

Clase 06 - Interferencia y Difracción. Dispersión.

Prof. Juan Mauricio Matera

02 de septiembre de 2024

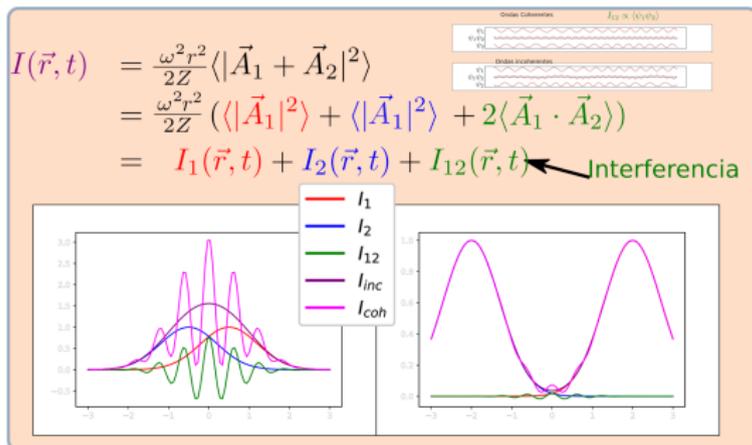
Luz coherente vs luz incoherente

Intensidad de la superposición de ondas electromagnéticas

- ▶ Onda esférica: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \frac{\mathcal{A}^0 e^{i(kr - \omega t)}}{r}$
- ▶ La intensidad de una onda esférica no depende de su fase:

$$I = |\langle \vec{s}_E \rangle| r^2 = \frac{\langle |\omega r \vec{A}|^2 \rangle}{2Z} = \frac{|\omega \mathcal{A}^0|^2}{2Z}$$

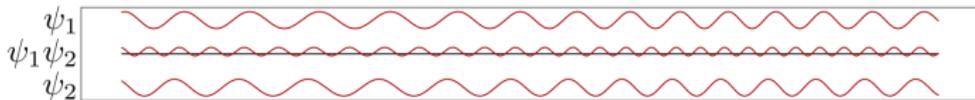
- ▶ Los efectos de coherencia sólo serán visibles si se cuenta con dos fuentes.



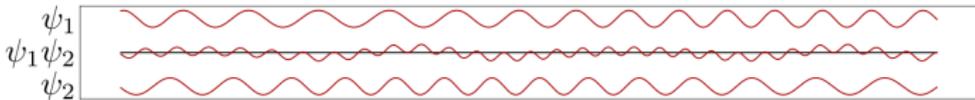
- Decimos que dos fuentes son **coherentes** si la **diferencia de fase** entre ambas está definida y se mantiene constante **espacial y temporalmente**

Ondas Coherentes

$$I_{12} \propto \langle \psi_1 \psi_2 \rangle$$



Ondas incoherentes



Podemos estimar

$$I_{12} \approx 2 \frac{\omega^2 r^2}{2Z} \Re(\vec{A}_1^* \cdot \vec{A}_2) = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\delta) \rangle$$

con

- ▶ δ la **diferencia de fase** entre las ondas.
- ▶ $\langle (\vec{A}_1^{(0)} \cdot \vec{A}_2^{(0)}) \rangle = \Re(\vec{A}_1^* \cdot \vec{A}_2)$ el promedio de las amplitudes.
- ▶ I_{12} se anula si las ondas
 - ▶ tienen polarizaciones complementarias y/o
 - ▶ los haces no se superponen, y/o
 - ▶ el desfase varía en el tiempo (ondas incoherentes).
- ▶ Por lo tanto, para observar el **fenómeno de interferencia**, se necesita que
 - ▶ dos fuentes **aproximadamente monocromáticas** con polarizaciones no ortogonales, o
 - ▶ dos fuentes **correlacionadas**

Fuentes (aproximadamente) monocromáticas

- ▶ **Radiación electromagnética monocromática y polarizada** (ideales)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}$$

- ▶ **aproximadamente monocromáticas** (reales):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A}_0(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}$$

$\vec{A}_0(\vec{r}, t)$ varía *lento* frente a $\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t$.

- ▶ $\Rightarrow |\omega - \omega_0| < \Delta\omega \ll \omega_0$, y $|\vec{k} - \vec{k}_0| < \Delta k \ll n\omega_0/c$.

- ▶ **Tiempo de coherencia**

$$\tau_C = \frac{2\pi}{\delta\omega}$$

- ▶ Luz solar, $\tau_C \approx 4 \times 10^{-15} \text{s} = 4 \text{fs}$
- ▶ Fuente LED, $\tau_C \approx 50 \text{fs}$
- ▶ Luz laser, $\tau_C \approx 100 \mu\text{s}$
- ▶ Respuesta del ojo humano es $\approx 17 \text{ms}$.

Por este motivo, en la práctica no es posible ver a simple vista fenómenos de interferencia a partir de fuentes independientes.

