theta) \cos(\theta) d\theta \end{aligned}$$

## Ejemplo 2: Anillo cargado

Si  $\mathcal{C}$  es una circunferencia de radio  $a$  en el plano  $xy$  centrado en el origen,

- ▶  $\vec{s}(\theta) = a(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$
- ▶  $-\pi < \theta < \pi$
- ▶

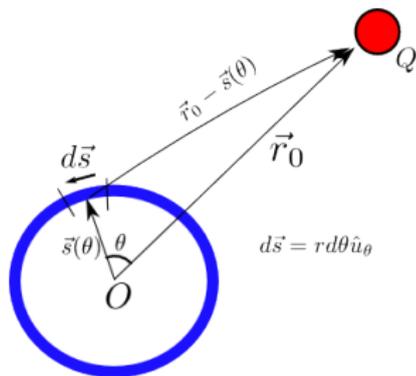
$$\begin{aligned} |d\vec{s}| &= \left| \frac{d\vec{s}}{d\theta} d\theta \right| \\ &= |a(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)| d\theta = a d\theta \end{aligned}$$



## Ejemplo 2: Anillo cargado

Si  $\mathcal{C}$  es una circunferencia de radio  $a$  en el plano  $xy$  centrado en el origen,

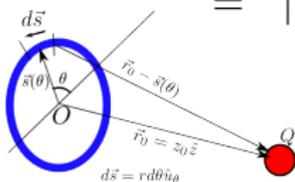
- ▶  $\vec{s}(\theta) = a(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$
- ▶  $-\pi < \theta < \pi$
- ▶



$$|d\vec{s}| = \left| \frac{d\vec{s}}{d\theta} d\theta \right|$$

$$= |a(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)| d\theta = ad\theta$$

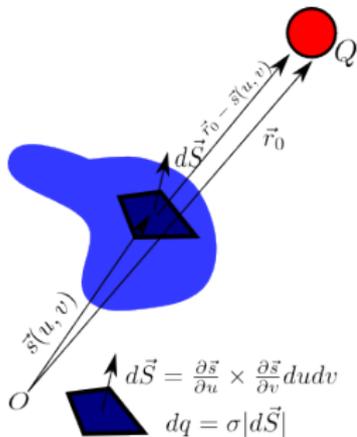
Si la carga  $Q$  está sobre el eje  $z$ , a una distancia  $z_0$  del centro de la circunferencia, y  $\lambda$  es uniforme,



$$\vec{F}_Q = kQ \int_{-\pi}^{\pi} \lambda \frac{(-a \cos(\theta), -a \sin(\theta), z_0)}{(z_0^2 + a^2)^{3/2}} ad\theta = \frac{2}{\dots}$$

# Densidades superficiales

Si el material que soporta la carga es muy delgado, o la carga se encuentra sobre la superficie del material (como ocurre en los **conductores**). La distribución queda caracterizada por la superficie y la **densidad superficial** de carga.



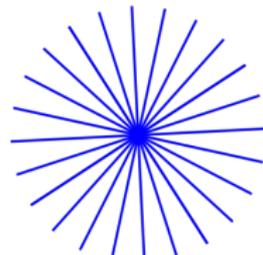
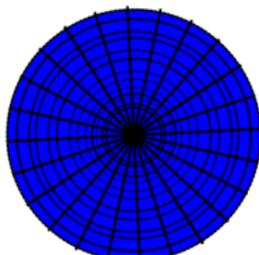
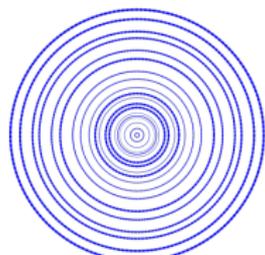
Las superficies se **parametrizan** como **funciones a valores vectoriales**  $\vec{s}(u, v)$  de dos parámetros. El **elemento diferencial de área**  $d\vec{S}$  es en general un **vector**, cuya dirección es perpendicular al elemento que describe, y su magnitud da la medida del **área** que cubre.

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} dudv$$

donde  $\vec{a} \times \vec{b}$  representa el **producto vectorial** de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

## Superficies como colecciones de curvas

Si fijamos uno de los parámetros de  $\vec{r}(u, v)$ , lo que obtenemos es una curva, parametrizada por el parámetro restante. Podemos pensar entonces a la fuerza generada por una superficie cargada sobre una carga como una **superposición** de los campos que general curvas que cubren a la superficie



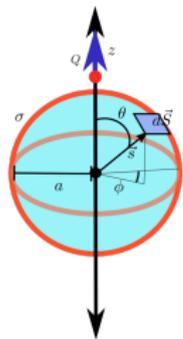
Naturalmente, la densidad lineal de carga no será necesariamente constante en estos casos.

### Ejemplo 3: Disco cargado

Con esa idea, podemos evaluar la fuerza que un **disco cargado**, de densidad superficial  $\sigma$  y radio  $a$  ejerce sobre una carga  $Q$ , como la superposición de las fuerzas que ejercen anillos de densidad lineal de carga  $d\lambda = \sigma dr$ . Por ejemplo, en la posición  $z_0$  sobre el eje de simetría,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_0^a \frac{2\pi k Q z_0 \sigma r dr}{|r^2 + z_0^2|^{3/2}} \hat{u}_z \\ &= \pi k Q z_0 \sigma \int_0^a \frac{2r dr}{|r^2 + z_0^2|^{3/2}} \hat{u}_z && r \rightarrow u = r^2 + z_0^2 \\ & && 2r dr = du \\ &= 2\pi k Q \sigma \left( 1 - \frac{|z_0|}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} \right) \frac{z_0}{|z_0|} \hat{u}_z && \int u^{-3/2} du = \frac{-1}{2u^{1/2}}\end{aligned}$$

## Ejemplo 4: Superficie esférica



Consideremos una distribución superficial esférica de carga, con densidad uniforme  $\sigma$  y radio  $a$ , frente a una carga  $Q$  a una distancia  $z$  del centro de la esfera.

- ▶  $\vec{s}(\theta, \phi) = a\check{r}(\theta, \phi)$
- ▶  $\check{r}(\theta, \phi) = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$
- ▶  $d\vec{S} = a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$
- ▶

$$\vec{F} = \begin{cases} \frac{k4\pi a^2 \sigma}{|z|^2} \hat{u}_z & z > a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

- $$\vec{F} = kQ\sigma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(z - a \cos(\theta)) a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{((a \sin(\theta))^2 + (z - a \cos(\theta))^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$
- ▶ Fuera de la esfera, **como si** toda la carga  $q = 4\pi a^2 \sigma$  estuviese en el centro de la esfera.
  - ▶ Dentro de la esfera, la fuerza neta es nula, independientemente de la posición de  $Q$ .

## Distribuciones volumétricas de carga

- ▶ Las cargas se encuentran distribuidas sobre un volumen, de manera uniforme sobre distancias  $\ll$  que la distancia a la carga
- ▶ Sólo es posible en modelos de medios aislantes
- ▶ La fuerza resultante puede pensarse como la superposición de contribuciones de muchas distribuciones superficiales de carga.

Ejemplo 5: Fuerza debida a una distribución esférica de carga (ejercicio).