Clase #1, 9/3/2020

Campo eléctrico => la fuerza sobre una carga q en un punto dado $\bar{x}$ (ley de Coulomb) resulta dada por la expresión

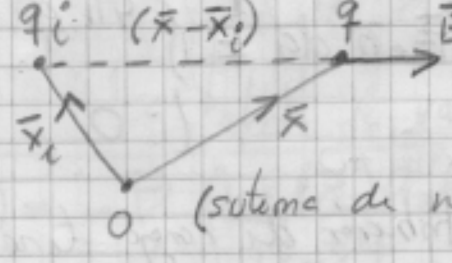
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= q\,\bar{E}(\bar{x})\\ \bar{E}(x) &= k\sum_i q_i \frac{(\bar{x}-\bar{x}_i)}{|\bar{x}-\bar{x}_i|^3}\end{aligned}}$$

(Campo eléctrico en $\bar{x}$ debido a cargas en $\vec{x}_i$)

Para una distribución continua de cargas tendremos

$$\boxed{\bar{E}(\bar{x}) = \int \rho(\bar{x}')\frac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\,d^3x'}$$

Explícitamente



(sistema de referencia arbitrario)

Suponemos el caso estático (la distribución de cargas es independiente del tiempo), para expresar una distribución puntual (discreta) de cargas tenemos =>

$$\boxed{\rho(\bar{x}) = \sum_i q_i\,\delta(\bar{x}-\bar{x}_i)}$$

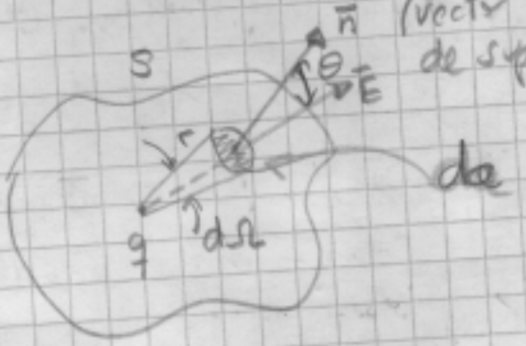
, donde $\delta(\bar{x}-\bar{x}_i)$ es la función de distribución (Delta de Dirac). Algunas propiedades de la $\delta(\bar{x})$ son las siguientes

$$\boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|}\,\delta(\bar{x}-\bar{x}_0) \quad ; \text{ para } f(\bar{x}_0)=0}$$

$$y \quad \int_{\Delta V} \delta(\bar{x}-\bar{x}_0)\, d^3x = \begin{cases} 1 & \bar{x}_0 \subset V \\ 0 & x_0 \not\subset V \end{cases}$$

<u>Ley de Gauss</u>:

$\bar{n}$ (vector normal al elemento de superficie.



$$\bar{E}\cdot\bar{n}\, da = q\, \frac{\cos\theta}{r^2}\, da$$

$$\bar{E}\cdot\bar{n}\, da = q\, d\Omega \qquad \text{, ya que } \cos\theta\, da = r^2 d\Omega$$

luego
$$\oint_S \bar{E}\cdot\bar{n}\, da = \begin{cases} 4\pi q & q \text{ interior a } S \\ 0 & q \text{ exterior a } S \end{cases}$$

y para una distribución de carga tenemos $\Rightarrow$

Forma integral de la ley de Gauss
$$\begin{cases} \oint \bar{E}\cdot\bar{n}\, da = 4\pi \sum_i q_i & \text{(distribución discreta)} \\ \oint_S \bar{E}\cdot\bar{n}\, da = 4\pi \int_V \rho(\bar{x})\, d^3x \end{cases}$$

Para un campo vectorial, aplicando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\oint_S \bar{A}\cdot\bar{n}\, da = \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{A}\, d^3x$$

Comparando con la expresión anterior tenemos $\Rightarrow$

$$\oint_S \bar{E}\cdot\bar{n}\,da = 4\pi\int_V \rho(\bar{x})\,d^3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho(\bar{x})}$$ (forma diferencial de la ley de Gauss)

Por lo tanto, el carácter vectorial de $\bar{E}$ (derivada

$$\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_t + \bar{\nabla}_\ell \Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0}$$

Expresando $\bar{E}(\bar{x}) = \int \rho(\bar{x}')\dfrac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}d^3x'$

y $\dfrac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\bar{x}}\left(\dfrac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)$

afecta la variable $\bar{x}$

Así $\boxed{\bar{E}(\bar{x}) = -\bar{\nabla}\int\dfrac{\rho(\bar{x}')d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}$

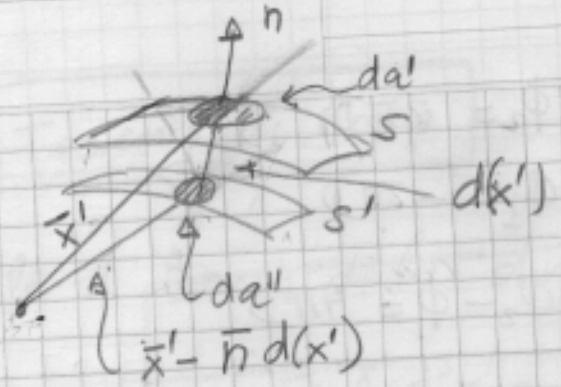
por lo tanto $\underbrace{\bar{\nabla}\times\bar{E}}_{\text{derivada "transversal"}} = -\bar{\nabla}\times\underbrace{\left[\bar{\nabla}\int\dfrac{\rho(\bar{x}')d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right]}_{\text{derivada longitudinal}} = 0$

<u>Potencial escalar</u>:

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \int\frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}d^3x'}$$