Longitud de coherencia

- ▶ Se define **Longitud de coherencia** como la distancia máxima entre dos puntos de un haz de luz tal que su relación de fase es constante.
- ▶ En un medio no dispersivo, se puede estimar por
$$l_c = c \times \tau_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$
- ▶ Dos puntos sobre un frente de onda, separados por una distancia $< l_c$ pueden pensarse como dos fuentes coherentes.
- ▶ Para una fuente con $t_c \approx 4\text{fs}$, $l_c \approx 1.2\mu\text{m}$.
- ▶ Para una fuente laser, $t_c \approx 100\mu\text{s}$ y $l_c \approx 30\text{km}$

Principio de Huygens-Fresnel

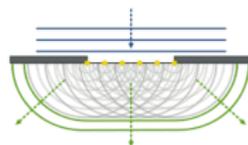
- ▶ Cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (de la misma frecuencia que la onda primaria).
- ▶ La amplitud de los campos en cualquier punto más allá es la superposición de todos estos frentes de onda (considerando sus amplitudes y fases relativas).
- ▶ Podemos construir entonces fuentes **coherentes** puntuales, haciendo incidir una onda plana sobre una pantalla con perforaciones pequeñas.
- ▶ La *distancia* entre perforaciones debe ser *menor* a la *longitud de coherencia*



Christian Huygens
1629 - 1675



Agustin Fresnel
1788 - 1827



El experimento de dos rendijas

- ▶ Para producir una fuente coherente, en 1801, Tomas Young usó una única fuente de luz, a la que hizo incidir sobre una pantalla con dos pequeñas aberturas.
- ▶ La fuente produce **luz térmica** (no monocromática, y no polarizada), con distribución espectral centrada en λ_0 .
- ▶ La fuente se encuentra lo suficientemente lejos de la pantalla para asumir que se trata de un **frente de onda plano**.
 - ▶ El ancho de las rendijas es grande frente a la λ_0
 - ▶ La separación entre las rendijas es del orden de λ_0 .
 - ▶ La luz a la salida interfiere sobre una pantalla ubicada también a una distancia grande de las rendijas (aproximación paraaxial).



Thomas Young
1773 - 1829



Interferencia

Para entender el patrón de interferencia, consideremos primero el caso de una fuente monocromática, incoherente, polarizada en una cierta dirección.

- ▶ Asumimos que el frente de onda, al alcanzar las rendijas, tiene la forma

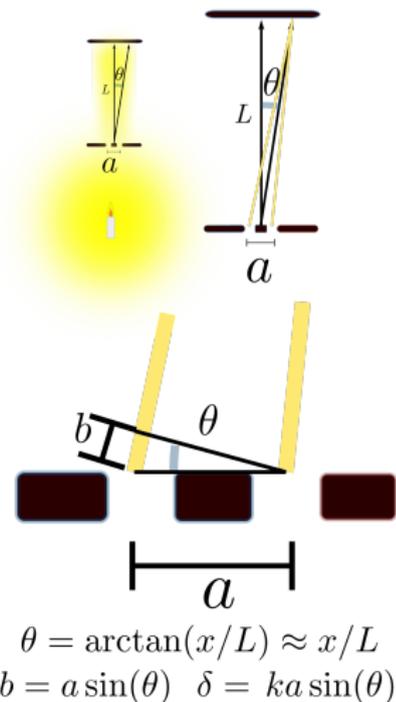
$$\vec{A}_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0 t + \phi(t)),$$

con \vec{k}_0 normal a la pantalla.

- ▶ Sobre la pantalla,

$$\begin{aligned} I &\approx I_0(1 + 2 \cos(\sin(k_0 x a / L))) \\ &= 2I_0 \cos(\sin(k_0 x a / L) / 2)^2 \end{aligned}$$

con I_0 la intensidad en ausencia de coherencia.



- ▶ Los máximos de interferencia se encuentran para

$$x = 2n\pi L / (ak_0) = n \frac{\lambda L}{a}$$

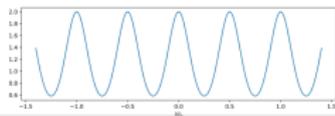
- ▶ Notemos que como para la luz del sol, (o de una vela) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1/6$, los primeros máximos y mínimos están localizados en posiciones parecidas para las diferentes longitudes de onda.
- ▶ El experimento demostró el carácter ondulatorio de la luz.



Figura 1. Patrón de interferencia, obtenido con el dispositivo de Young.



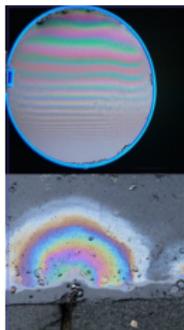
Patrón de interferencia obtenido con una fuente laser



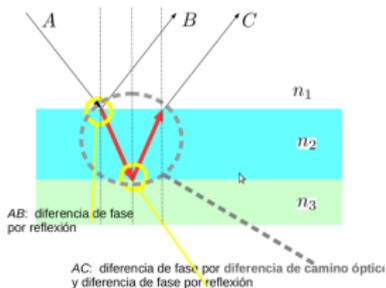
Interferencia por división de amplitudes

- ▶ Cuando la luz incide sobre una película delgada de un material transparente, esta se divide en haces reflejados y transmitidos en cada interface.
- ▶ Si el material no presenta defectos, los haces transmitidos y reflejados resultan coherentes entre sí.
- ▶ En este caso, es posible ver suficientes órdenes de interferencia como para que los máximos de intensidad para diferentes longitudes de onda se vuelvan visibles.

