Clase 02 - La ecuación de continuidad, fuentes de Luz y fotometría.

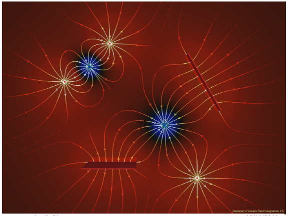
Prof. Juan Mauricio Matera

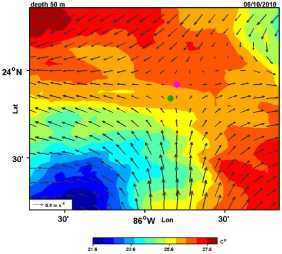
19 de agosto

Flujo y ecuación de continuidad

El concepto de campo

- El concepto de **Campo** es de suma importancia en física.
- Permite describir la **influencia** que uno o más cuerpos ejercen sobre el **espacio que los rodea**.
- Matemáticamente, consiste en asignar una magnitud a cada punto del espacio. Ej: $\phi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$.
- Ejemplos
  - Campo de deformación (ondas mecánicas, escalar/vectorial)
  - Campo de temperatura (escalar).
  - Campo de presiones (escalar).
  - Campo de velocidades (vectorial).
  - Campo gravitatorio (vectorial).





El concepto de Flujo

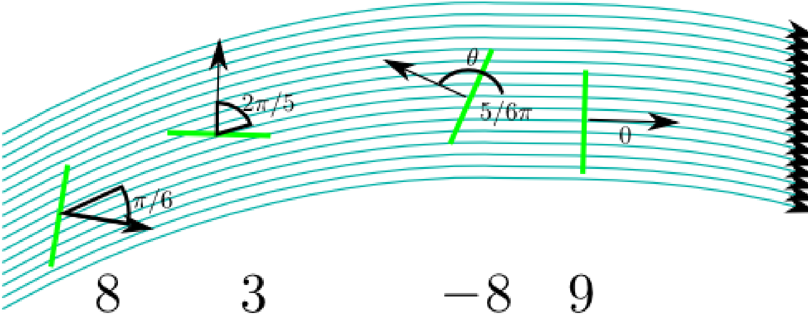
Definimos **flujo** Φ de un **campo vectorial** $\vec{W}(\vec{r})$ a través de una superficie (orientada) $\mathcal{S}$ a la integral

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{W}(\vec{r}) \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

- El flujo es una **magnitud escalar**
- El sentido del vector $d\vec{\mathcal{S}}$ indica cuándo el campo contribuye al flujo con signo positivo.
- Cada diferencial de área aporta al flujo una cantidad proporcional al tamaño del área, y a la componente del campo en la **dirección normal** al elemento de área.

Interpretación en términos de líneas de flujo

Si a partir de campo vectorial construimos un número muy grande de líneas de flujo, de acuerdo las reglas de la clase pasada, encontramos que el flujo del campo $\vec{W}(\vec{r})$ a través de la superficie $\mathcal{S}$ es **proporcional** a la diferencia entre el número de líneas de flujo que la atraviesan en el sentido del diferencial de área, menos el número de las que la atraviesan en sentido contrario.



Interpretación en términos de corrientes de partículas

Originalmente, la noción de flujo surgió de la descripción del movimiento de **fluídos** en el régimen estacionario. En tal caso, el **campo** que describe el sistema es la **velocidad** $\vec{v}(\vec{r})$ de los elementos de fluído.

En ese caso, el **flujo** del **campo de velocidades** a través de una superficie $\mathcal{S}$ da cuenta del número de partículas que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Esta viene dada por

$$d\Phi = \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

donde $\vec{j} = n(\vec{r})\vec{v}$ es la **densidad de corriente** de partículas, con $n(\vec{r})$ el **número de partículas** por unidad de

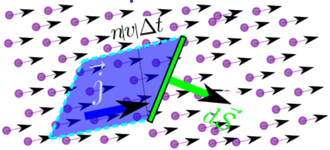


Figure 1: Número de partículas que atraviesan la superficie en el tiempo Δt

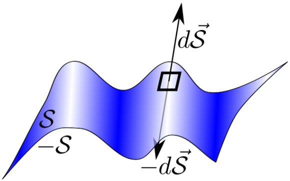
En este contexto, las **líneas de flujo** representan las **trayectorias** de los elementos de volumen.