▷ Carácter conservativo del campo eléctrico

A partir de $\bar{F} = q\bar{E}$, el trabajo necesario para mover una carga (q) entre dos puntos en presencia de un campo



$$|\bar{x}-\bar{x}'| \quad , \quad |\bar{x}-\bar{x}'+\bar{n}d|$$

$$\phi(\bar{x}) = \int_S \frac{\sigma(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,da' - \int_{S'} \frac{\sigma(x')\,da''}{|\bar{x}-\bar{x}'+\bar{n}d|}$$

$$(\bar{x}+\bar{\xi})\cdot(\bar{x}+\bar{\xi}) = x^2+\xi^2+2\,\bar{x}\cdot\bar{\xi} = |\bar{x}+\bar{\xi}|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{x}+\bar{\xi}| = x\left(1 + 2\,\frac{\bar{x}\cdot\bar{\xi}}{x^2} + \frac{\xi^2}{x^2}\right)^{1/2}$$

Si $x \gg \xi$

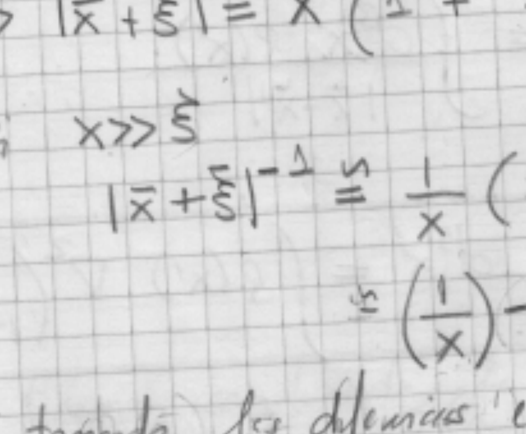
$$|\bar{x}+\bar{\xi}|^{-1} \cong \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\bar{x}\cdot\bar{\xi}}{x^2} + \dots\right)$$

$$\cong \left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{\bar{x}\cdot\bar{\xi}}{x^3}\right)$$

Así tomando las diferencias en $\phi(\bar{x})$ resulta

$$\phi(\bar{x}) = \int_S \underbrace{\sigma(\bar{x}')\,d(x')}_{D(\bar{x}')}\,\bar{n}\cdot\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) da'$$

$D(\bar{x}') \equiv$ densidad de momento dipolar



$$da'\,\bar{n}\cdot\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = -\,d\Omega$$

$$\Rightarrow \phi(\bar{x}) = -\int_S D(\bar{x}')\,d\Omega$$

eléctrico resulta

$$W_{A\to B} = -\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{l} = -q\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

trabajo "contra el campo"

$$W_{A\to B} = q\int_A^B \bar{\nabla}\phi\cdot d\bar{l} = q\left(\phi(B)-\phi(A)\right)$$

ó

$$\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\left(\phi(B)-\phi(A)\right)$$

Sobre una curva cerrada

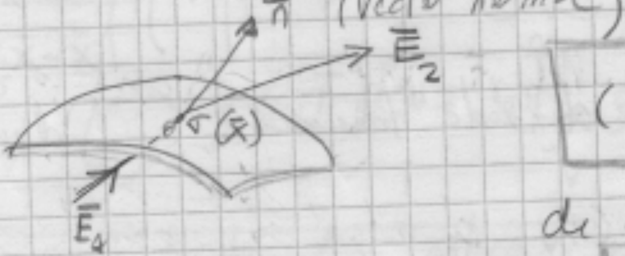
$$\boxed{\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0}$$

(resultado expresable en función del teorema de Stokes)

$$\boxed{\oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot\bar{n}\, da}$$

verificando $\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E}=0}$ para el caso independiente del tiempo.

Distribuciones superficiales de carga:



$$\boxed{(\bar{E}_2-\bar{E}_1)\cdot\bar{n} = 4\pi\sigma(\bar{x})}$$

de donde

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \int_S \frac{\sigma(\bar{x}')\,da}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}$$

Para una capa doble, tenemos $\Rightarrow$

Esquemáticamente, tenemos

exterior $\left\{ \begin{array}{l} \phi_2 = 2\pi D \\ \phi_1 = -2\pi D \end{array} \right\} \Rightarrow$ interior

$$\boxed{\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D}$$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \\ \bar{E} = -\bar{\nabla}\phi \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho} \quad \text{(Poisson)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = 0} \quad \text{(Laplace)}$$

Veamos la expresión $\phi(\bar{x}) = \int \frac{d^3x' \, \rho(x')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

(en todo el espacio) entonces

$$\boxed{\nabla^2\phi = \nabla^2 \int \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|} d^3x' = \int \rho(x') \, \nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) d^3x'}$$

definimos $|\bar{x}-\bar{x}'| = r$

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d^3x' = \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) d^3x' = \int_S \bar{n}\cdot\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) da$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) r^2 d\Omega = -4\pi$$

Ahora sí
$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2(1/r) = -4\pi\,\delta(\bar{x}) \\ \text{ó} \\ \nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = -4\pi\,\delta(\bar{x}-\bar{x}') \end{array}}$$

Teoremas de Green

Por el teorema de la divergencia tenemos

$$\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{A}\, d^3x' = \oint_S \bar{A}\cdot\bar{n}\, da$$

tomemos $\bar{A} = \phi\bar{\nabla}\psi$ ($\bar{A}$ = campo vectorial)
($\phi, \psi \equiv$ funciones escalares)

entonces $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = \bar{\nabla}\cdot(\phi\bar{\nabla}\psi) \equiv \bar{\nabla}\phi\cdot\bar{\nabla}\psi + \phi\nabla^2\psi$

$$\bar{A}\cdot\bar{n} = \phi\bar{\nabla}\psi\cdot\bar{n} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

derivada en la dirección normal a la superficie S (hacia afuera del volumen)

$\Rightarrow$ tenemos, reemplazando, la primera identidad de Green

$$\boxed{\int_V \left(\phi\nabla^2\psi + \bar{\nabla}\phi\cdot\bar{\nabla}\psi\right) d^3x = \int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, da}$$

eligiendo ahora $\begin{cases} R = |\bar{x}-\bar{x}'| \\ \psi = 1/R \\ \phi = \text{potencial escalar} \end{cases}$ ($\bar{x}$ punto de observación, $\bar{x}'$ punto de integración)

entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\phi &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) &= -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{x}') \end{aligned}} \Rightarrow$$