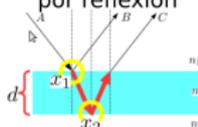
Ejemplo: Interferencia por películas delgadas



Esquema de interferencia por películas delgadas:



Interferencia por reflexión



Si $n_1 < n_2$ el haz reflejado en x_1 gana una fase de π .
 Si $n_2 < n_1$ no hay diferencia de fase por reflexión.
 En el caso de una burbuja de jabón en el aire, ($n_2 \approx 1.33, n_1 = 1$), el haz reflejado en x_1 gana una fase de π , mientras que el haz reflejado en x_2 .
 El cambio de fase por reflexión es $\delta = \pi + 0 = \pi$
 Lo mismo ocurre si $n_1, n_3 > n_2$

Entonces, en ambos casos, la diferencia de fase resulta:

$$\delta_R = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d + \pi$$

Término de interferencia: $\sim \cos(\delta)$

Calculemos la DIFERENCIA DE FASE

$$\delta_{BC} = \delta_{AB} - \delta_{AC}$$

$$\delta_{BC} = k \cdot LCO + \text{diferencias de fase por reflexión}$$

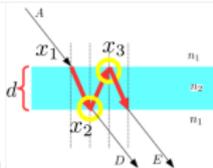
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Vector de onda

LCO (Longitud de Camino Óptico): para ángulos pequeños (e índices de refracción constantes), podemos tomarla como $LCO \approx n_2 2d$

$\pm \pi$ ó 0

Dependiendo de la relación entre índices de refracción



EJEMPLO: tomamos una película delgada de índice n_2 sumergida en un medio de índice n_1

En la interferencia por transmisión, debemos tener en cuenta la fase ganada en las reflexiones internas.
 Sin embargo, en este caso las reflexiones en x_2 y x_3 no producen cambio de fase, ya que $n_1, n_3 < n_2$.

Interferencia por transmisión

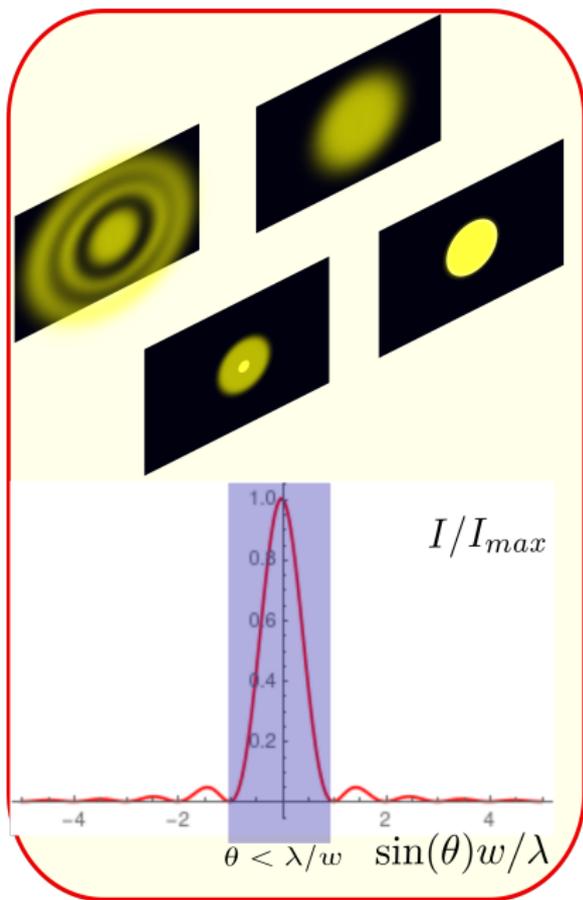
$$\delta_T = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d$$

La transmisión y la reflexión son complementarias: a un máximo de reflexión corresponde un mínimo de transmisión

$$\cos(\delta_T/2)^2 + \cos(\delta_R/2)^2 = 1$$

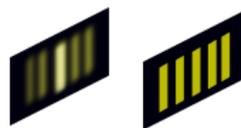
Difracción

- ▶ La difracción es un fenómeno característico de las ondas producido cuando estas encuentran un obstáculo.
- ▶ Consiste en la aparición de oscilaciones de intensidad características, en torno al borde del obstáculo.
- ▶ El efecto se vuelve visible cuando el obstáculo tiene dimensiones conmensuradas con la longitud de onda.
- ▶ Para entender este efecto, volvamos a las rendijas. . .