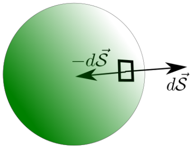
Propiedad	Hidrodinámica	Gravitación	Ondas
Densidad de flujo	velocidades	campo gravitatorio	irradiancia
Flujo	masa, partículas	Flujo gravitatorio	Potencia
Curvas integrales	Líneas de flujo	líneas de campo	rayos

Situaciones **físicas muy distintas** dan origen a **modelos matemáticos similares**, que llevan a **predicciones análogas**

Flujo a través de superficies cerradas

En una **superficie abierta**, existen dos orientaciones diferentes: el flujo evaluado respeto a una orientación es el **opuesto** al evaluado respecto a la otra. En una **superficie cerrada** existe una orientación natural, definida por la **normal exterior**. Llamamos al flujo evaluado respecto a esta orientación, el **flujo saliente** respecto al **volumen encerrado** por la superficie.





Teorema de Gauss

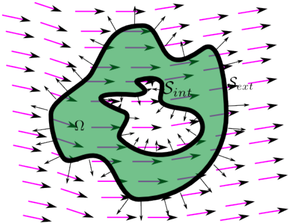
Es una *identidad matemática* que establece que, dado un volumen Ω, el flujo de un campo $\vec{W}(\vec{r})$ (diferenciable) a través de la superficie $\mathcal{S}$ que lo limita satisface la ecuación

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{W} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{W} d\Omega$$

donde

$$\nabla \cdot W(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_z}{\partial z}$$

es la **divergencia** del campo $\vec{W}$.



Karl F. Gauss
(1777-1855)

Teorema de Gauss

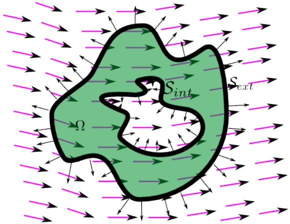
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{W} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{W} d\Omega$$

donde

$$\nabla \cdot W(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_z}{\partial z}$$

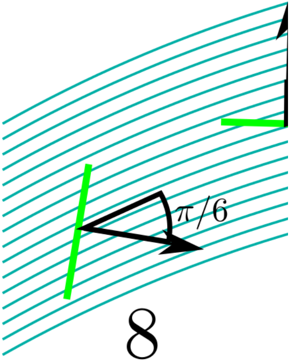
es la **divergencia** del campo $\vec{W}$.

- Nótese que si el volumen tiene más de una superficie límite, el teorema vale si sumamos las contribuciones de cada una de ellas.
- En una región donde $\nabla \cdot \vec{W} = 0$, deformando de forma continua una superficie, el flujo permanece constante.



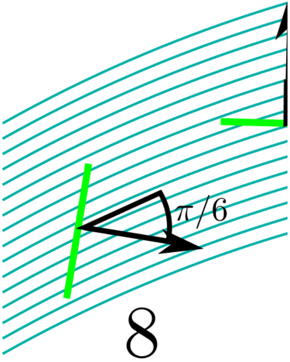
Karl F. Gauss
(1777-1855)

Líneas de flujo



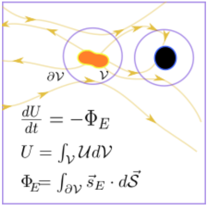
- Las líneas de flujo asociadas a un campo $\vec{A}$ son un conjunto de curvas que
  - son tangentes a $\vec{A}(\vec{x})$ en cada punto.
  - su *densidad* es proporcional a la magnitud de $\vec{A}(\vec{x})$
- En general, su expresión analítica *no es lineal* y no tiene una conexión simple con con la del campo.
- Sin embargo, nos permite obtener en forma gráfica el campo en forma *cualitativa*.