8

NOTAR:

$$\nabla\phi\nabla(1/R) = \nabla\cdot(1/R\,\nabla\phi) - \frac{1}{R}\nabla^2\phi$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla\phi\nabla(1/R)\,dvol = \int_S \frac{1}{R}\nabla\phi\cdot n\,da - \int_V \frac{1}{R}(-4\pi\rho) = +4\pi\int_V \frac{\rho(x)}{R} + \int_S \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

reemplazando, tenemos

$$\Rightarrow \int_V \left[-4\pi\,\phi(\bar{x}')\,\delta(\bar{x}-\bar{x}') + \frac{4\pi}{R}\,\rho(\bar{x}')\right] d^3x' = \oint_S \left[\phi\,\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right] da'$$

Si $\bar{x}$ es interior a V tenemos

$$-4\pi\,\phi(\bar{x}) + 4\pi\int_V \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,d^3x' = \oint_S \left[\phi\,\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right] da'$$

de donde

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \int_V \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\,\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\right] da'}$$

Si el punto $\bar{x}$ es exterior al volumen V el primer término se anula.

En definitiva $\Rightarrow$ a) Si la superficie S tiende a infinito la integral de superficie se anula y la forma de ϕ se reduce a la correspondiente a la solución de Poisson sin superficies limitadoras.

b) Si en el volumen $\rho(\bar{x}) = 0$ la solución para $\phi(\bar{x})$ en el interior corresponde a los valores del potencial y de la derivada normal en la superficie. La solución será entonces, en forma integral dependiente de ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ (condiciones de Cauchy)

Solución formal al problema electrostático

Definimos las funciones $G(\bar{x},\bar{x}')$ y $F(\bar{x},\bar{x}')$ tales que

$$\boxed{\begin{aligned} G(\bar{x},\bar{x}') &= \frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} + F(\bar{x},\bar{x}') \\ \nabla^2_{x'} F(\bar{x},\bar{x}') &= 0 \end{aligned}}$$

Luego, si $\phi \equiv \phi(\bar{x})$, $\psi = G(\bar{x},\bar{x}')$ resulta

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \int_V \rho(\bar{x}')\, G(\bar{x},\bar{x}')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\bar{x},\bar{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(\bar{x}') \frac{\partial G(\bar{x},\bar{x}')}{\partial n'} \right] da'}$$

▷ Condiciones de Dirichlet $\Rightarrow$ $G_{\text{Dirichlet}}(\bar{x},\bar{x}')\Big|_{x' \text{ en } S} = 0$

▷ Condiciones de Neuman $\Rightarrow$ $\frac{\partial G_{\text{Neumann}}(\bar{x},\bar{x}')}{\partial n'}\Big|_{x' \text{ en } S} = 0$

Apendice ⇒ transformaciones y cambio de variables.

En general, la solución en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0$$

estará condicionada a la simetría particular del problema

Para coordenadas cartesianas ordinarias

$$\boxed{\nabla^2(x,y,z) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)}$$

Para coordenadas esféricas tendremos

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= y/x \\ \cos\theta &= z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d}{dx_i} = \sum_\alpha \left(\frac{du_\alpha}{dx_i}\right)\left(\frac{d}{du_\alpha}\right)$$

$$x_i \equiv (x, y, z) \qquad u_\alpha \equiv (r, \theta, \varphi)$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{dr}{dy} &= \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{dr}{dz} &= \frac{z}{r} = \cos\theta \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{y}{x^2}\cos^2\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{1}{x}\cos^2\varphi = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{z}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{dr}{dx} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \\ \frac{d\theta}{dy} &= \frac{z}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{dr}{dy} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi \\ \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r - z\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}\right.$$

de donde obtenemos

$$\frac{d}{dx} = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \frac{d}{d\theta} - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{dy} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{dz} = \cos\theta \frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta}$$

A partir de estos resultados, con un poco de álgebra, obtenemos

$$\boxed{\nabla^2(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)}$$

Separación de variables (Ecuación de Laplace)

Coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\phi(x,y,z) = 0$$

$$\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$\Rightarrow Y.Z\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Para $\phi(x,y,z)$ no singular $\Rightarrow$ dividimos por $\phi = XYZ$

resultando $$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Podemos introducir tres constantes arbitrarias, resultando

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2$$

con la condicion $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0$

para α y β reales $(\alpha^2 > 0,\ \beta^2 > 0)$

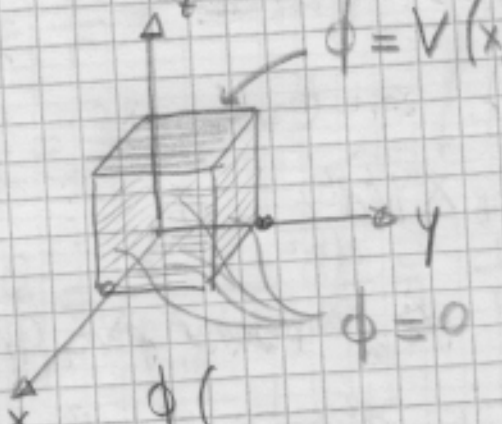
las soluciones son armónicas

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \rightarrow X(x) \simeq e^{\pm i\alpha x}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0 \rightarrow Y(y) \simeq e^{\pm i\beta y}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0 \rightarrow Z(z) \simeq e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$$

El ejemplo de aplicacion es el de una caja con las condiciones de contorno



$\phi = V(x,y)$ en $z = c$

$(0,b) \equiv y$

$(0,a) \equiv x$

$(0,c) \equiv z$

$\phi = 0$ (en cinco caras excepto la superior)