Interferencia por múltiples rendijas

- Podemos calcular el caso de la interferencia de muchas rendijas equiespaciadas, asumiendo que los corrimientos de fase



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \left[\frac{\vec{A}_0}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\delta} \right] = \Re \left[\frac{\vec{A}_0}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t)} \frac{e^{iNm\delta} - 1}{e^{im\delta} - 1} \right]$$

Absorbiendo $\delta\phi_0 = \frac{(N-1)m\delta}{2}$ en la fase global,

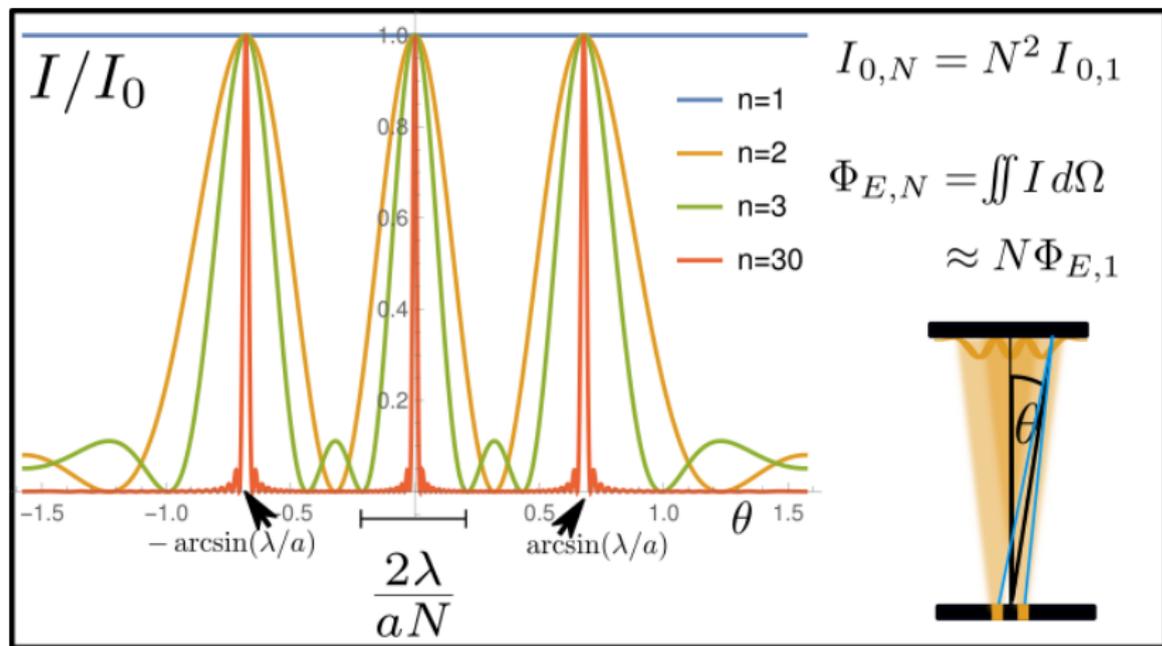
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \left[\frac{\vec{A}_0}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t + \delta\phi_0)} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]$$

Con lo que la intensidad media se expresa como

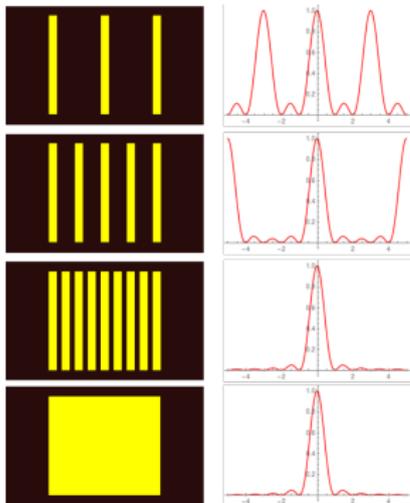
$$I = \frac{|\omega \vec{A}_0|^2 N^2}{2Z} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{N^2 \sin^2(\delta/2)} = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{N^2 \sin^2(\delta/2)}$$

Luego, para N rendijas separadas por una distancia a ,
 $\delta = ka \sin(\theta) = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin(\theta)$ y el patrón de interferencia tendrá la forma

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\pi a/\lambda \sin(\theta))}{N^2 \sin^2(\pi a/\lambda \sin(\theta))}$$



Difracción de Fraunhofer



- ▶ Supongamos ahora que la separación d entre las rendijas tiende a reducirse, mientras aumentamos su número, de manera que el ancho $w = Nd$ que mantenga constante.
- ▶ En el límite $d \rightarrow 0$,

$$I = I_{max} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi w \sin(\theta)}{\lambda}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi w \sin(\theta)}{N\lambda}\right)}$$
$$\rightarrow I_{max} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi w \sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi w \sin(\theta)}{\lambda}\right)^2}$$

- ▶ En este límite, el conjunto de rendijas es indistinguible de una única rendija de ancho w .