Propiedades de las líneas de flujo



- No se cortan entre sí, a menos que $\vec{A} = 0$.
- se distribuyen respetando las simetrías del campo $\vec{A}$
- el número de líneas que cruzan una superficie cerrada es proporcional al flujo de $\vec{A}$ a través de esa superficie.
- Si en una región $\mathcal{V}$, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, entonces la cantidad de líneas que entran a esa región iguala al número de las que salen.
- Si $\vec{A} = -\nabla\phi$ para cierto campo escalar ϕ ($\vec{A}$ es conservativo), las líneas son siempre abiertas.

La ecuación de continuidad



Dada una cantidad Q distribuída en el espacio con una *densidad* ρ,

$$Q = \int \rho d\mathcal{V}$$

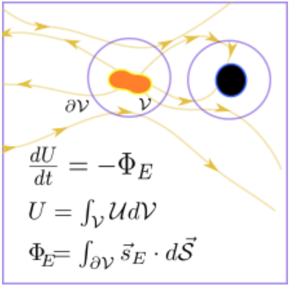
decimos que Q es una **cantidad conservada** si existe una *densidad de flujo* $\vec{j}_Q$ que satisface

$$\frac{dQ}{dt} = -\int \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\int \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

- Esta expresión se conoce como **Ecuación de continuidad**.
- Expresa que una cantidad *cambia* en una región sólo si *fluye* hacia otra.
- Vía el teorema de Gauss, podemos expresar esta identidad en forma *local*:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{j}_Q$$



Ejercicio

Mostrar que si $\phi(\vec{x})$ y $\rho_0(\vec{x})$ son campos escalares,

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) &= \nabla^2\phi(\vec{x})\sin(\omega t) + \rho_0(\vec{x}) && (1) \\ \vec{j}(\vec{x}) &= -\omega\nabla\phi(\vec{x})\cos(\omega t) && (2) \end{aligned}$$

con

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\check{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\check{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\check{u}_z$$

el *operador gradiente* y

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \nabla\cdot\nabla\phi(\vec{x}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

el *operador Laplaciano*, satisfacen la ecuación de continuidad.

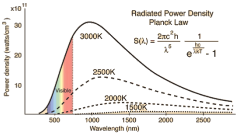

AND NOW FOR
SOMETHING
COMPLETELY
DIFFERENT

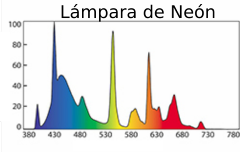
Fuentes de Luz y distribución espectral

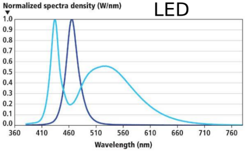
Distribución espectral de energía

- Observamos antes que la luz presenta una característica relacionada con la percepción del color.
- La luz proveniente de una fuente puede descomponerse en luz de diferentes colores al atravesar ciertos medios transparentes.
- Algo semejante ocurre cuando la luz se refleja en películas delgadas de materiales transparentes.
- En un medio homogeneo, las diferentes componentes de color se propagan e interactúan con la materia en forma independiente.
- Las propiedades ondulatorias de la luz (interferencia, difracción) se manifiestan en forma diferente para luz de diferentes colores.
- Vamos a asociar a cada componente una una propiedad continua con unidades de longitud: su **longitud de onda** λ.

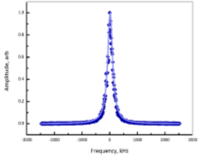
- En general, la radiación electromagnética es una mezcla de radiaciones con diferentes λ.
- En la radiación, cada intervalo de longitudes de onda tiene asociado un **flujo de energía**.
- Definimos la Distribución espectral $P(\lambda)$ (o *espectro*), de manera que $P(\lambda)d\lambda$ es la potencia asociada a las componentes en un intervalo $d\lambda$ de longitudes de onda en torno a λ.
- $P(\lambda)$ es una característica de la fuente de luz.
- $P(\lambda)$ está relacionada con el *color* con que percibimos la luz.
- Del espectro de potencia de una fuente, sólo *vemos* el intervalo de longitudes de onda entre $350\mathrm{nm}$(violeta) y $750\mathrm{nm}$ (rojo).