$\phi($

Por lo tanto

$$X(x) = A_x \cos\alpha x + B_x \operatorname{sen}\alpha x$$
$$Y(y) = A_y \cos\beta y + B_y \operatorname{sen}\beta y$$

$$\left.\begin{array}{l} X(x=0) = A_x = 0 \\ Y(y=0) = A_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X(x) = B_x \operatorname{sen}\alpha x \\ Y(y) = B_y \operatorname{sen}\beta y \end{array}$$

$$X(x=a) = B_x \operatorname{sen}\alpha a = 0$$
$$(B_x \neq 0, \quad \alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$Y(y=b) = B_y \operatorname{sen}\beta b = 0$$
$$(B_y \neq 0, \quad \beta b = m\pi \Rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$Z(z) = A_z e^{\gamma_{nm} z} + B_z e^{-\gamma_{nm} z}$$
$$Z(z=0) = A_z + B_z = 0 \Rightarrow A_z = -B_z$$
$$Z_{nm}(z) \simeq A_z \left(e^{\gamma_{nm} z} - e^{-\gamma_{nm} z}\right)$$
$$\simeq 2A_z \operatorname{senh}\gamma_{nm} z$$

Luego, la solución completa de acabe

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \operatorname{sen}(\beta_m y) \operatorname{senh}($$

La constante se determina a partir de la condicion

$\phi(x,y,z=c) = V(x,y)$, de donde resulta

$$V(x,y) = \sum_{n,m} A_{nm} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \operatorname{sen}(\beta_m y) \operatorname{senh}(\gamma_{nm} c)$$

Utilizando la completitud de la base de senos y cosenos, resulta $\Rightarrow$

$$\int_0^b \int_0^a V(x,y) \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\rho y)\, dx\, dy$$

$$= \sum_{nm} A_{nm} \operatorname{senh}(\gamma_{nm} c) \int_0^a \int_0^b dx\, dy \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cdot \operatorname{sen}(\rho y) \operatorname{sen}(\beta_m y)$$

Cada integral se escribe a partir de la identidad

$$\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\phi + \cos\varphi \cos\phi = \cos(\varphi - \phi)$$
$$-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\phi + \cos\varphi \cos\phi = \cos(\varphi + \phi)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi - \phi) - \cos(\varphi + \phi)\right)$$

$$\varphi = kx \qquad \varphi - \phi \Rightarrow (k - \alpha_n)x = \left(k - \frac{\pi}{a} n\right) x$$
$$\phi = \alpha_n x \qquad \varphi + \phi \Rightarrow (k + \alpha_n)x = \left(k + \frac{\pi n}{a}\right) x$$

$\Rightarrow k = \alpha_n$ resulta

$$\int_0^a dx \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\alpha_n x) = \begin{cases} \frac{1}{2} a & k = \alpha_n \end{cases}$$

$$\int_0^b dy \operatorname{sen}(\rho y) \operatorname{sen}(\beta_m y) = \begin{cases} \frac{1}{2} b & \rho \equiv \beta_m \end{cases}$$

de donde $A_{nm} \cdot \frac{ab}{4} \sinh(\gamma_{nm} c)$

$= \iint V(x,y) \operatorname{sen}(\alpha_n x) \operatorname{sen}(\beta_m y)$ o!

$$\boxed{A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \cdot \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, V(x,y) \operatorname{sen}(\alpha_n x) \operatorname{sen}(\beta_m y)}$$

▷ Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} =$$

$$\phi = \frac{F(r)}{r} \cdot P(\theta) \cdot Q(\varphi)$$

$$\Rightarrow P(\theta)Q(\varphi) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\right)$$

$$+ \frac{F(r)\, Q(\varphi)}{r^3 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{F(r) P(\theta)}{r^3 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow P(\theta)Q(\varphi) \left\{ \frac{F''}{r} \right\}$$

$$+ \frac{F(r)}{r^3} Q(\varphi) \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial P}{\partial\theta}\right) \right\}$$

$$+ \frac{F(r) P(\theta)}{r^3 \operatorname{sen}^2\theta} \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow PQ\, F'' + \frac{FQ}{r^2} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial P}{\partial\theta}\right) \right\} + \frac{FP}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = 0$$

16

dividiendo por $(F P Q)$ (no nula en todo el espacio)

$$\Rightarrow \frac{1}{F} F'' + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F} F'' - \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$$-\alpha = \frac{1}{\sin\theta\, P} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\frac{1}{Q(\varphi)} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2}$$

$$\Rightarrow Q(\varphi) = e^{\pm i m\varphi}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) P = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\alpha F}{r^2} = 0}$$

$$\boxed{(\alpha = \text{real}) \quad (m = \text{real})}$$

Las soluciones para la parte radial se pueden escribir como la superposición de funciones crecientes y decrecientes de r

$$\boxed{F(r) = A\, r^{l+1} + B\, r^{-l}}$$

Veamos que ambas satisfacen la ecuación radial, esto es

$F \sim r^{l+1}$ $\quad \dfrac{dF}{dr} = (l+1) A r^{l}$

$$\frac{d^2F}{dr^2} = l(l+1) A r^{l-1}$$

$$\left[l(l+1) r^{l-1} - \alpha r^{l-1} \right] = 0 \Rightarrow \alpha = l(l+1)$$

$F \sim r^{-l}$ $\quad \dfrac{dF}{dr} = -l\, r^{-l-1}$

$$\frac{d^2F}{dr^2} = l(l+1) r^{-l-2}$$

$$l(l+1) r^{-l-2} - \alpha r^{-l-2} = 0 \Rightarrow \alpha = l(l+1)$$

▷ **Soluciones de la parte angular**

definimos $x = \cos\theta$ (cambio de variable)

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right) = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)\frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot(-\sin\theta)\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta \cdot \frac{dP}{dx}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(-(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]P = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]P = 0}$$

Caso $m = 0$

Probaremos como solución el polinomio

$$P(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(18)

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\left(x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\right) + \ell(\ell+1)x^p \sum_{k=0} a_k x^k = 0$$

llamemos $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $S' = \sum_{k=1} k a_k x^{k-1}$

$$\frac{d}{dx}(x^p S) = p x^{p-1} S + x^p S'$$

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}(x^p S) = (1-x^2) p x^{p-1} S + (1-x^2) x^p S'\right]$$

$$\Rightarrow \quad p x^{p-1} S - p x^{p+1} S + x^p S' - x^{p+2} S'$$

derivando respecto a x tenemos

$$p(p-1)x^{p-2}S + p x^{p-1}S' - \underline{p(p+1)}x^p S$$
$$- p x^{p+1} S' + p x^{p-1} S' + x^p S''$$
$$- (p+2)x^{p+1} S' - x^{p+2} S''$$
$$+ \underline{\ell(\ell+1) x^p S} = 0$$