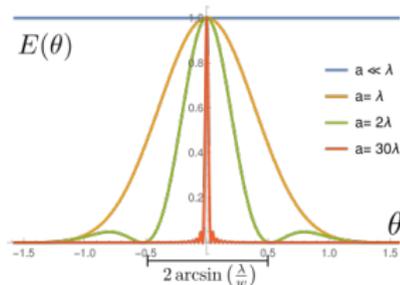
- ▶ Los mínimos de difracción se encuentran en

$$\theta_m = \arcsin \left(m \frac{\lambda}{w} \right) \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

- ▶ Los máximos se encuentran entre pares de mínimos consecutivos, y son de la forma

$$\Theta_m = \arcsin \left(\frac{\lambda \beta_m}{w} \right)$$

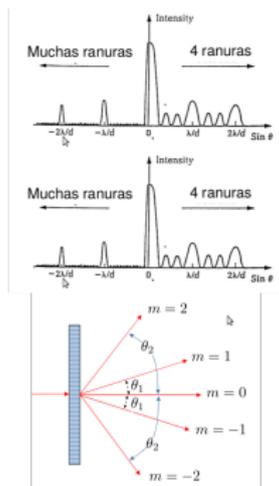
$$\beta_m = \frac{\tan(\pi \beta_m)}{\pi} \approx \left(m + \frac{1}{2} \right)$$



Redes de difracción

Consideremos ahora un arreglo periódico de perforaciones, o puntos reflectantes sobre una superficie.

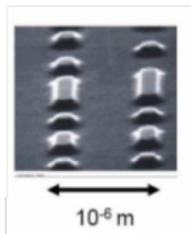
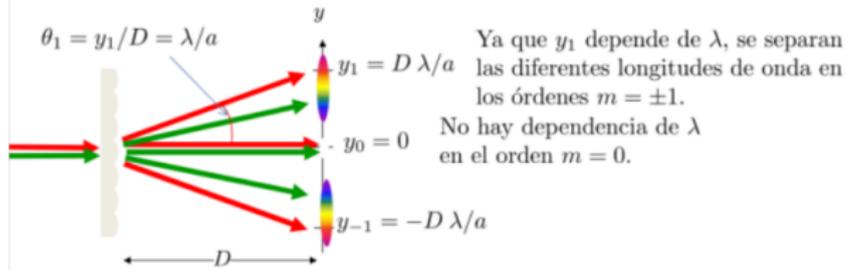
- ▶ Si las perforaciones son de ancho w , la separación entre puntos sucesivos es $a - w$ y la red es de tamaño $W \gg a$, los máximos secundarios de interferencia desaparecen \Rightarrow
- ▶ la irradiancia se proyecta en las direcciones principales: $a \sin(\theta) = m\lambda$
- ▶ como $|\sin(\theta)| \leq 1$, $|m| \leq \frac{a}{\lambda}$
- ▶ Intensidad *modulada* por el factor de difracción



$$I_m = \frac{\sin(mw\pi/a)^2}{(w\pi m/a)^2} I_0$$

Difracción de luz policromática

Dado que la posición angular de los órdenes de difracción depende de la longitud de onda λ , no coinciden sobre la pantalla los mismos órdenes distintos de cero para las diferentes longitudes de onda.



Las redes de difracción difractan diferentes longitudes de onda en diferentes direcciones, lo que permite medir el *espectro de potencia* de una fuente.

Cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es el ángulo en que se difractan los órdenes no nulos.

El ángulo de separación aumenta al disminuir la separación a de las aberturas.

Las redes de difracción pueden funcionar por transmisión o por reflexión.

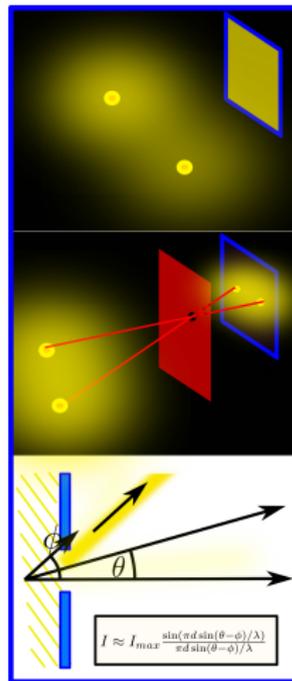
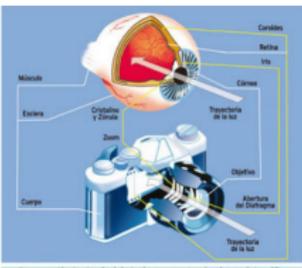
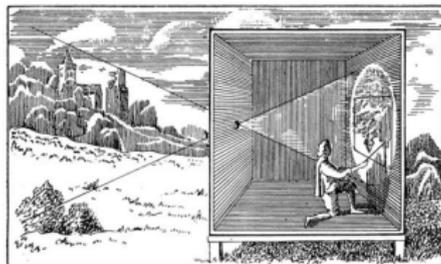
Los puntos grabados en la superficie de un CD/DVD actúan como una red de difracción. La densidad de información que almacenan está limitada por el diámetro del spot de difracción.

- CD : 625 líneas/mm.
- 3,95GB DVD-R: 1250 líneas/mm.
- 4,7GB DVD-R 1351 líneas/mm.

Difracción y límite geométrico rayos

Difracción y diafragmas

- ▶ Consideremos ahora una onda plana que incide sobre la abertura en forma *oblicua*.
- ▶ La fase sobre la abertura no es *constante*, sino que varía linealmente.
- ▶ Como resultado, el patrón de difracción se centra en la dirección del haz incidente.
- ▶ En el límite $w \gg \lambda$, recuperamos un haz de luz con dirección definida: el límite de la óptica geométrica.



