Clase 03 - Óptica geométrica - Sistemas ópticos.

Prof. Juan Mauricio Matera

23 de agosto de 2024

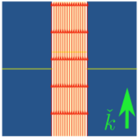
Óptica Geométrica

Modelo de haz

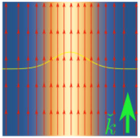
- Como modelo *analítico* de un haz, pensemos en una densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r}) = I(|\vec{r} \times \check{k}|^2)\check{k}$ para cierta función de forma $I(r)$.
- En particular, $\check{k} = \check{u}_z \rightarrow |\vec{r} \times \vec{k}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Luego, $\nabla \cdot \vec{j} = \check{k} \cdot \nabla I(|\vec{r} \times \check{k}|) = 0$ satisface la ecuación de continuidad *estacionaria*.
- Para modelar haces se suele usar como $I(r)$ una función tipo *escalón*

$$I_e(r) = \begin{cases} 1 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

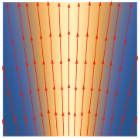
- Una versión *suave* de este modelo es elegir $I(r)$ como una *gaussiana* $I_g(r) = \exp(-r^2/2r_0^2)$
- Se observa que estos modelos funcionan cuando $\lambda \ll r_0$ y para distancias menores a r_0^2/λ.



Haz uniforme



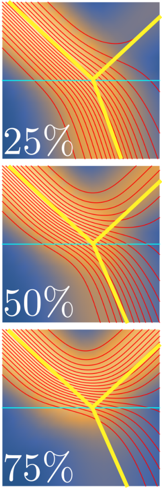
Haz gaussiano



Haz observado

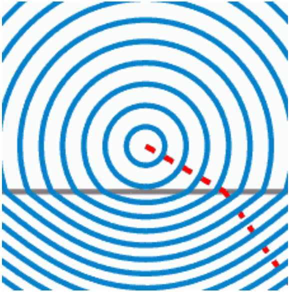
Interface entre dos medios

- Cuando un haz alcanza la interface entre dos medios transparentes, su flujo se divide en dos:
  - un haz reflejado.
  - un haz transmitido (refractado).
- Los nuevos haces se propagan en direcciones diferentes.
- El flujo total se conserva.
- La forma en que se distribuye depende de las propiedades de ambos medios, de la longitud de onda y de la polarización, y el ángulo de incidencia.
- *Lejos* de la interface, las direcciones de propagación siguen relaciones simples...



Óptica Geométrica

- Bajo la hipótesis de que *densidad de flujo* $\vec{s}_E$ es una cantidad *aditiva*, el problema de la **óptica geométrica** consiste en, dada una distribución de materia y fuentes *puntuales* de radiación, **determinar la densidad de flujo de radiación** en todo el espacio.
- Como las fuentes son puntuales, una forma práctica de plantear el problema es en términos de **líneas de flujo**.
- La aproximación aplica sólo cuando podemos ignorar los **efectos de interferencia y difracción**.

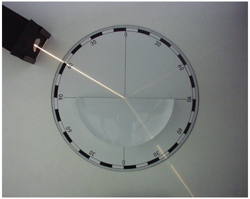


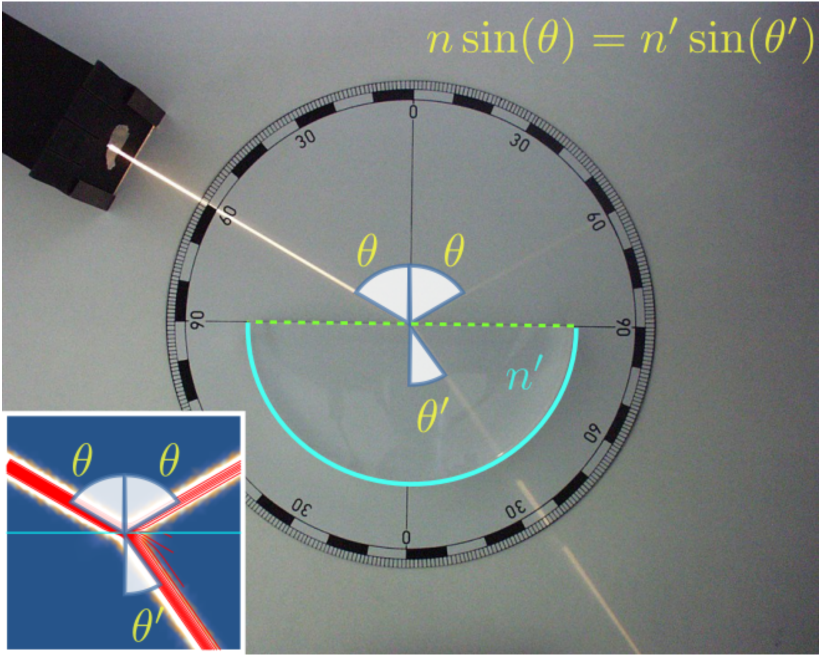
Direcciones de Reflexión y Refracción. Leyes de Snell