Como $S = \sum_{k=0} a_k x^k$

$$S' = \sum_{k=0} k a_k x^{k-1}$$

$$S'' = \sum_{k=0} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0} a_k \Big[p(p-1)x^{p+k-2} + pk\, x^{p+k-2} - p(p+1)x^{k+p} - pk\, x^{p+k} + pk\, x^{p+k-2} + k(k-1)x^{p+k-2} - (p+2)k\, x^{k+p} - k(k-1)x^{k+p} + \ell(\ell+1)x^{k+p}\Big]$$

$$= \sum_{k=0} \Big\{ a_k x^{p+k-2}\left[p(p-1) + pk + pk + k(k-1)\right] + a_k x^{p+k}\left[-p(p+1) - pk - (p+2)k - k(k-1) + \ell(\ell+1)\right] =$$

o' re-escribiendo este último expresión tenemos

$$\sum_{k=0} a_k x^{p+k-2} \{(p+k)(p+k-1)\}$$

$$+\sum_{k=0} a_k x^{p+k} \{l(l+1)-(p+k)(p+k+1)\} = 0$$

$$\begin{cases} \text{Para } k=0 \text{ si } a_{k=0} \neq 0 \Rightarrow p(p-1)=0 \\ \text{Para } k=1 \text{ si } a_{k=1} \neq 0 \Rightarrow p(p+1)=0 \end{cases}$$

Para cualquier otro valor de k debe ser

$$0 = a_{k+2}\left((p+k+2)(p+k+1)\right) + a_k \left(l(l+1)-(p+k)(p+k+1)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{k+2} = a_k \left\{\frac{((p+k)(p+k+1)-l(l+1))}{(p+k+2)(p+k+1)}\right\}}$$

Notar que si el numerador no se anula para algún k, en vez de un polinomio se obtiene una serie que diverge en +-1. Por eso, l tiene que ser entero no negativo.

Esta serie sólo tiene términos con potencias pares de x $(p=0)$ o' impares $(p=1)$

$$\begin{cases} \text{Serie par} \rightarrow a_0 \neq 0 \Rightarrow a_2, a_4, \dots a_{2n} \\ \text{Serie impar} \rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow a_3, a_5, \dots a_{2n+1} \end{cases}$$

ya que tendríamos $\Rightarrow$

$$= a_0 x^{p-2} p(p-1) + a_0 x^p \left(l(l+1) - p(p+1)\right)$$
$$+ a_1 x^{p-1} p(p+1) + a_1 x^{p+1} \left(l(l+1)-(p+1)(p+2)\right)$$
$$+ \sum_{k>1} = 0$$

Estos son los polinomios de Legendre de orden l

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!} \frac{d^{(l)}}{dx^l} (x^2-1)^l$$

(Fórmula de Rodriguez)

El factor de normalización se elige para que P_l(1)=1 para todo l.

Los primeros polinomios resultan dados por la expresión $\Rightarrow$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, etc

La fórmula de Rodriguez da una "receta práctica" para fabricar polinomios con coeficientes que cumplen la relación de recurrencia buscada.

Relaciones de ortonormalidad

Notar que la integral de un producto de funciones en un intervalo funciona como "producto interno"

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\, P_l(x)\, dx = \frac{2}{(2l+1)}\, \delta_{ll'}}$$

Así, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_l(x)\, dx$$

Relaciones de recurrencia

A los efectos de cálculos que haremos, estas relaciones entre polinomios de Legendre y sus derivadas son las siguientes

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}}{dx} - (2\ell+1)P_\ell = 0$$

$$(\ell+1)P_{\ell+1} - (2\ell+1)xP_\ell + \ell P_{\ell-1} = 0$$

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx} - x\frac{dP_\ell}{dx} - (\ell+1)P_\ell = 0$$

$$(x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx} - \ell x P_\ell + \ell P_{\ell-1} = 0$$

Problemas de contorno dotados de simetría azimutal

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0} \left[A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}\right] P_\ell(\cos\theta)$$

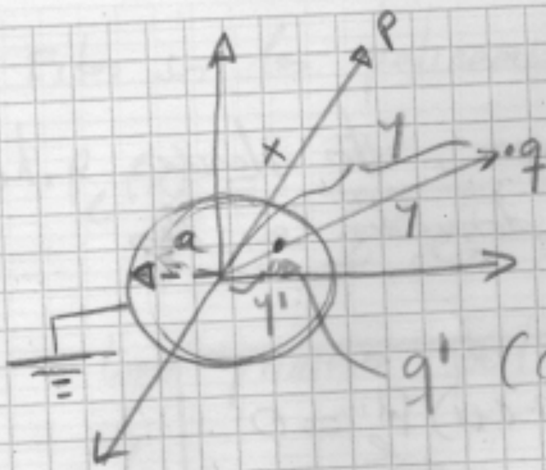
(volveremos más adelante a utilizar este resultado)

⇒ [Método de imágenes en problemas con simetría esférica

Ejemplo ①

⇒ [Tomamos como primer ejemplo el caso de una carga puntual en presencia de una esfera conductora conectada a tierra.

22



Conexion a tierra

$$\boxed{\phi_{superficie} = 0}$$

q' (carga imagen que garantiza la condicion de contorno)

$$\phi(x) = \frac{q}{|\bar{x}-\bar{q}|} + \frac{q'}{|\bar{x}-\bar{q}'|}$$

$$\phi(|\bar{x}| = a) \Rightarrow \frac{q}{a|\bar{n} - \frac{y}{a}\bar{n}'|} + \frac{q'}{y'|\bar{n}' - \frac{a}{y'}\bar{n}|}$$

por lo tanto

$$q/a = -q'/y' \quad \& \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$$

Existe un teorema de unicidad de la solución que dice si un cierto conjunto de cargas virtuales resuelve el problema, esa es la única elección posible.

