Clase 05 - Ondas y Energía. Interfaces.

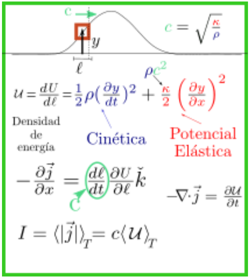
Prof. Juan Mauricio Matera

30 de septiembre de 2024

Energía, potencia e intensidad

Energía y corriente conservada

- En el curso de Física General II, aprendimos que al propagarse, una onda mecánica transporta energía y cantidad de movimiento.
- Estas son *cantidades conservadas* $\Rightarrow$ satisfacen la *Ecuación de Continuidad*.
- Cuando la onda es *periódica* se define la *intensidad I* como la *densidad de flujo promedio*.
- Vamos a ver ahora que podemos *deducir* la forma de la *densidad de energía* a partir de la *ecuación de onda* y la *ecuación de continuidad*.
- Esto nos va a servir para analizar el flujo de energía en ondas que no son *mecánicas* (p.e. las ondas electromagnéticas).



Caso general

$$\vec{s}_E = -\frac{c}{Z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi$$

Impedancia

Ej: $Z = \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}}$

$c = \sqrt{\kappa/\rho}$

$$\boxed{\nabla\cdot f\vec{A} = \nabla f\cdot\vec{A} + f\nabla\cdot\vec{A}}$$

$$\nabla\cdot\vec{s}_E = -\frac{c}{Z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\nabla^2\psi - \frac{c}{Z}\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}\cdot\nabla\psi$$

$$= -\frac{c}{Z}\left(\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}\cdot\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$$

$$= -\frac{c}{2Z}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\psi\cdot\nabla\psi + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

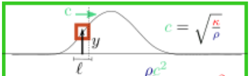
$$\boxed{\frac{df(s)^2}{ds} = 2\frac{df(s)}{ds}f(s)}$$

$$\mathcal{U} = \frac{c}{Z}\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right)$$

$\psi(\check{k}\cdot\vec{x} - ct) \Rightarrow$

$$\mathcal{U} = \frac{c}{Z}(\psi'(\check{k}\cdot\vec{x} - ct))^2$$

$$\vec{s}_E = \mathcal{U}c\check{k}$$



$$\mathcal{U} = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{dt}\right)^2 + \overset{\rho c^2}{\frac{\kappa}{2}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Densidad de energía

Cinética

Potencial Elástica

$$-\frac{\partial\vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt}\frac{\partial U}{\partial\ell}\check{k}$$

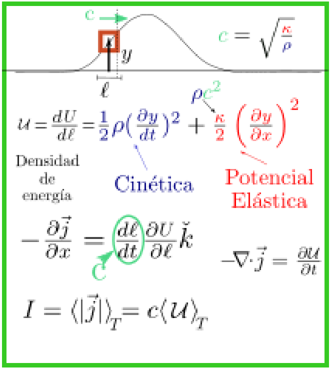
C

$$-\nabla\cdot\vec{j} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}$$

$$I = \langle|\vec{j}|\rangle_T = c\langle\mathcal{U}\rangle_T$$

Impedancia

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{s}_E &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \\
\mathcal{U} &= \frac{c}{2Z}\left(|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2\right) \\
\vec{s}_E &= -\frac{c}{Z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi
\end{aligned}$$



- La impedancia Z es una propiedad del medio que relaciona la *amplitud* de la onda con la *energía* que transporta.
- Si $\vec{A}$ es un *desplazamiento*, $\vec{F} = -c\vec{A}/Z$ es el *esfuerzo restaurador* que se le opone: $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{F}$ es el *trabajo* que hace esa fuerza cuando *avanza* la onda.
- Sus unidades dependen de las unidades de ψ.
- Para una *onda elástica* $c = \sqrt{Y/\rho}$ y $Z = \frac{1}{\sqrt{Y\rho}}$ con Y el *módulo de elasticidad*.