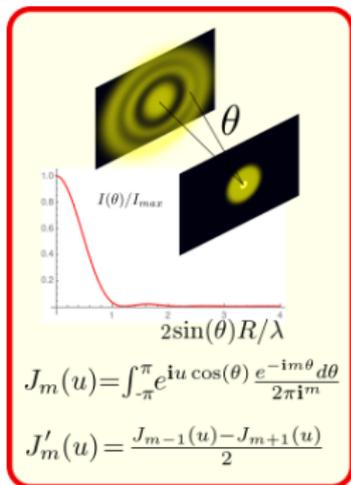
Difracción por un agujero circular

- ▶ Supongamos que en lugar de una rendija tenemos una abertura circular.
- ▶ La irradiancia para el patrón proyectado se distribuye en forma circular, y para un agujero de radio R tiene la forma

$$E(r, z) \approx E_0 \frac{k^2 R^4}{4(r^2 + z^2)} \left(\frac{2J_1(kRr/(L))}{kRr/L} \right)^2$$

donde E_0 es la irradiancia sobre el agujero, y J_1 es la **función de Bessel** de orden 1.

- ▶ El primer mínimo de irradiancia se localiza en $\sin(\theta_1) = 1.22 \frac{\lambda}{2R}$

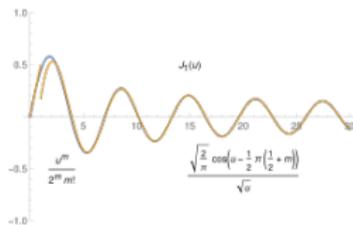


Funciones de Bessel

- ▶ Las funciones de Bessel son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial}{\partial r} J_m(u) - \frac{m^2}{u^2} J_m(u) + J_m(u) = 0$$

- ▶ Aparece en problemas con simetría cilíndrica.
- ▶ Para $u > m$ pueden aproximarse en términos de funciones trigonométricas.



$$J_m(u) \approx \begin{cases} \frac{\cos(u - \frac{\pi}{2}(m + 1/2))}{\sqrt{\pi/2u}} & u \gg m \\ \frac{u^m}{2^m m!} & u \ll m \end{cases}$$

Límite de difracción

- ▶ La difracción limita la resolución de objetos vistos a través de un sistema óptico.
- ▶ Para obtener mayores resoluciones se requieren
 - ▶ mayores diámetros en las lentes y espejos.
 - ▶ menores longitudes de onda.
- ▶ Debido al principio de Babinet, lo mismo aplica al intentar distinguir dos objetos separados por distancias menores a la longitud de onda de la luz usada para iluminarlos.

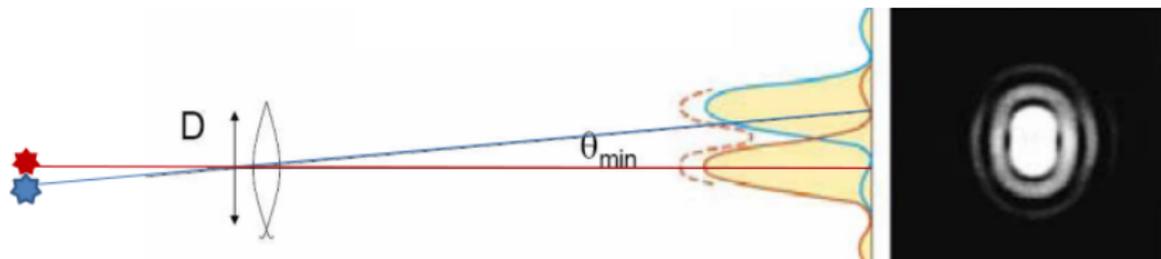
Criterio de Rayleigh

- ▶ La difracción por aberturas circulares es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen este tipo de aberturas.
- ▶ La limitación en la resolución de las imágenes se cuantifica en términos del criterio de Rayleigh con el que la resolución límite de un sistema puede ser calculado:
- ▶ Para resolver dos objetos por una lente circular de diámetro D , la distancia mínima entre estos es aquella en la que el máximo de intensidad de la imagen de uno de ellos se localiza en la posición del primer mínimo de intensidad de la imagen del otro.