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{a^2}{y}}$$ (posicion de la carga imagen)

$$\Rightarrow \boxed{q' = -\frac{q}{a} y' = -\frac{q a}{y}}$$ (magnitud de la carga imagen)

La densidad de carga inducida en la superficie resulta, como hemos visto al estudiar el caso de las capas

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=a}$$

con

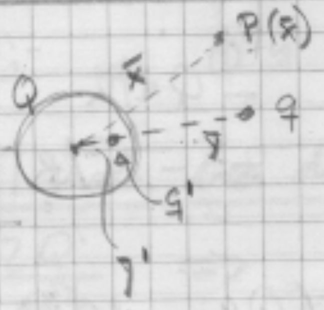
$$\phi(\bar{x}) = \frac{q}{|x\bar{n} - y\bar{n}'|} + \left(-\frac{q}{a}\right)\frac{1}{|\bar{n}' - \frac{y}{a}\bar{n}|}$$

Ejemplo 2

→ Tomemos ahora el caso de una carga puntual frente a una esfera conductora aislada y cargada con carga Q

Como en el caso anterior, la carga externa induce una carga, pero ahora debemos sumar la carga de la esfera, considerando la modificación de Q por q'.

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \frac{q}{|\bar{x}-\bar{y}|} - \frac{aq}{y\left|\bar{x}-\frac{a^2}{y^2}\bar{y}\right|} + \frac{\left(Q + \frac{a}{y}q\right)}{|\bar{x}|}}$$



$$= \phi(q,\bar{y}) + \phi(q',\bar{y}') + \phi(Q-q',0)$$

Ejemplo 3

⇒ Carga puntual en presencia de una esfera conductora mantenida a potencial fijo V

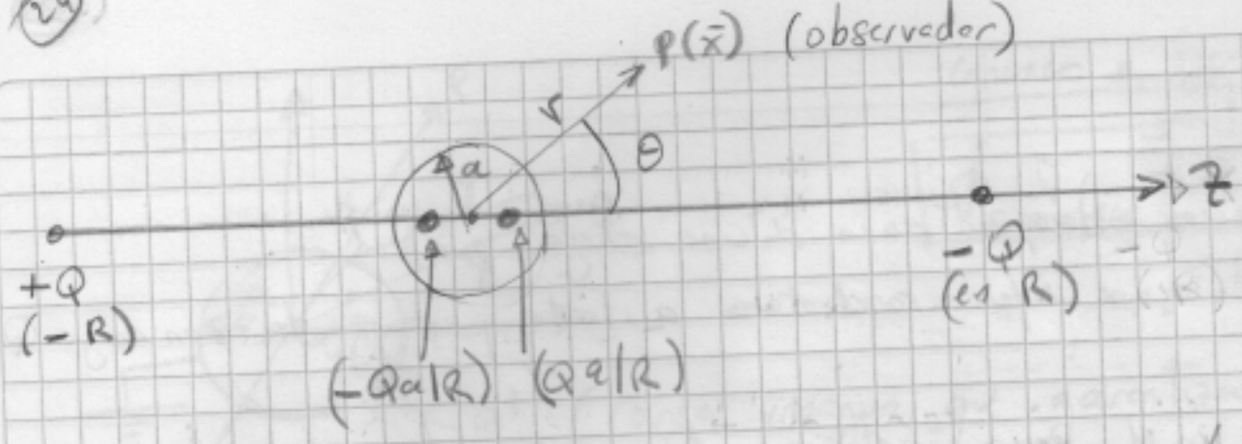
Aquí reemplazamos el término $\phi(Q-q',0)$ por $V\frac{a}{|\bar{x}|}$

$$\boxed{\phi(x) = \phi(q,\bar{y}) + \phi(q',\bar{y}') + V\frac{a}{|\bar{x}|}}$$

Ejemplo 4

⇒ Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme

24



$E_0 \cong \frac{2Q}{R^2}$ si $a \ll R$ (campo externo)

(paralelo al eje horizontal, x)

$$\begin{cases} \text{Carga} & -Q & \text{Imagen} & Qa/R \\ \text{Posicion} & \cancel{z}=R & \text{Posicion} & a^2/R = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Carga} & Q & \text{Imagen} & -Qa/R \\ \text{Posicion} & z=-R & \text{Posicion} & z=-a^2/R \end{cases}$$

Potencial $\phi \equiv >$

$$\begin{cases} \phi(-Q, R) + \phi(Q, -R) + \phi\left(\frac{Qa}{R}, \frac{a^2}{R}\right) + \\ \phi\left(-Q\frac{a}{R}, -\frac{a^2}{R}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Distancias al observador

$(+Q)$ $|\bar{r} - \bar{R}(Q)| = (r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta)^{1/2}$

$(-Q)$ $|\bar{r} - \bar{R}(-Q)| = (r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}$

(Qa/R) $|\bar{r} - \bar{R}(Qa/R)| = \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} - 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}$

$(-Qa/R)$ $|\bar{r} - \bar{R}(-Qa/R)| = \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} + 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) \equiv \frac{Q}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}$$
$$+ \frac{Qa}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2} - 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{Qa}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2} + 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}$$

Como $r \ll R$ desarrollando los denominadores

$$\frac{Q}{R}\left(1+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2r}{R}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq \frac{Q}{R} - Q\frac{r}{R^2}\cos\theta$$

$$-\frac{Q}{R}\left(1+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq -\frac{Q}{R} - Q\frac{r}{R^2}\cos\theta$$

$$\frac{aQ}{rR}\left(1+\frac{a^4}{R^2r^2}-\frac{2a^2}{Rr}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq \frac{aQ}{rR} + \frac{a^3Q}{(rR)^2}\cos\theta$$

$$-\frac{aQ}{rR}\left(1+\frac{a^4}{R^2r^2}+\frac{2a^2}{rR}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq -\frac{aQ}{rR} + \frac{a^3Q}{(rR)^2}\cos\theta$$

resultando $\Rightarrow \phi \simeq -\dfrac{2Qr}{R^2}\cos\theta + \dfrac{2Qa^3}{r^2R^2}\cos\theta$

