

Clase 04 -El modelo ondulatorio.

Prof. Juan Mauricio Matera

26 de agosto de 2024

La ecuación de ondas

Ondas en 3 Dimensiones

- ▶ **Ecuación de onda vectorial tridimensional:**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

donde

- ▶ $\vec{A}(t, \vec{x})$ es un **campo vectorial**.
- ▶ $c = 2.99 \times 10^8 \text{ m/s}$ es la **velocidad de propagación** de las ondas.
- ▶ Es análoga a la ecuación para las ondas mecánicas en un medio elástico.
- ▶ Las ondas electromagnéticas son *transversales*: $\vec{A}$ oscila en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
- ▶ Es una *ecuación lineal*
- ▶ Las soluciones de esta ecuación pueden escribirse como la **superposición de ondas planas**.

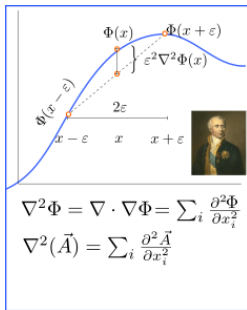
El operador Laplaciano

- ▶ Es un *operador lineal*.

$$\nabla^2(a\psi + b\phi) = a\nabla^2\psi + b\nabla^2\phi$$

- ▶ *Independiente* del sistema de coordenadas *cartesianas*.
- ▶ Para una *función escalar* es la *divergencia del gradiente*.
- ▶ Para una *función vectorial* es el vector que se obtiene al aplicarle ∇^2 a sus *componentes cartesianas*.
- ▶ Se anula para funciones lineales.
- ▶ Representa cuánto se aparta el valor de la función en un punto del *promedio* (su aproximación lineal):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\vec{x}) \approx \frac{\phi(\vec{x} + \varepsilon\check{u}_z) + \phi(\vec{x} - \varepsilon\check{u}_z) - 2\phi(\vec{x})}{\varepsilon^2}$$



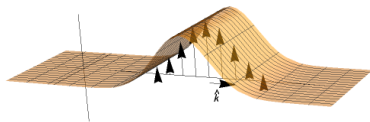
Ondas viajeras

- ▶ La familia más simple de soluciones son las llamadas *ondas viajeras*:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\check{k} \cdot \vec{x} - ct, 0)$$

Ejercicio: mostrar que es solución. Tip: elegir $\check{k}$ como eje z.

- ▶ Estas soluciones se mueven en la dirección de $\check{k}$ con velocidad c .
- ▶ En una onda transversal $\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \check{k} = 0$.
- ▶ Sus frentes de onda son planos perpendiculares a $\check{k}$.
- ▶ no sirven para modelar ondas cerca de una fuente localizada.



$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{x}, t) = \nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t)$$

Ondas esféricas

- Consideremos soluciones $\vec{A} = \vec{A}_0 \phi(r, t)$ con r la *distancia a una fuente puntual*

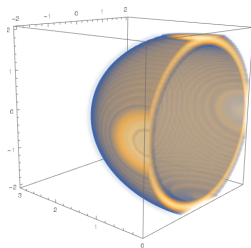
$$f(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r}$$

llamamos a estas soluciones *ondas esféricas*.

- A distancias grandes de la fuente, podemos aproximar estas soluciones por la de una onda viajera.
- $\vec{A}(r, t) = \vec{A}_0 \frac{f(r-ct)}{r}$ *no es una onda transversal* pero comparten con estas mucho de su comportamiento.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \nabla^2 \phi$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \phi(r)$$



Ondas Periódicas y ondas Armónicas

- ▶ Una clase de soluciones de la Ec. de ondas son aquellas de la forma $\vec{A}(\vec{x}, t)$ con t una *función periódica* en el tiempo:

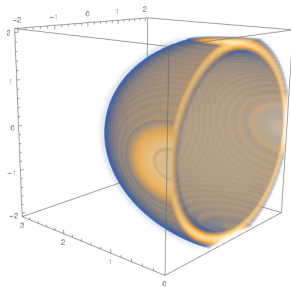
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t + T)$$

con T el *período* de la onda.