Ondas armónicas

Para ondas que oscilan rápidamente, lo que interesa es el *valor medio* de la densidad de flujo, cuya magnitud es la **irradiancia**

$$\nabla\cdot\vec{s}_E = -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t} \qquad \vec{s}_E = -\frac{c}{Z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi \qquad \mathcal{U} = \frac{c}{Z}\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$\psi(\vec{x},t) = \Re\,\Psi(\vec{x})e^{-\mathbf{i}\omega t}$$

Onda armónica

$$\nabla^2\Psi + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi = 0$$

$$\langle\mathcal{U}\rangle_T = \frac{c}{2Z}\Re\left(|\nabla\Psi|^2 + \frac{\omega^2}{c^2}|\Psi|^2\right)$$

$$\langle\vec{j}\rangle_T = \frac{c\omega}{2Z}\Re\Psi^*(-\mathbf{i}\nabla\Psi)$$

$$\nabla\cdot\langle\vec{s}_E\rangle_T = \langle\nabla\cdot\vec{s}_E\rangle_T = \langle-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}\rangle_T = 0$$

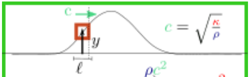
Onda plana

$$\Psi(x) = \Psi_0 e^{\mathbf{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\check{k}$$

$$\nabla\cdot\Psi = \mathbf{i}\vec{k}\Psi$$

$$\langle\mathcal{U}\rangle = \frac{|\omega\Psi_0|^2}{2cZ}$$

$$\langle\vec{s}_E\rangle = \frac{|\omega\Psi_0|^2}{2Z}\check{k} = \langle\mathcal{U}\rangle c\check{k}$$



$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

$$\mathcal{U} = \frac{dU}{d\ell} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{dt}\right)^2 + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad \kappa = \rho c^2$$

Densidad de energía — Cinética — Potencial Elástica

$$-\frac{\partial\vec{j}}{\partial x} = \frac{d\ell}{dt}\frac{\partial U}{\partial\ell}\check{k} \qquad \frac{d\ell}{dt} = c$$

$$-\nabla\cdot\vec{j} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}$$

$$I = \langle|\vec{j}|\rangle_T = c\langle\mathcal{U}\rangle_T$$

Ondas armónicas y principio de Fermat

Aproximación Eikona

Forma polar de la amplitu

$$\Psi(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{\mathbf{i}}$$

Para funciones rápidament

$$|\nabla^2 A| \ll |\nabla\phi|^2$$

Solución general. Espectro de potencia

Solución general

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{A}_{\vec{k}} e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{A}_\lambda(\vec{r}) e^{-\mathrm{i}\omega_\lambda t} d\lambda$$

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = \int \vec{A}_{\frac{2\pi}{\lambda}\check{k}} e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\check{k}\cdot\vec{r}} d\Omega$$

Solución armónica

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ Relación de dispersión

$\vec{A}_{\vec{k}}$ Amplitudes complejas

$\vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$ (onda transversal).

Cambio de variables

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{k^2 dk d^2\check{k}}{2\pi^3} \equiv d\lambda d\Omega$$

Densidad de corriente conservada

$$\vec{s}_E(\vec{r}) = \Re\left[\frac{c\omega}{2Z}\vec{A}^*(-\mathbf{i}\nabla)\vec{A}\right]$$

$$\vec{s}_E(\vec{r}) = \int \vec{s}_{E,\lambda} d\lambda$$

$$\vec{s}_{E,\lambda}(\vec{r}) = \Re\left[\frac{c\omega}{2Z}\vec{A}^*_\lambda(-\mathbf{i}\nabla)\vec{A}_\lambda\right]$$

Las componentes se conservan por separado

$$\nabla \cdot \vec{s}_{E,\lambda} = 0$$

$$\mathcal{P}(\lambda) \propto |\vec{s}_{E,\lambda}|$$

Espectro de potencia

Ejercicios

- Dar una expresión para la relación entre la amplitud y la densidad de energía que transporta una onda esférica.
- Construir una solución aproximada cuya densidad de flujo represente un haz cilíndrico polarizado linealmente con longitud de onda de $500\mathrm{nm}$.

Medios dispersivos y absortivos

La ecuación de onda con términos dispersivos y de absorción

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{A} - \omega_0^2 \vec{A} - \eta \frac{d\vec{A}}{dt}$$

término elástico local

término viscoso

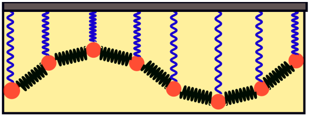
Remplazando $\vec{A}$ por una onda plana

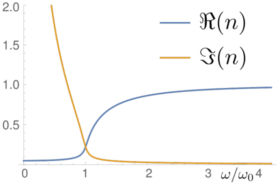
$$\vec{A} = \Re \vec{\mathcal{A}}_0 e^{\mathbf{i}(k\check{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