Si utilizamos la definición del campo aplicado

$$\boxed{E_0 \simeq \frac{2Q}{R^2} \Rightarrow \phi = -E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta}$$

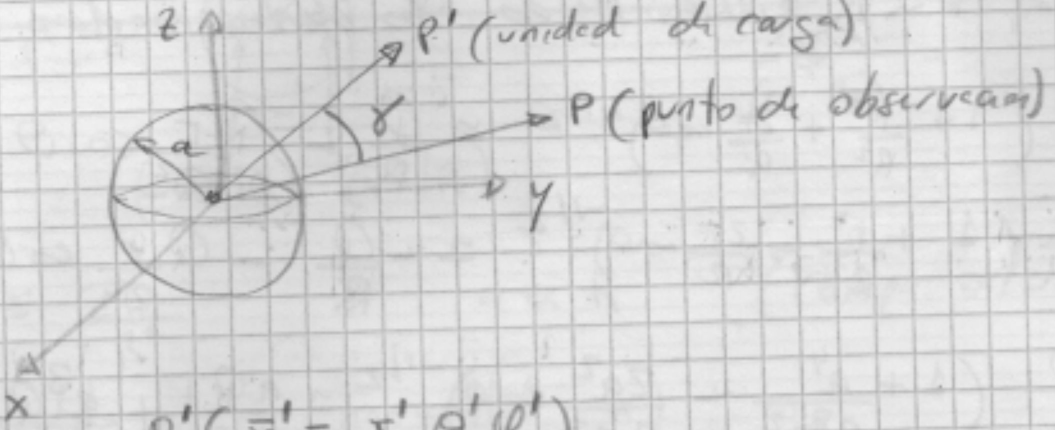
o sea $\qquad \phi = -E_0 z + E_0\dfrac{a^3}{r^3}z$

o $\qquad \phi = -E_0 z\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)$

$\Rightarrow$ El primer término es el debido al campo externo $-\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = E_0$ y el segundo corresponde a las cargas inducidas. (dipolo $\equiv \underbrace{\left[\left(\dfrac{Qa}{R}\right)\times\left(\dfrac{a^2}{R}\right)\times 2\right]}_{\sim 2qd \sim}$

Comentario $\rightarrow$ en todos los casos calcule la densidad de carga superficial $\quad \sigma = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=a}$

▷ Funcion de Green para la esfera = Solucion general



$P'(\bar{x}' \equiv r', \theta', \varphi')$

$P(\bar{x} \equiv r, \theta, \varphi)$

$$|\bar{x}-\bar{x}'| = (x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma)^{1/2}$$

$$\left|\bar{x}-\frac{a^2}{x'^2}\bar{x}'\right| = \left(x^2+\frac{a^4}{x'^2}-2x\frac{a^2}{x'}\cos\gamma\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\bar{x},\bar{x}') = \underbrace{\frac{1}{(x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma)^{1/2}}}_{\text{carga unidad}} - \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{x^2x'^2}{a^2}+a^2-2xx'\cos\gamma\right)}}_{\text{imagen}}}$$

(Funcion de Green en el problema exterior)

Vemos que si x o $x' \equiv a$ (superficie) entonces
$G = 0$

Para el problema de Poisson necesitamos tambien $\left(\frac{\partial G}{\partial n'}\right)\Big|$ $\bar{n}'$ = vector unitario dirigido hacia afuera del volumen

(en este caso $\bar{n}'$ esta sobre $\bar{x}'$ y apunta hacia el origen)

Asi que debemos calcular $\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{x'=a}$ resultado

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \bar{n}'}\right|_{x'=a} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+a^2-2xa\cos\gamma\right)^{-3/2}\cdot(-1)\cdot \left[2a-2ax\cos\gamma-2\frac{x^2}{a}+2xa\cos\gamma\right]$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial G}{\partial \bar{n}'}\right|_{x'=a} = -\left(x^2+a^2-2xa\cos\gamma\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{a}\right)\left(x^2-a^2\right)}$$

(derivada normal en el problema exterior)

Solvamos el problema de Laplace $\nabla^2\Phi=0$

Recordemos que, aplicando los teoremas de Green podemos escribir

$$\Phi(\bar{x}) = \int_V \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\right]$$

Si $G(\bar{x},\bar{x}') = \frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} + F(\bar{x},\bar{x}')$

$\nabla^2 F(\bar{x},\bar{x}') = 0$

Para las condiciones de Dirichlet $(G_D=0)_{\text{superficie}}$

y tomando Laplace $(\rho(\bar{x})=0)$ obtenemos

$$\phi(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \phi(\bar{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}\, ds'$$

o'

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega' \,\frac{\phi(a,\theta',\varphi')\, a\,(x^2-a^2)}{(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{1/2}}}$$

$d\Omega = d\varphi'\, d\theta' \operatorname{sen}\theta'$

$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi-\varphi')$

▷ (Solución ecuación de Laplace, condiciones Dirichlet)

▷ Retomemos el caso del laplaciano (∇^2) en coord. esféricas ampliando la condición de simetría azimutal.

Si $m \neq 0$ la ecuación (parte angular) del Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\right]P = 0$$

donde $P \equiv$ función de cos(theta) tiene como solución los polinomios asociados de Legendre

$$P_l^m(x) = (-)^m (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\left[P_l(x)\right]$$

vale para m>=0

o'

$$\boxed{P_l^m(x) = \frac{(-)^m}{2^l\, l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1}$$

vale para -l <= m<= l

$$\boxed{x = \cos\theta}$$

Aquí $-\ell \leq m \leq \ell$

Si $m>0$

$$P_\ell^m = \frac{(-)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}\left[(x^2-1)^\ell\right]$$

Si $m<0$

$$P_\ell^{-m} = (-)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m$$

En general, para $\nabla^2(\theta,\varphi)$ definimos el conjunto ortonormal completo de funciones sobre la esfera

(esféricos armónicos) $\Rightarrow$

$$\boxed{Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \cdot P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

La raíz cuadrada se elige para que se cumpla la condición de normalización.