- ▶ Dentro de las ondas periódicas, una familia muy importante es la de las *funciones armónicas*

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{x}))$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la *frecuencia angular*, y $\vec{A}(\vec{x})$ y $\varphi(\vec{x})$ una amplitud y una *fase* que dependen de la posición.



Ejemplos

- ▶ Ondas planas viajeras:

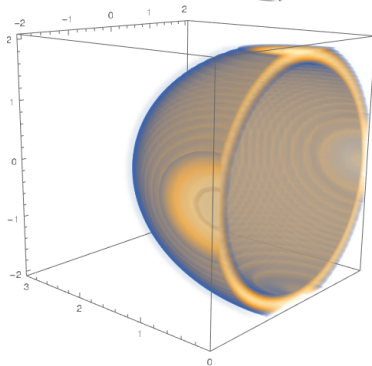
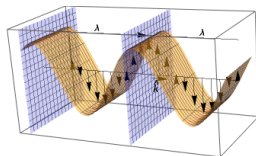
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

- ▶ Ondas esféricas:

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\vec{A}_0}{r} \cos(\omega t - kr)$$

con $k = \omega/c$ el *número de onda* y $\vec{k} = k\hat{k}$ el *vector de onda*.

- ▶ Notemos que $\vec{A}(\vec{x})$ y $\varphi(\vec{x})$ no son independientes: están vinculadas por la Ecuación de onda.



Ondas planas

- ▶ Se pueden expresar como una combinación lineal de *soluciones separables*

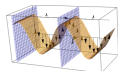
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_c \cos(\omega t + \phi_0) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) + \vec{A}_s \sin(\omega t + \phi_0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x})$$

- ▶ Sus frentes de onda son *planos* transversales a $\vec{k}$.
- ▶ Se propagan en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad c .
- ▶ Son periódicas en el espacio:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x} + \lambda \vec{k}, t)$$

con $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ la *longitud de onda*.

- ▶ *base completa de soluciones*: toda solución es *combinación lineal* de ondas planas.
- ▶ Veamos ahora como *simplificar* el tratamiento de estas



Amplitud vectorial:	$\vec{A} = A\vec{\hat{A}}$
Amplitud:	A
Polarización:	$\vec{\hat{A}}$
Frecuencia:	$f = \frac{1}{T}$
Frecuencia angular:	$\omega = 2\pi f$
Número de onda:	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Dirección de propagación:	$\vec{k}$
Vector de Onda:	$\vec{k} = k\vec{\hat{k}}$
Transversalidad:	$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = a + \mathbf{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a + \mathbf{i}b$$

$$w = c + \mathbf{i}d$$

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

Operaciones elementales

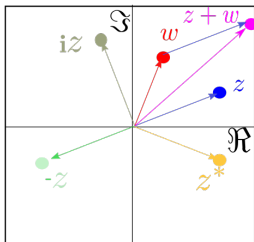
suma $z + w = (a + c) + \mathbf{i}(b + d)$

multiplicación $wz = zw = (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc)$

conjugación $z^* = a - \mathbf{i}b$



Girolamo Cardano
("Tartaglia")
1501 - 1576



$$z^*z = a^2 + b^2 = |z|^2 \geq 0 \quad |z| \text{ "Módulo de } z"$$

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{w^*w} = \frac{zw^*}{|w|^2} \text{ "cociente"}$$

$$\Re(z) = a = \frac{z+z^*}{2} \text{ "Parte Real"}$$

$$\Im(z) = b = \frac{z-z^*}{2\mathbf{i}} \text{ "Parte Imaginaria"}$$

Fórmula de Euler

$$\exp(z) = \exp(a + \mathbf{i}b) = e^a e^{\mathbf{i}b} \quad \text{“Fase”}$$

$$e^{\mathbf{i}b} = \cos(b) + \mathbf{i} \sin(b)$$

Fórmula de Euler

$$z = |z| e^{\mathbf{i}\varphi}$$

“Forma polar”

$$\ln(z) = \ln(|z|) + \mathbf{i}\varphi$$

“Logaritmo natural”