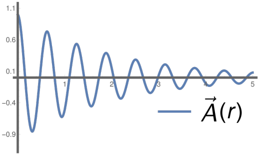
$$-\omega^2 \vec{\mathcal{A}} = \left(-c^2 k^2 - \omega_0^2 + \mathbf{i}\omega\eta\right) \vec{\mathcal{A}}$$

Luego, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \mathbf{i}\frac{\eta}{\omega}}$

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \mathbf{i}\frac{\eta}{\omega}}$$







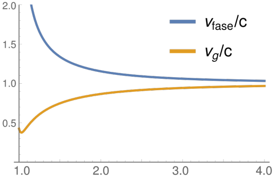
- Veremos más adelante una descripción más realista de estos términos.

Velocidad de Fase y velocidad de grupo

Velocidad de fase

- índice de refracción
- velocidad de las ondas monocromáticas (deslocalizadas)

$$\frac{\omega}{k} = v_{fase} = \frac{c}{n}$$



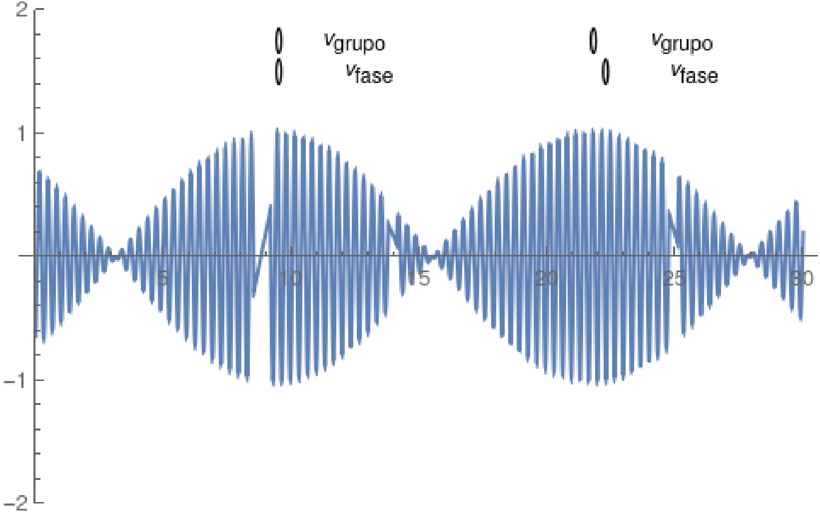
coinciden

- en medios no dispersivos.
- en el límite de altas frecuencias.

Velocidad de grupo

- velocidad del *paquete de ondas*.
- velocidad con la que *fluye* la *información* (pulsos).

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{dk} = (\frac{dk}{d\omega})^{-1}$$
$$= \frac{1}{\frac{dn}{d\omega} + v_{fase}}$$



2
1
−1
−2
5
10
15
20
25
30
v_{grupo}
v_{fase}
v_{grupo}
v_{fase}

Densidad de flujo para ondas dispersivas

Fuerza armónica + arrastre

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{A} - \omega_0^2 \vec{A} - \eta \frac{d\vec{A}}{dt}$$

término elástico local

término viscoso

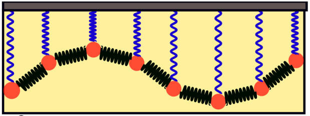
$$\nabla \cdot \vec{s}_E = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{U}_E + \mathcal{U}_{osc}) - \frac{dW_{arrastre}}{dt}$$

$$\mathcal{U}_{osc} = \frac{\omega_0^2}{2Zc}|\vec{A}|^2$$

Energía elástica

$$W_{arrastre} = -\int \frac{\eta}{Zc}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)^2$$

$\propto$ Energía Cinética



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = c^2 \nabla^2 \vec{A} + \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{s}_E &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_E + \frac{1}{cZ}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{F} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_E + \frac{dW}{dt} \end{aligned}$$

$$W = \int \frac{1}{Zc}\vec{F} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}dt$$

Trabajo de la fuerza $\vec{F}$

Onda Plana

$$\langle \vec{s}_E \rangle = \frac{\Re n(\omega)}{2Z}|\omega \vec{A}|^2 = \Re \frac{|\omega \vec{A}|^2}{2Z(\omega)}$$

$$Z(\omega) = \frac{Z}{n(\omega)}$$

Anisotropías y polarización

- En medios anisótropos, la absorción y la dispersión pueden depender de la polarizacion.
- El efecto de la relación de dispersión *anómala* da origen al fenómeno de la *birefringencia*.
- Los polarizadores funcionan absorbiendo con mayor intensidad una de las componentes de polarización que la otra $\to$ Ley de Malus.