- el haz reflejado yace sobre el **plano de incidencia** y su **dirección** apunta en forma **simétrica** al rayo incidente.
- el haz transmitido se propaga con dirección sobre el **plano de incidencia**, satisfaciendo la **Ley de Snell**

$$n_1 \sin(\theta) = n_2 \sin(\theta')$$

  con n_1 y n_2 los **índices de refracción** de cada medio.
- la *apertura numérica* $NA = n \sin(\theta)$ es *constante* para un haz en cada interface.





$n\sin(\theta) = n'\sin(\theta')$
0
30
30
60
60
90
90
60
30
30
0
θ
θ
n'
θ'
θ
θ
θ'

El índice de refracción

- El índice de refracción se relaciona con la velocidad de propagación de la radiación v relativa al vacío (c).
- depende de la longitud de onda.
- suele crecer con la densidad.
- En general, es una magnitud positiva mayor a 1.

Thomas Young (1773-1829)

Índice de refracción de substancias comunes

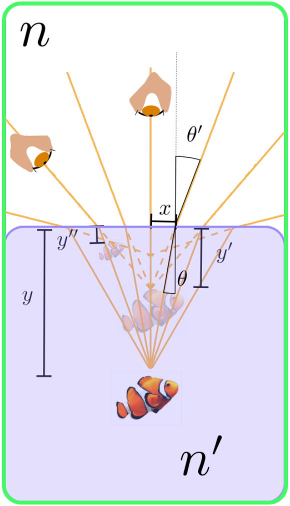
substancia	n
aire	1.00027
agua	1.315
alcohol	1.36
cornea	1.3771
agua azucarada	1.38 - 1.52
cristalino	1.42
aceite	1.45
vidrio	1.5-1.6
policarbonato	1.5-1.5
cuarzo	1.544
NaCl	1.544
diamante	2.4

https://refractiveindex.info/

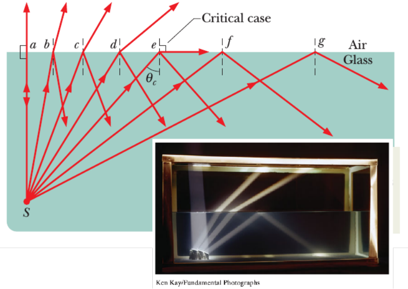
Posición aparente

- Al cambiar de medio la prolongación de los rayos parece venir de una posición diferente a la de la fuente.
- La vista interpreta entonces que el objeto se encuentra ubicado en el punto de intersección de la prolongación de los rayos.
- Desde un punto perpendicular a la superficie,

$$\frac{y}{y'} = \frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} \approx \frac{\sin(\theta')}{\sin(\theta)} = \frac{n}{n'}$$



Reflexión total



De la **Ley de Snell** de refracción,

$$n_1 \sin(\theta) = n_2 \sin(\theta')$$

Luego, si $n_1 > n_2$, para ángulos de incidencia

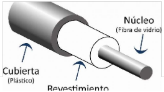
$$\theta > \theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$$

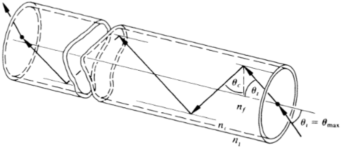
no hay onda reflejada: en estas condiciones la reflexión es **total**.