Leonhard Euler
 (“Oiler”)
1707 - 1783

$$e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$$

$$e^{\mathbf{i}\pi} = -1$$

$$e^{-\mathbf{i}\pi/2} = -\mathbf{i}$$

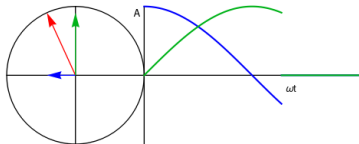
$$e^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

$$\frac{de^{zt}}{dt} = ze^{zt}$$

“Derivada”

Forma compleja de la onda armónica

- Conviene expresar las componentes de la onda armónica en términos de una “onda compleja”



$$\psi(\vec{x}, t) = \Re \left(\Psi(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right)$$

- Las derivadas *conmutan* con la parte real, luego
 - $\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow -i\omega \Psi(\vec{x})$
 - $\nabla \psi(\vec{x}) \rightarrow \nabla \Psi(\vec{x})$
- Remplazando en la Ecuación de onda,

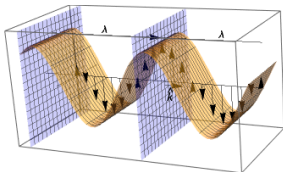
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \nabla^2 \psi \rightarrow -k^2 \Psi(\vec{x}) = \nabla^2 \Psi(\vec{x})$$

con $k = \frac{\omega^2}{c^2}$. Esta ecuación se conoce como *Ecuación de Helmholtz*.

Forma compleja de la onda plana

$$\nabla^2 \Psi(\vec{x}) + \kappa^2 \Psi(\vec{x}) = 0$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c}$$



- Eligiendo $\Psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ recuperamos la *onda plana*

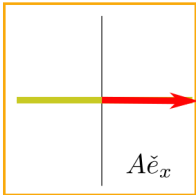
$$\psi(\vec{x}, t) = \Re \vec{\mathcal{A}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

con $|\vec{k}| = k = \omega/c$.

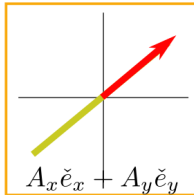
- Si la onda es *transversal*,
 $\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}_0 = 0$
- Si $\vec{\mathcal{A}}_0 = \vec{A}_0 e^{i\phi_0}$ obtenemos una *onda polarizada linealmente* en la dirección de $\vec{A}_0$.
- Si las componentes de $\vec{\mathcal{A}}_0$ no están *en fase* obtenemos una *onda circularmente polarizada*.

Polarización de ondas planas transversales

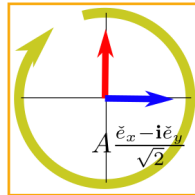
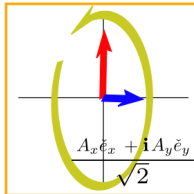
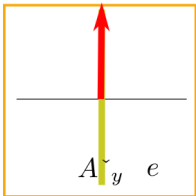
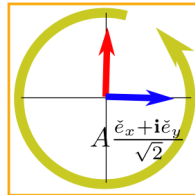
Horizontal



Oblicua



Circular (+)



Vertical

Elíptica

Circular (-)

Valores medios

- ▶ El valor medio temporal de una cantidad se define por
$$\langle W \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T W(t) dt$$
- ▶ Si la función tiene período T , esto equivale a
$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt.$$
- ▶ Para (las componentes de) una onda armónica, $\langle \psi(t) \rangle = 0$.
- ▶ Por otro lado, si $\psi_{i=1,2}(x, t) = \Re \Psi_i(x, t) e^{i\omega t}$ son dos (componentes de) *ondas armónicas*,

$$\langle \psi_1(\vec{x}, t) \psi_2(\vec{x}, t) \rangle_T = \frac{1}{2} \Re(\Psi_1^*(\vec{x}) \Psi_2(\vec{x}))$$

Ejercicios

- Mostrar que

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct, 0)$$

y

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{A}(|\vec{r}| - ct, 0)}{r}$$

son soluciones de la ecuación de onda.

- Calcular el gradiente y el laplaciano de la función $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$
- Usando la representación compleja, evaluar el promedio temporal de las funciones

$$\vec{F}(t) = \vec{A} \cos(\omega t) + \vec{B} \sin(\omega t) + \vec{C} \cos(2\omega t)$$

$$\text{y } g(t) = |\vec{F}(t)|^2.$$