Medios inhomogeneos

Interface entre dos medios homogeneos

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \begin{cases} \vec{A}_I(\vec{r},t) + \vec{A}_R(\vec{r},t) & \check{n}\cdot\vec{r} > 0 \\ \vec{A}_T(\vec{r},t) & \check{n}\cdot\vec{r} < 0 \end{cases}$$

$$\vec{A}_{\alpha=I,R,T}(\vec{r},t) = \Re\vec{\mathcal{A}}_{\alpha}^{(0)} e^{\mathrm{i}(\vec{k}_\alpha\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$|\vec{k}_\alpha| = \frac{n_\alpha}{c}\omega$$

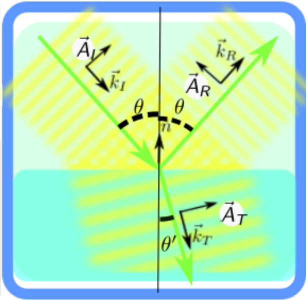
$$\vec{A}_\alpha\cdot\vec{k}_\alpha = 0$$

Continuidad

$$\vec{A}_I(\vec{r},t) + \vec{A}_R(\vec{r},t) - \vec{A}_T(\vec{r},t)\Big|_{\check{n}\cdot\vec{r}=0} = 0$$

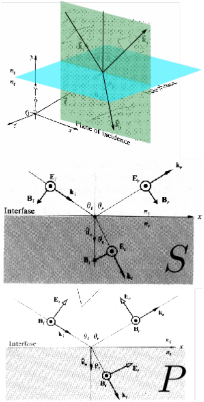
$$\vec{k}_I\times\check{n} = \vec{k}_\alpha\times\check{n} \Rightarrow n_I\sin(\theta_I) = n_\alpha\sin(\theta_\alpha)$$

Snell



Coeficientes de Fresnel

- Una vez conocidas las direcciones de propagación, en medios lineales no absortibos, la **ecuación de continuidad** permite determinar la irradiancia y polarización de las ondas transmitidas y reflejadas.
- Dos direcciones de polarización conservadas: En el plano de incidencia (P) y paralela a la interface (S).



Incidencia normal

Continuidad de la componente tangencial de A

$$A_I + A_R = A_T$$

Conservación de la energía

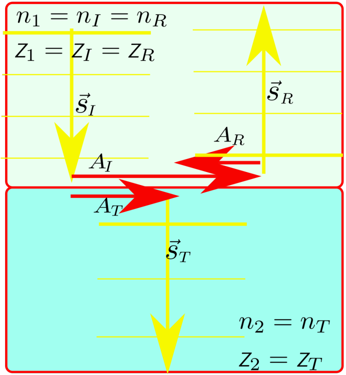
$$\iint \vec{s}\,dS = |\vec{s}_R| + |\vec{s}_T| - |\vec{s}_I| = 0$$

$$\vec{s}_\alpha = \frac{\omega^2}{2}\frac{|\vec{A}|^2}{Z_\alpha}\check{k}$$

$$\frac{A_R^2 - A_I^2}{Z_1} = \frac{A_T^2}{Z_2}$$

$$\boxed{Z_\alpha \propto \frac{1}{n_\alpha}}$$

Impedancia



$$A_I + A_R = A_T$$

$$\frac{A_R^2 - A_I^2}{z_1} = \frac{A_T^2}{z_2}$$

$$\frac{(A_I + A_R)(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_T^2}{z_2}$$

$$\frac{\cancel{A_T}(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_T^{\cancel{2}}}{z_2}$$

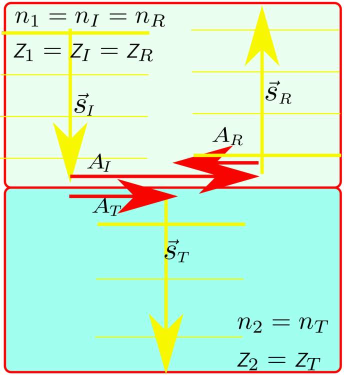
$$\frac{(A_I - A_R)}{z_1} = \frac{A_I + A_R}{z_2}$$