Aplicación: Fibras ópticas

- Las fibras ópticas son en la actualidad uno de los principales medios de transmisión de información, debido a su gran ancho de banda, bajas pérdidas, seguridad y bajo costo de producción e instalación.
- Consisten en una fibra de vidrio revestida con un material de menor índice de refracción.
- Para que se cumpla la condición de reflexión total, la luz que ingresa a la fibra debe hacerlo con un ángulo de entrada

$$\theta_{in} < \theta_{max} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_1}\right)$$





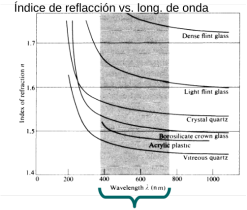
* Se denomina **Apertura Numérica** de la fibra a la cantidad
$n_1 \sin(\theta_{max}) = \sqrt{n_2^2 - n_{\mathrm{f}}^2}$

Medios dispersivos

- En los medios materiales, ε y μ dependen en general de la frecuencia, y a través de estos, el índice de refracción.
- Aproximación de Cauchy:

$$n \approx B + \frac{C}{\lambda^2}$$

- Esta es la causa del origen de la descomposición de la luz blanca en prismas y en el arcoiris.



Luz visible: ~ 400nm-700nm

Medios Inhomogeneos: el principio de Fermat

- Un medio inhomogeneo puede representarse como una sucesión de "capas" homogeneas.
- El **Principio de Fermat** proporciona una forma más directa de determinar los rayos de luz.
- Los haces de luz que pasan por dos puntos, lo hacen siguiendo la trayectoria de tiempo mínimo:

$$T(\vec{s}) = \int \frac{n(\vec{s})}{c} |d\vec{s}|$$

- Es posible deducir las leyes de Snell de este principio (ejercicio).

Pierre de Fermat
1601 -1665

- Aplicable en general al movimiento ondulatorio en medios no homogéneos.

Aplicación: espejismos

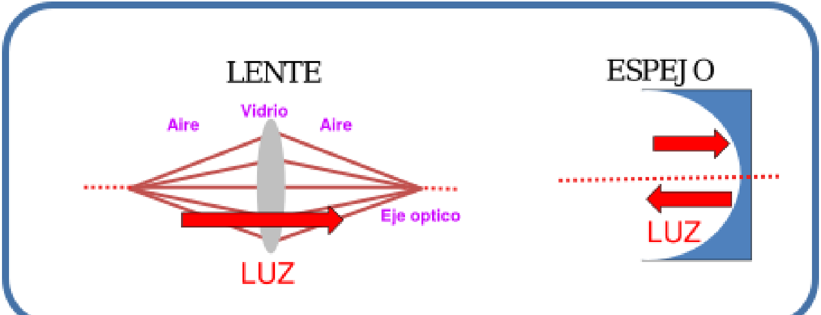
- Un caso típico de un medio con índice de refracción no homogeneo es el aire en presencia de un gradiente de temperatura.
- $n(T) \propto \rho(T) \propto 1/T$
- Sobre el asfalto, la temperatura del aire tiene un gradiente de temperatura hacia arriba: Los rayos que vienen de arriba se curvan hasta reflejarse sobre el aire cercano al asfalto.

- Sobre masas de agua, que se encuentran a menor temperatura que el aire circundante, el gradiente apunta hacia abajo, de manera que las capas de aire más calientes parecen reflejar en el cielo la imagen de los objetos en tierra.

Sistemas ópticos

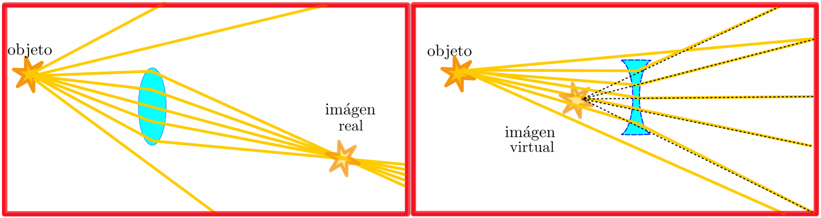
Definiciones

- Un **sistema óptico** queda definido por el **conjunto de superficies que separan los medios por los que se propaga la luz**.
- Un sistema formado por dos **superficies refractantes** se llama **dióptrico** (ej, lentes)
- Un sistema compuesto por una **superficie reflectante** se llama **catóptrico** (ej. espejos).
- En general un sistema óptico estará compuesto por varios dióptricos y catóptricos.