- Si $P(\lambda)$ se concentra en un intervalo de ancho $\Delta\lambda$ en torno a un λ_0, con $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, decimos que la onda es aproximadamente **monocromática**.
- Los espectros atómicos poseen múltiples picos, independientes de la temperatura.
- Las fuentes **LED's** y **Lasers** aprovechan esto para producir espectros monocromáticos.



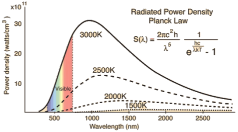
- Si $P(\lambda)$ es aproximadamente uniforme en todo el **espectro visible** decimos que la luz es **blanca**.
- La superficie de los cuerpos irradian energía electromagnética no polarizada según la **Ley de Planck**, que depende de su temperatura T:

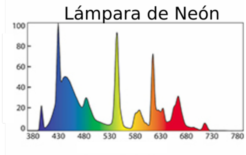
$$P(\lambda) = \frac{0.118 \mathrm{mW} \mu \mathrm{m}^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{14.3 \frac{\mathrm{mmK}}{\lambda T}} - 1}$$

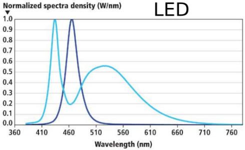
  y con una distribución angular constante (radiador de Lambert).
- La *radiancia* se expresa como

$$L = \sigma T^4$$

  con $\sigma = 56,7 \mathrm{mWkm}^{-2} \mathrm{K}^{-4}$ la *constante de Stefan-Boltzmann*.
- Sólo una pequeña parte de la energía se produce en el visible.







Ejercicio

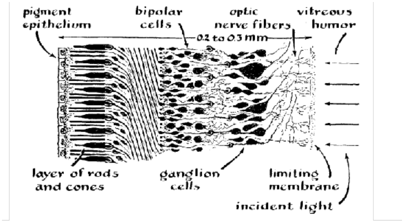
Considere dos cuerpos, uno a una temperatura de $5000\mathrm{K}$ y otro a $310\mathrm{K}$.

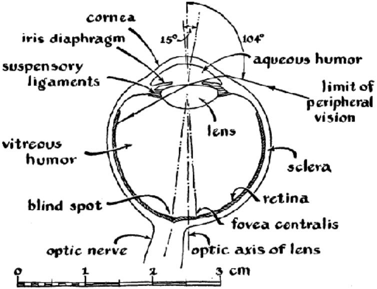
- determine para qué longitud de onda el espectro de potencia tiene un máximo.
- Determine la potencia total radiada.
- Estime que parte de la radiación producida por un cuerpo se emite como radiaciación visible (en el intervalo $380 - 780\mathrm{nm}$).

Luz e Iluminación

- Hasta ahora, analizamos las propiedades físicas de la luz, independientemente de cómo la observamos.
- La descripción cuantitativa de estas propiedades se conoce como *Radiometría*.
- Vamos a discutir ahora las propiedades de la luz desde el punto de vista de su utilidad para **Iluminar**, esto es, para ayudarnos a ver.
- La descripción cuantitativa de la capacidad para *Iluminar* de una fuente de luz se conoce como **Fotometría**.
- Para avanzar con la descripción fotométrica, necesitamos tener en cuenta las características del **ojo** como **sensor**.

El ojo humano





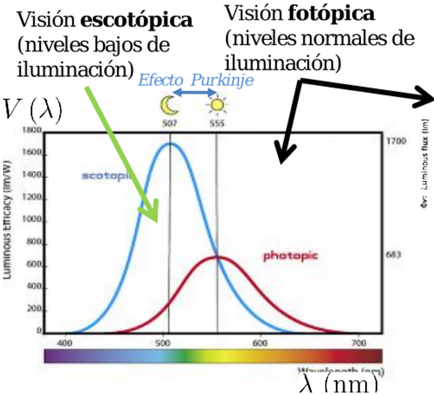
- La *Fotometría* estudia la luz desde el punto de vista de la *sensación visual*.
- Involucra únicamente a la región del espectro visible

$$380\mathrm{nm}\ (\mathrm{UV}) \leq \lambda_{\mathrm{visible}} \leq 700\mathrm{n}$$

- Es capaz de detectar
  - Dirección de origen de la luz
  - Intensidad
  - Color
- Es insensible a
  - Polarización.
  - Coherencia.