Despejando A_R

$$A_R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} A_I$$

o, para un medio no magnético

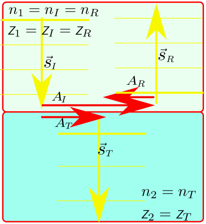
$$A_R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_I$$



Impedancia $\boxed{Z_\alpha \propto \frac{1}{n_\alpha}}$

$$A_R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_I$$

$$A_T = A_I + A_R = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_I$$



- Si $n_1 < n_2$ $(z_1 > z_2)$, los signos de A_I y A_R son opuestos: *La onda reflejada gana una fase de* π.
- Si el segundo medio es un **conductor** no hay onda transmitida: luego $A_R = -A_I$ con lo que es un caso equivalente a $n_2 \to \infty$ $(z_2 \to 0)$.
- Si $n_1 > n_2$ $(z_1 < z_2)$, la amplitud de $A_T > A_I$. Sin embargo, la **irradiancia** transmitida *es menor*.
- Si $n_1 = n_2$ $(z_1 = z_2)$, no hay onda reflejada: desde un punto de vista óptico, es un único medio.

Caso general

Polarización	$\vec{A}_R^{(0)}$	$\vec{A}_T^{(0)}$
S	$-r_S \vec{A}_I^{(0)}$	$t_S \vec{A}_I^{(0)}$
P	$-r_P \check{k}_R \times (\vec{A}_I \times \check{k}_I)$	$t_P \check{k}_T \times (\vec{A}_I \times \check{k}_I)$

con

$$t_p = \begin{cases} \frac{2\cos(\theta_I) z_2}{\cos(\theta_I) z_2 + \cos(\theta_T) z_1} & p = S \\ \frac{2\cos(\theta_I) z_2}{\cos(\theta_I) z_1 + \cos(\theta_T) z_2} & p = P \end{cases} \qquad r_p = \begin{cases} 1 - t_S & p = S \\ 1 - \frac{z_2}{z_1} t_P & p = P \end{cases}$$

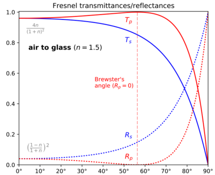
los **coeficientes de Fresnel** y z_α las **impedancias** de los medios.

- Para ondas electromagnéticas en medios no magnéticos, $z_m \propto 1/n_\alpha$.
- En ondas electromagnéticas, $\mu_m \approx \mu_0 \Rightarrow z_m = z_0/n_m$ con $z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 376\Omega$.

Las irradiancias de los haces reflejado y transmitido son entonces

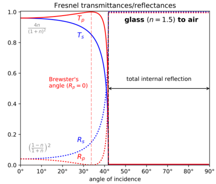
$$E_R = r_S^2 E_I^{(S)} + r_P^2 E_I^{(P)} \quad \text{e}$$

$$E_T = \left(t_S^2 E_I^{(S)} + t_P^2 E_I^{(P)} \right)$$

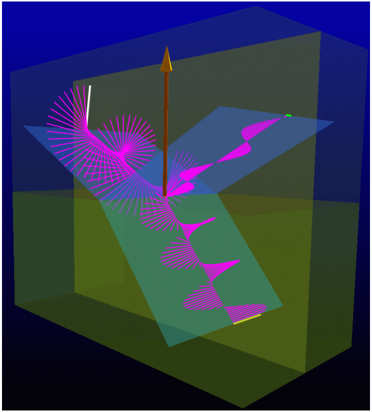


La componente normal de la densidad de flujo se conserva para cada polarización:

$$E_I^p \cos(\theta_i) = E_R^p \cos(\theta_i) + E_T^p \cos(\theta_t) \quad p = S, P$$



Ángulo de Brewster



Para una onda con polarización P, existe un ángulo θ_B tal que se anula el coeficiente de reflexión. Esto ocurre si

$$\begin{aligned} \cos(\theta_B) &= z_2/z_1 \cos(\theta_B^T) \\ &= z_2/z_1 \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \sin(\theta} \end{aligned}$$

Asumiendo un medio no magnético, $z_m = z_0/n_m$. Remplazando y despejando,

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

- Para este ángulo, la luz reflejada sólo puede tener polarización S.

Ejercicios

- Determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para la luz que incide en forma normal sobre la cornea del ojo humano.
- Calcular el ángulo de Brewster para la luz que incide desde el aire a la superficie de un cuerpo de agua.