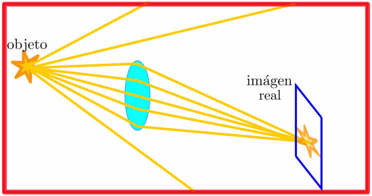


Imágenes

- Si luego de atravesar el sistema óptico, los rayos que emergen de un punto objeto (o sus prolongaciones rectas) convergen en un segundo punto, decimos que ese nuevo punto es un **punto imágen**.
- Los rayos que emergen de un punto imágen se comportan como si emergieran de una fuente puntual.



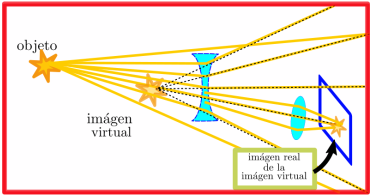
Imágenes reales



- Si luego de pasar por el sistema óptico, los rayos de luz originados en un punto objeto convergen en un punto, decimos que ese punto es una **imagen real**
- En tal caso, en el punto imágen se concentra la energía que partió del punto objeto.
- El punto imágen
- La imágen puede entonces registrarse en una película fotográfica, u observarse en una pantalla.

Imágenes virtuales

- Si luego de pasar por el sistema óptico, los rayos de luz originados en un punto objeto **no convergen** en un punto imágen, pero si lo hacen sus prolongaciones, decimos que ese punto corresponde a una **imagen virtual**
- En tal caso, para recuperar la imágen, se requiere un sistema óptico (como el ojo) que convierta esa **imágen virtual** en **real**.
- Para el ojo, las imágenes de los objetos parecen estar más allá del sistema óptico.



Eje Óptico y aproximación Paraxial

- Definición: *Un* ***sistema óptico centrado*** *está formado por superficies esféricas cuyos centros están alineados sobre un mismo eje. La línea que une estos centros se denomina* ***eje óptico****.*

- **Aproximación paraxial**: Cada sistema óptico tiene un eje óptico, y se asumirá que todos los rayos se propagan formando **ángulos pequeños** en torno a este.

- Sistema óptico perfecto:

  - Correspondencia punto a punto: A cada punto objeto le corresponde un único punto imágen.
  - Correspondencia plano a plano: Las imágenes de los puntos sobre cualquier plano objeto (perpendicular al eje óptico) están contenidas en el mismo plano.
  - Semejanza: Las distancias entre puntos en un plano objeto son proporcionales a las distancias entre puntos correspondientes en el plano imágen.

Centro óptico y focos

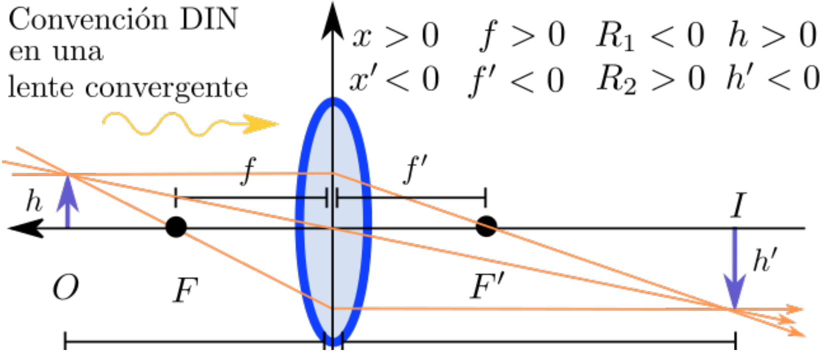
En un sistema óptico centrado perfecto,

- Un punto tal que los rayos que inciden sobre él desde infinito, emergen sin desviarse, se llama **centro óptico** (C).
- Un haz de rayos que emerge del sistema óptico, paralelo al eje óptico, converge sobre este eje en un punto llamado **foco objeto** (F).
- los rayos de luz que vienen desde infinito convergen todos en un punto, llamado **foco imágen** (F').
- El plano perpendicular al eje óptico, que contiene al **foco objeto** se conoce como **plano focal objeto** (P).
- El plano perpendicular al eje óptico, que contiene al **foco imágen** se conoce como **plano focal imágen** (P').