Percepción de la intensidad luminosa

- El ojo humano no responde uniformemente a la misma **Irradiancia** para diferentes longitudes de onda.



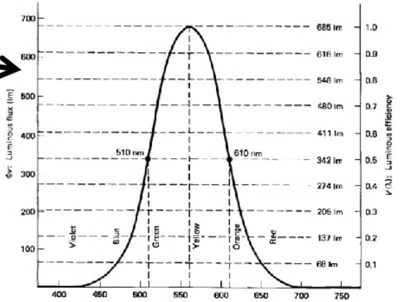
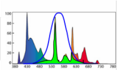


Figure 2-7 CIE luminous efficiency curve. The luminous flux corresponding to 1 W of radiant power at any wavelength is given by the product of 685 lm and the luminous efficiency at the same wavelength: $\Phi_v(\lambda) = 685V(\lambda)$ for each watt of radiant power.

Iluminancia, Luminancia, Flujo luminoso e Intensidad Luminosa.

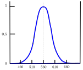
- Para cuantificar la capacidad de la radiación electromagnética para **Iluminar** debemos **ponderar** la el flujo de energía con la respuesta del ojo:

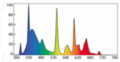


$$E_{\mathrm{Lum}} = K_m \int V(\lambda) I_{rad}(\lambda) d\lambda$$

Respuesta del ojo

Irradiancia (Depende de la fuente)





$$K_m = \begin{cases} 683\mathrm{Lm/W} & \text{Condiciones } \textbf{fototopicas} \\ 1699\mathrm{Lm/W} & \text{Condiciones } \textbf{escotópicas} \end{cases}$$

$0 \leq V(\lambda) \leq 1$ es la *eficiencia de detección*.

- E_{Lum} es la **Iluminancia** o **densidad de flujo luminoso**.
- En el sistema MKS, se mide en **Lux** $[\mathrm{Lx}] = [\mathrm{Lm}]/\mathrm{m}^2$
- Aquí, **Lumen** $[\mathrm{Lm}]$ es la **Unidad de flujo luminoso** (Φ_{lum}) del sistema MKS, y se define como

"El **Flujo Luminoso** de una fuente **mo**

Escalas de Irradiancia e Iluminancia

Fuente	E_{rad} $[\mathrm{W/m^2}]$	E_{lum} $[\mathrm{Lx}]$
Sol + Cielo	245	100×10^3
Sol + Cielo nublado	200	10×10^3
Interior cerca de ventana	25	1×10^3
Luna llena	2×10^{-3}	$0,2$
Estrella (Sirius A)	1×10^{-7}	$0,3 \times 10^{-3}$
Vela (a $1\mathrm{m}$)	1×10^{-3}	1
LED	10×10^{-3}	3
Lampara incendescente	40	40
Lampara Fluorescente	40	200

Rendimiento

- La **relación** entre el **flujo luminoso** que produce una **fuente** y la potencia invertida en producirlo es el **Rendimiento** o **Eficacia** de la fuente.

$$R = \frac{\Phi_{\mathrm{lum}}}{P_{\mathrm{consumida}}}$$

- En el sistema MKS, se mide en $[\mathrm{Lm}]/[\mathrm{W}]$.
- La **Eficacia Relativa** k representa el porcentaje de la energía radiada en el visible, y se expresa como

$$k = \frac{\int V(\lambda)P(\lambda)d\lambda}{\int P(\lambda)d\lambda} \times 100\%$$

Intensidad Luminosa

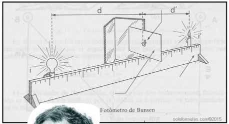
- Así como definimos la **Intensidad Radiante** como el flujo de radiación por unidad de ángulo sólido, definimos la **Intensidad luminosa** (en una dirección) como el *flujo luminoso por unidad de ángulo sólido*.
- En el sistema MKS se define la **Candela** $[\mathrm{cd}]$ como la intensidad luminosa correspondiente a $1\mathrm{Lm}$ por $[\mathrm{sr}]$.
- En ausencia de absorción, la **intensidad luminosa** es *independiente* de la distancia a la fuente.