Criterio de Rayleigh

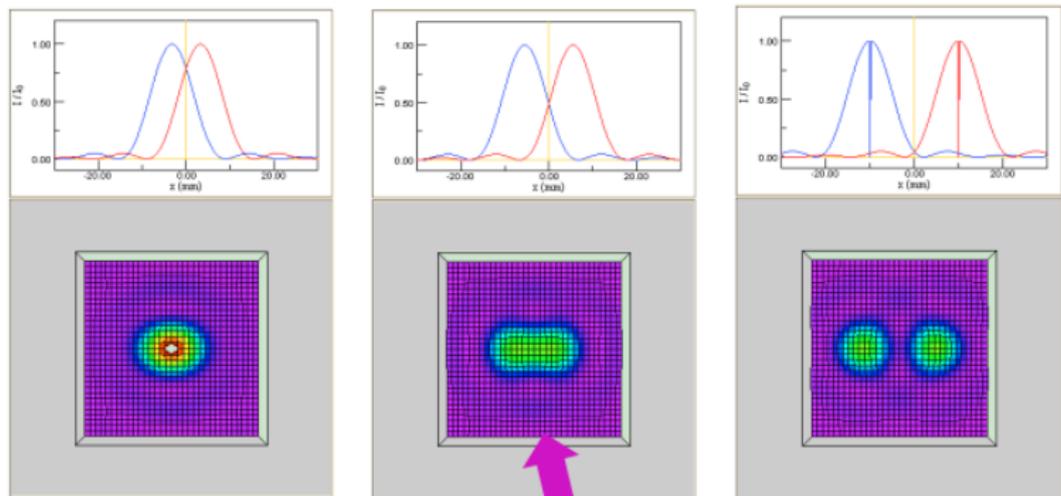
- ▶ La difracción por aberturas circulares es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen este tipo de aberturas.
- ▶ La limitación en la resolución de las imágenes se cuantifica en términos del criterio de Rayleigh con el que la resolución límite de un sistema puede ser calculado:
- ▶ Para resolver dos objetos por una lente circular de diámetro D , la distancia mínima entre estos es aquella en la que el máximo de intensidad de la imagen de uno de ellos se localiza en la posición del primer mínimo de intensidad de la imagen del otro.

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$



Poder resolvente

El hecho de que la imagen formada por una lente es un patrón de difracción es importante cuando se trata de resolver objetos distantes



Cuando la separación angular entre dos objetos es tal que el máximo central del patrón de difracción de uno de los objetos coincide con el primer mínimo del otro objeto tenemos una condición para la *resolubilidad*

$$\theta_R = \text{sen}^{-1} \left(1,22 \frac{\lambda}{D} \right) \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

El ojo humano y los telescopios

- ▶ Suponiendo $\lambda = 500\text{nm}$, y un diámetro de pupila de $D = 3\text{mm}$, entonces

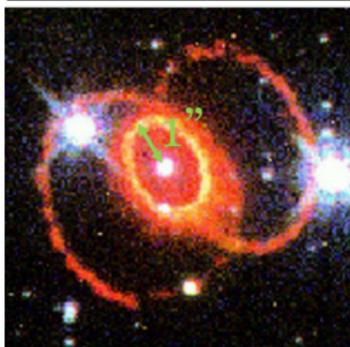
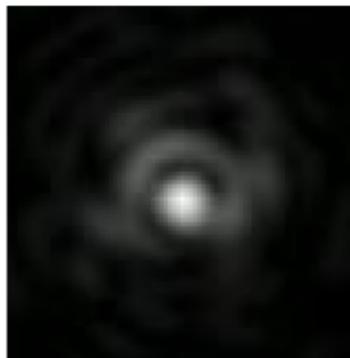
$$\theta_R = 1,22 \times \frac{5 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} \text{rad} \quad (1)$$

$$= 0,2\text{mrad} \approx 40'' \text{ de arco} \quad (2)$$

- ▶ Idealmente, dos puntos separados por un milímetro, pueden resolverse hasta a 5 metros de distancia.
- ▶ Los defectos visuales acortan esta distancia.
- ▶ El espejo del telescopio espacial Hubble tiene un diámetro de 2,4m. Luego, su poder de resolución es en el visible de

$$\theta_R = 0,25\mu\text{rad} \approx 0,043'' \text{ de arco}$$

- ▶ Debido a la turbulencia atmosférica, un



Ejercicio:

Alpha Centauri-B es parte del sistema binario Alpha-Centauri, que se encuentra a 4.4 años luz de la tierra. En torno a ella, orbita un planeta cuyo radio orbital es de 0.04ua ($1\text{ua} \approx 8$ minutos luz es el radio de la órbita terrestre).

De acuerdo al criterio de Rayleigh, determine el diámetro mínimo de un telescopio que pueda distinguir a la estrella del planeta para longitudes de onda de 300m (ondas de radio), 500nm (luz visible) y 10nm (Rayos X).

Cómo fotografiar un agujero negro

- ▶ Un agujero negro es un objeto astronómico tan masivo que la luz no puede escapar de su propia gravedad.
- ▶ Fue predicho por la teoría de la relatividad general de A. Einstein.
- ▶ El objeto tiene relevancia en astrofísica.
- ▶ Tiene un tamaño aparente de $15'' \times 10^{-6} \approx 72 \text{prad}$ de arco.
- ▶ Para obtener una fotografía con resolución fotográfica, se requiere resolver a la milésima de ese arco:
 $\theta_R = 72 \text{frad}$.
- ▶ $D > 500 \text{nm} / (72 \text{frad}) \approx 7000 \text{km}$ (El radio de la tierra es 6300km).



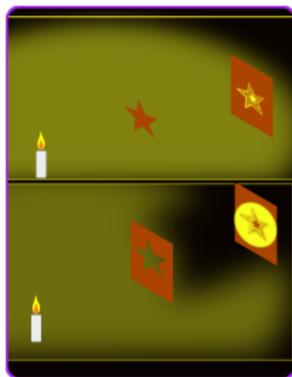
Difracción por aberturas y dispersión por obstáculos

Principio de Babinet

- ▶ El principio de Babinet establece que el patrón de difracción de un obstáculo es complementario al que se obtiene por una pantalla con el obstáculo recortado.
- ▶ Es una consecuencia del principio de superposición lineal que cumplen las soluciones de la Ecuación de ondas.
- ▶ Puede probarse mediante las técnicas de la Óptica de Fourier.