Convención de signos (DIN 1335:2003-12)

1. La luz viene desde la izquierda hacia la derecha.
2. Las distancias horizontales se miden en la dirección de avance de la luz (eje x).
3. Las distancias verticales son positivas hacia arriba (eje y).

- Como consecuencia, los radios de curvatura son **positivos** si la superficie es **cóncava**, y **negativos** si es **convexa**



Magnificación y aumento

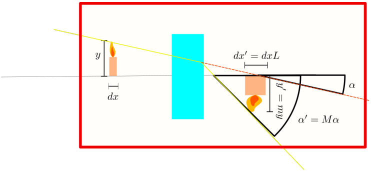
Al atravesar el sistema óptico, el tamaño y la forma de los objetos se ven transformadas. Llamamos

- **aumento transversal** al factor de proporcionalidad entre las alturas de los puntos imágen y objeto:

$$m = y'/y$$

- **aumento longitudinal** a la relación de proporcionalidad entre distancias de planos imágen y las correspondientes a sus planos objeto.

$$\ell = dx'/dx$$



- **aumento angular** o **Magnificación** a la cociente entre los ángulos que forman los rayos incidente y emergente con el eje óptico:

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{dy'/dx}{dy/dx} = m$$

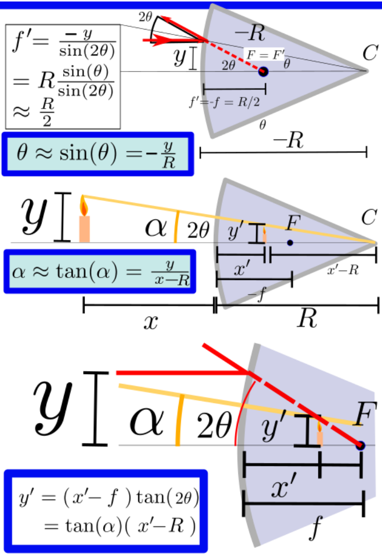
- Cuando la posición del objeto coincide con el F del sistema óptico, los rayos emergen con un ángulo $\alpha' = y/f$.
- Para definir magnificación en este caso, se toma como rayo incidente aquel que corta al eje a una distancia de $d_0 = 25\mathrm{cm}$, el **punto próximo** del ojo humano.
- Luego
$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx= \frac{y/f}{y/d_0} = \frac{d_0}{f}$$

Sistemas ópticos simples

Espejos

- En un espejo, se anula el coeficiente de transmisión para todo ángulo y toda polarización.
- El espejo queda caracterizado por su **Radio de curvatura**.
- Vamos a considerar superficies reflectivas esféricas, y planas como caso límite.
- En la **aproximación paraaxial** un espejo esférico es un sistema óptico ideal.
- El foco objeto coincide con el foco imágen.

Ecuación de Descartes



Espejos esféricos

$$f' = f \approx \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} \approx M$$

$$= -\frac{x'}{x} = \frac{1}{1 - x/f}$$

$$\ell = \frac{dx'}{dx} = -m^2$$

Posición y orientación de la imagen

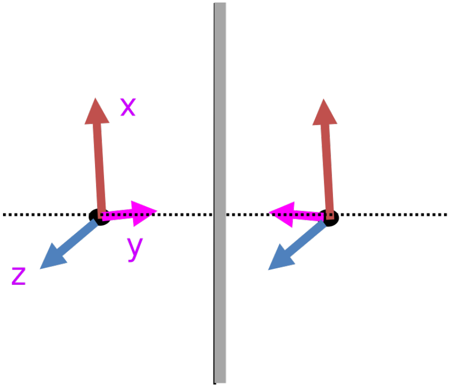
- De la ecuación de Descartes

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} = \frac{1}{1 - x/f}$$

  - es **real** si $x > f$.
  - es **invertida** si $x/f > 1$
  - sufre un **aumento transversal** $m_l = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}$
  - sufre un **aumento longitudinal** $\ell = \frac{dx'}{dx} = -\frac{(x')^2}{x^2} = -m^2$: los objetos lucen "invertidos" respecto a esta dirección.