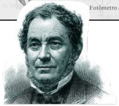
Medida cuantitativa de la Iluminancia.

- La **Irradiancia** cae con el **cuadrado** de la distancia a la fuente *para todas las* λ

$$\frac{E^{(1)}_{\mathrm{Lum}}}{E^{(2)}_{\mathrm{Lum}}} = \frac{E^{(1)}_{\mathrm{Rad}}}{E^{(2)}_{\mathrm{Rad}}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

- Podemos comparar **Intensidades luminosas** de dos fuentes comparando las distancias a las que producen la misma **Irradiancia** sobre un cuerpo.
- El fotómetro de Bunsen se basa en este principio.
- En las aplicaciones, se utilizan células fotoeléctricas y otros sensores electrónicos calibrados según la respuesta del ojo.
- En la actualidad, podemos usar un smartphone como luxómetro: Physics Toolbox

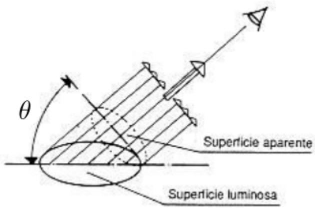


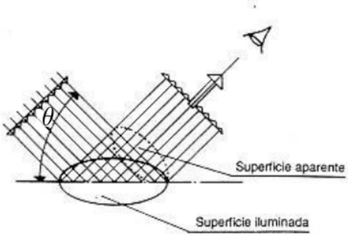


Luminancia

- Cuando consideramos fuentes no puntuales, definimos la **Luminancia** L como *la intensidad luminosa por unidad de área, en cierta dirección*.
- En el sistema MKS, se mide en $[\mathrm{cd}]/[\mathrm{m}]^2 = [\mathrm{Lx}]/[\mathrm{sr}]$.
- Para una superficie reflejante,

$$L = \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{dI_{\mathrm{lum}}^{\mathrm{sup}}}{dA}$$

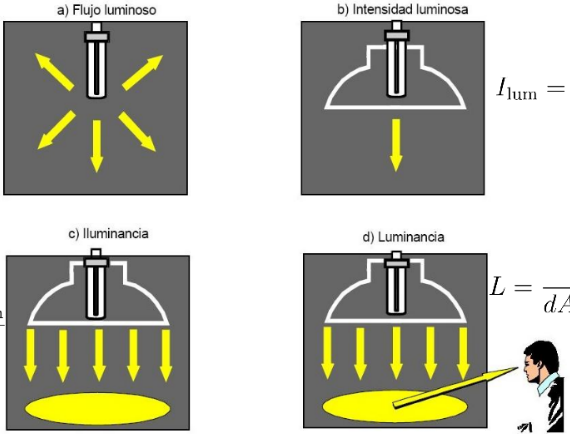




Relación entre Magnitudes Fotométricas

Φ_{lum}

$$I_{\text{lum}} = \frac{d\Phi_{\text{lum}}}{d\Omega}$$



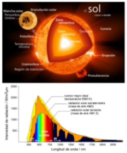
$$E_{\text{lum}} = \frac{d\Phi_{\text{lum}}}{dA}$$

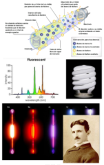
$$L = \frac{dI_{\text{lum}}^{\alpha}}{dA \cdot \cos(\alpha)}$$

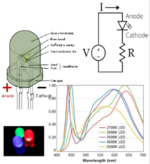
Relación entre Magnitudes Radiométricas y Fotométricas.