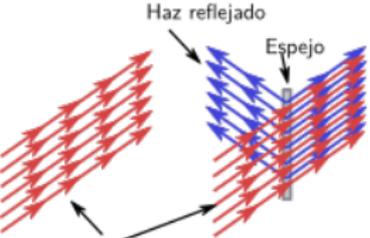
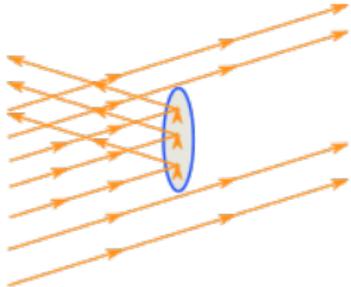


Jean-Baptiste Fourier
1768-1830



Jaques Babinet
1794 - 1872

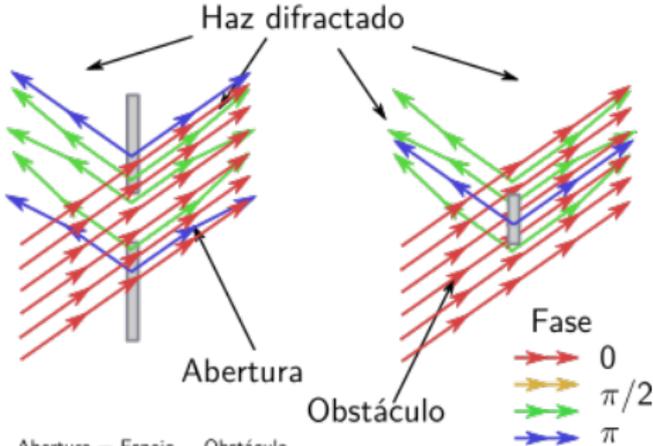
Dispersión por un disco reflectante



Haz incidente

$$\vec{A} = \vec{A}_{inc}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{inc} + \vec{A}_{esp}$$



- Fase
- 0
 - $\pi/2$
 - π
 - π

Abertura = Espejo - Obstáculo

$$\vec{A}_{abertura} = \vec{A}_{inc} + \vec{A}_{dia}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{inc} + \vec{A}_{obs}$$

Babinet $\rightarrow \vec{A}_{dia} + \vec{A}_{obs} = \vec{A}_{esp}$

Sección Eficaz de dispersión

- ▶ Es la razón entre el flujo *dispersado* y la densidad de flujo incidente:

$$\sigma = \frac{\Phi_{disp}}{E_{inc}}$$

- ▶ En el límite de la óptica geométrica ($\lambda \rightarrow 0$), se reduce a la sección transversal del obstáculo.
- ▶ Para ondas absorbidas por un absorbente perfecto, σ depende de la longitud de onda.
- ▶ La relación entre la intensidad angular y el flujo incidente es la **sección eficaz diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I_E(\Omega)}{E}$$

- ▶ Como resultado de la dispersión, la intensidad en la dirección de incidencia se ve reducida en σ_{disp}

Sección eficaz para un espejo circular

- ▶ Usando el principio de Babinet, la intensidad a ambos lados de un espejo circular se expresa como

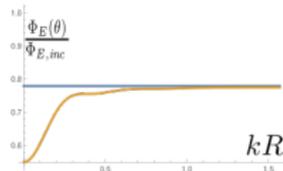
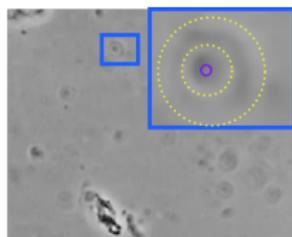
$$I(r) = E_0 \left(\frac{R_0}{2} \frac{J_1(kR \sin(\theta))}{\tan(\theta)} \right)^2$$

con E_0 la irradiancia que alcanza al espejo.

- ▶ Integrando sobre el ángulo sólido y dividiendo por E_0 obtenemos

$$\frac{\Phi_E}{E_0} = \sigma_{total} \approx \begin{cases} 2\pi R^2 & kR \gg 1 \\ \frac{\pi R^4 k^2}{3} & kR \ll 1 \end{cases}$$

- ▶ El factor 2 en el límite geométrico viene de la dispersión *hacia adelante* (penumbra).
- ▶ Identificamos $\sigma_R = \sigma_{total}/2$ a la sección eficaz correspondiente a la reflexión.



Sección eficaz de absorción

- ▶ Si en lugar de un espejo interponemos un disco *absorbente* parte de la radiación incidente se convierte en otra forma de energía.
- ▶ La sección eficaz total será la misma que para disco reflectante: la reducción en la intensidad en la dirección incidente es la misma.

Ejercicios

- ▶ Determinar la sección eficaz de absorción para un disco que refleja con un coeficiente de albedo η .
- ▶ Mediante integración numérica, graficar la sección eficaz total para un disco de radio R , como función de λ/R .