Espejos planos

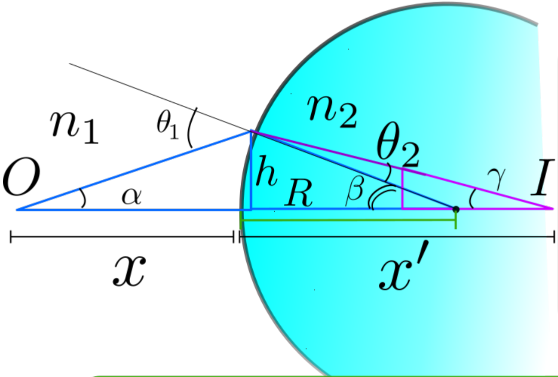
- Un espejo plano es el límite en que $f = R/2 \to \infty$.
- En este caso, $x' = -x$ (imágen virtual), $m = 1$ (no hay aumento transversal) y $\ell = -1$.
- Las imágenes sufren una "inversión" respecto al eje óptico.



Dióptricos y lentes

Consideremos ahora la marcha de rayos a través de medios transparentes, limitados por superficies esféricas. . .

- Formación de imágenes por **difracción** en un medio. . . .

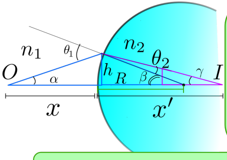


$$\theta_2 \approx \frac{n_1}{n_2}\theta_1$$
$$\alpha \approx h/x$$
$$\gamma \approx -h/x'$$
$$\beta \approx -h/R$$
$$\theta_1 = \alpha + \beta$$
$$\beta = \theta_2 + \gamma$$

$$\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

Foco imágen y foco objeto

- Foco objeto: $f = \frac{R}{1 - n_2/n_1}$
- Foco imágen:
  $f' = \frac{-R}{n_1/n_2 - 1} = -\frac{n_1}{n_2} f$
- Aumento transversal:
  $m = \frac{x'/n_2}{x/n_1} = \frac{1}{1 - x/f} \approx M$
- Aumento longitudinal:
  $\ell = \frac{f'}{f} m^2 = \frac{n_2}{n_1} m^2$

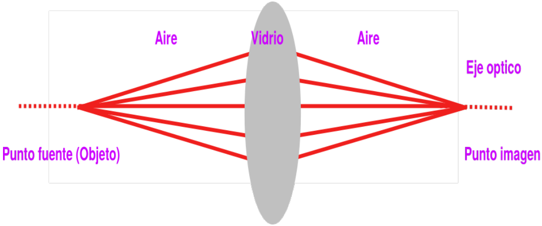


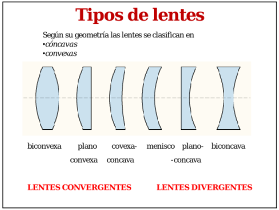
$$\theta_2 \approx \frac{n_1}{n_2}\theta_1$$
$$\alpha \approx h/x$$
$$\gamma \approx -h/x'$$
$$\beta \approx -h/R$$
$$\theta_1 = \alpha + \beta$$
$$\beta = \theta_2 + \gamma$$

$$\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

Lentes

Una lente es un sistema óptico formado por dos dióptricos que separan dos medios (típicamente, uno es el aire), y donde al menos uno de los dióptricos no es plano.





Lentes delgadas

- Una lente delgada es aquella en que su anchura es despreciable (frente a sus distancias focales y radio de curvatura).
- La marcha de rayos puede construirse por composición de los cálculos para cada uno de sus dióptricos.
- Ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{f}$$

  donde f es la **distancia focal** de la lente.
- En general, $n_2 > n_1 \approx 1$

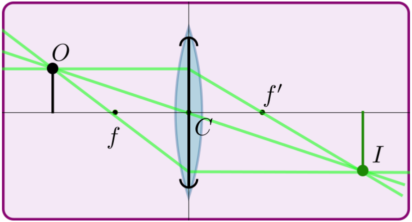
Marcha de rayos y puntos notables

- De manera similar que en un dióptrico, podemos definir
  - **foco objeto**: posición de un objeto que genera una imágen en $x' \to \infty$.

$$f = \frac{1}{\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R\,1}\right)}$$

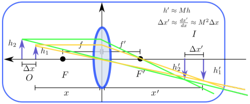
  - **foco imagen**: posición de la imágen de un objeto en $x \to \infty$.

$$f' = -f$$



- **Centro óptico**: se localiza en el punto medio de los dos focos.