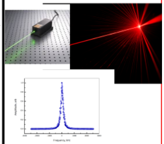
		Radiometría		**Fotometría**	
Magnitud	Símbolo	Denominación	Unidad	Denominación	Unidad
Flujo de energía	Φ	Potencia Radiante	Watt	Flujo luminoso	Lumen (lm)
Sobre una superficie	E	Irradiancia	W/m2	Iluminancia	Lux (lx)
Desde una superficie	I	Intensidad radiante	W/sr	Intensidad luminosa	Candela (cd)
Propagándose en un haz	L	Radiancia	W/m^2sr	Luminancia	Cd/m^2

Fuentes de luz





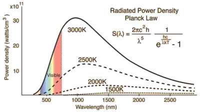


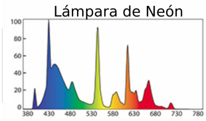


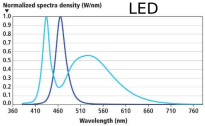
	Sol	Vela	Lámpara incandescente	Lámpara Fluorescente	LED	LASER
Potencia total:	$3828{\times}10^{26}$W	10^{-2}W	$20-100$W	10W	5W	1mW $-$ 10kW
Vida útil:	10000M años	≈ 2h	10^3h	10^3h	22×10^3h	
Intensidad luminosa:	$24{\times}10^{26}$Cd	$1-10$Cd	40Cd	$400-8000$Cd	$1-1000$Cd	
Irradiancia:	10^5Lx	≈ 1Lx	40Lx	$400-8000$Lm	$1-1000$Lm	20Lx $-$ 200MLx
Eficiencia:	$\approx 40\%$	$0,04\%$	$\approx 2\%$	15%	20%	30%

Color

Percepción del color

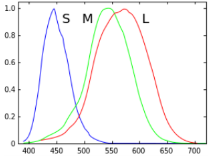




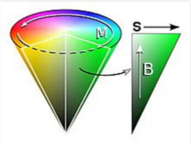


- Diferentes fuentes de luz producen en el ojo diferentes sensaciones a las que llamamos *color*.
- Como en las ondas de sonido, una onda electromagnética es una *superposición* de ondas armónicas con diferentes longitudes de onda.
- Llamamos **distribución espectral** $P(\lambda)$ a la función que describe la forma en que la energía de la onda electromagnética se distribuye en las diferentes *longitudes de onda* λ.
- La percepción del *color* está relacionada con cómo percibe el ojo la distribución espectral de la luz.

Cromaticidad



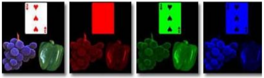
Sensibilidad relativa normalizada de
los bastones cortos(S), medios(M) y largos (L).



- El ojo humano, como la antena de una radio, es capaz de *sintonizar* esas longitudes de onda, en el intervalo $\approx 380 - 780\mathrm{nm}$.
- Si la distribución espectral es aproximadamente uniforme en ese intervalo, decimos que la fuente produce *luz blanca*.
- El ojo no es capaz de distinguir la luz monocromática de la mezcla de luces de diferentes colores.
- La **cromaticidad** es la medida cuantitativa de la sensación de color. Tiene dos aspectos
  - **Matiz**: Relacionado con la posición del máximo de $P(\lambda)$
  - **Saturación** Relacionado con el ancho de $P(\lambda)$.

El color de los objetos

- Al interactuar con la luz, las superficies de los cuerpos absorben de manera diferente la radiación a diferentes longitudes de onda, reflejando el resto.
- El cerebro asigna color a una superficie en función del color de la luz que refleja.
- Bajo diferentes condiciones de iluminación, la misma superficie puede aparentar diferentes colores.
- Los **pigmentos** son substancias que absorben luz en longitudes de onda específicas.
- Mediante **pigmentos** es posible **colorear** la luz que refleja una superficie o que transmite un cuerpo.



In red light, the apple appears red because it reflects the red light. But the leaves look black.

In green light, the apple appears black because no red light strikes it. But the leaves look green.

In blue light, both the apple and the leaves appear black.

Generación y mezclas de colores

- Los **colores primarios** o *básicos* son aquellos cuya combinación produce todos los demás.
  - En imprentas son el cyan, el magenta y el amarillo.
  - En iluminación son el azul (B - blue), el verde (G - green) y el rojo (R - red).
- Cualquier otro **color** se puede obtener combinándolos en diferentes proporciones.
- Las mezclas pueden ser aditivas o sustractivas:
  - **Mezclas aditivas u ópticas**: se obtienen sumando haces de luces de colores. Si la suma da blanco, los colores son complementarios.
  - **Mezclas sustractivas** o **pigmentarias** se consiguen aplicando **filtros** sucesivos a la **luz blanca**.