Aumentos



- Magnificación y aumento transversal:

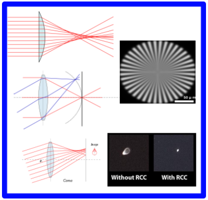
$$M \approx m = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x/f - 1}$$

- Aumento longitudinal

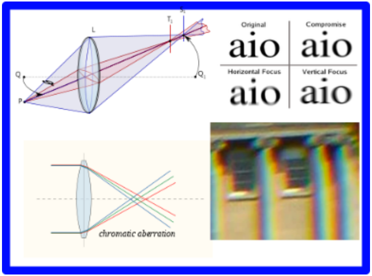
$$\ell = \frac{dx'}{dx} = \left(\frac{1}{1 - x/f}\right)^2 = M^2 > 0$$

Aberraciones

- En la aproximación paraaxial, un sistema óptico centrado es perfecto si los índices de refracción son independientes de la longitud de onda.
- Las diferentes formas en que un sistema óptico se aparta de ser perfecto se conocen como **aberraciones**.
- Algunas aberraciones debidas a la falla de la aproximación paraxial son:
  - **Aberración esférica**: para ángulos grandes, la **distancia focal** depende del ángulo de incidencia.
  - **Aberración de curvatura**: los planos imágen se curvan.
  - **Aberración de coma**: la imágen de una fuente puntual fuera del eje óptico se extiende radialmente.

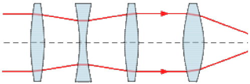


- Otras posibles fuentes de aberración son:
  - **Aberración astigmática**: el sistema no tiene simetría cilíndrica.
  - **Aberración cromática**: n depende del índice de refracción (no afecta a los espejos).



- Para reducir los efectos de aberración, consiguiendo aumentos grandes se busca
  - optimizar la forma de la lente
  - construir sistemas ópticos compuestos.

Sistemas ópticos compuestos



- Aumento transversal total:

$$m_{tot} = m_1 m_2 \dots m_n$$

- Magnificación total:

$$M_{tot} = M_1 M_2 \dots M_n = m_{tot}$$

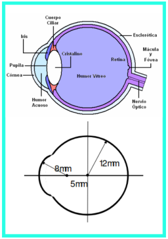
- Aumento longitudinal total:

$$\ell_{tot} = \ell_1 \ell_2 \dots L_n = M_{tot}^2$$

- Si las lentes están próximas entre sí (separación $\ll x, x', f$)
  - Distancia focal efectiva: $f = \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n} \right)^{-1}$
  - Potencia Dióptrica $P = \frac{1}{f} = \sum_i P_i$
- La potencia Dióptrica se mide en **Dioptrías** ($[\mathrm{D}] = 1/[\mathrm{m}]$).
- Esto permite alcanzar potencias dióptricas elevadas sin violar la condición de paraxialidad.

Ejercicio de aplicación

Un modelo muy simplificado del ojo humano consiste en tomarlo como una esferita de radio $12,5\mathrm{mm}$ de radio, con índice de refracción ≈ 1.4.



- Determinar la distancia focal. ¿Qué clase de lente es?
- Cómo debe modificarse la curvatura cerca del íris, para que el foco se localize en un punto sobre la superficie opuesta del ojo? (la fovea). ¿Cuál es la potencia dióptrica en ese caso?
- ¿Cómo se debe ajustar el radio de curvatura para poder enfocar un plano situado a $25\mathrm{cm}$ del ojo? En ese caso, ¿Cómo cambia la potencia dióptrica?.
- En vez de modificar el radio de curvatura, ¿Cómo podríamos lograr lo mismo usando una lente delgada?
- Si el ojo es capaz de resolver direcciones de hasta $1'$ ($\approx 0,3\mathrm{m}\textit{rad}$), ¿cuál será la densidad de sensores en la fovea?