Propiedades:

Conjugación $\Rightarrow$ $Y_{\ell -m}(\theta,\varphi) = (-)^m Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)$

Orto-normalización $\Rightarrow$ $\int d\Omega\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta(\ell\ell')\delta(mm')$

Completitud $\Rightarrow$ $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta'\varphi') Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\cdot\delta(\phi-\phi')$

Si $m=0$ entonces

$$\boxed{Y_{\ell 0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\theta)}$$

Cualquier funcion angular puede ser desarrollada en armónicas esfericas (o Y_ℓ^0 esfericas armónicas)

$$\boxed{f(\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}$$

donde (inversion)

$$A_{\ell m}=\int d\Omega\, Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)$$

$(d\Omega=d\theta\, d\varphi \operatorname{sen}\theta \quad , \quad 0\leq\theta\leq\pi \quad , \quad 0\leq\varphi\leq 2\pi)$

En particular

$$f(\theta,\varphi)\Big|_{\theta=0}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta=0,\varphi)$$

$$\boxed{\begin{cases}Y_{\ell m}(\theta=0,\varphi)\neq 0 & \text{si } m=0\\ 0 & \text{si } m\neq 0\end{cases}}$$

$$\Rightarrow f(\theta,\varphi)\Big|_{\theta=0}=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_{\ell 0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(1)$$

como $P_\ell(\cos\theta=1)=1 \quad \forall \ell$

entonces resulta $f(\theta,\varphi)\Big|_{\theta=0}=\sum_{\ell=0}A_{\ell 0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$

con $A_{\ell 0}=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\int d\Omega\, P_\ell(\cos\theta)f(\theta,\varphi)$

De esta manera, la solución general a un problema de contorno en coordenadas esféricas

$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

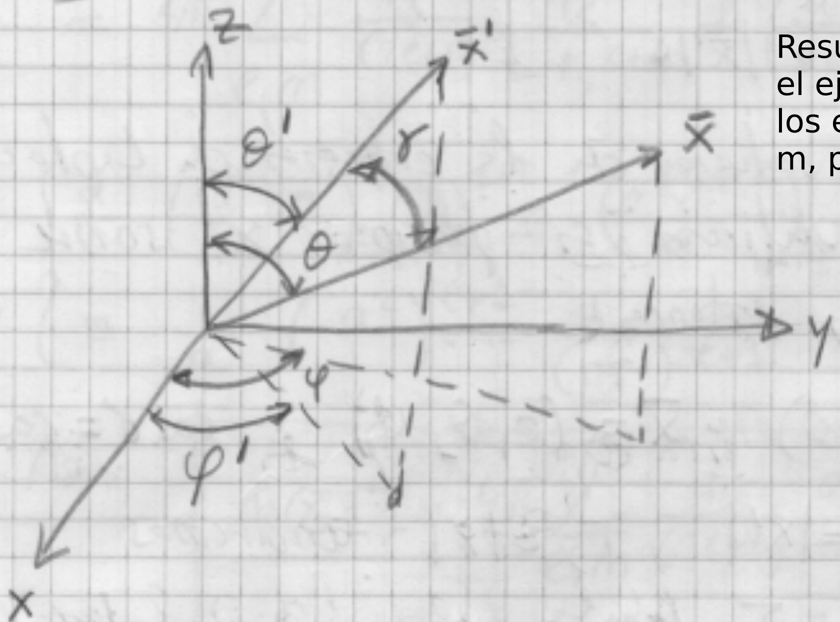
A continuación enunciaremos relaciones importantes entre estas funciones:

(a) Teorema de Suma (adición) de esféricos armónicos

El ángulo en espacio entre dos vectores se escribe

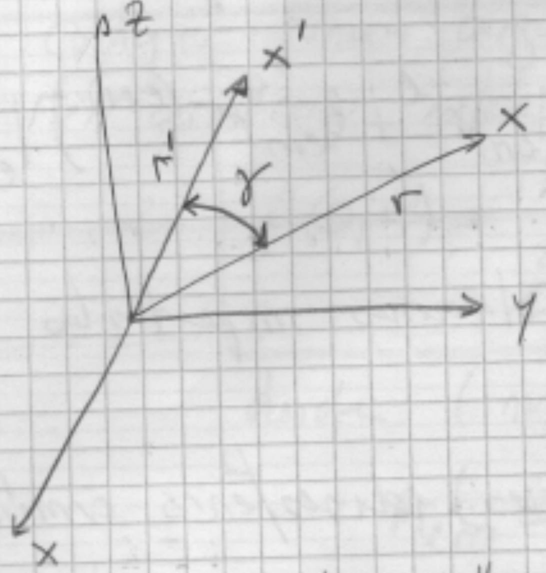
$$P_l(\cos\gamma)=\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\sum_{m=-l}^{l}Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$



Resultado muy importante: si se cambia el eje "z" se mezclan los esféricos armónicos con diferente m, pero nunca con l distintos al original.

A partir de este resultado, podemos retornar al problema del potencial en ausencia de superficies limitadoras,



Aquí, el "soporte" del potencial en $\bar{x}$ debido a la carga en $\bar{x}'$, resulta ⇒

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma)}$$

Este resultado importante se sigue de
* La forma general de la solución (pag 31)
* El teorema de adición
* La simetría de |x-x'| frente al intercambio x<-> x'
* El desarrollo en serie de potencias de 1/|x-x'| cuando los vectores son colineales (gamma=0). Recordemos que P_l(0)=1 para todo l

donde $r_>$ y $r_<$ será el mayor o menor valor de $|\bar{x}|$ o $|\bar{x}'|$.

Esta es una solución de la ecuación de Laplace, como puede verificarse si ponemos x' sobre el eje z, entonces

$$\bar{x}' = (r', 0, 0) \quad , \bar{x} \equiv (r, \theta, \varphi) \quad , \quad \cos\gamma = \cos\theta$$

y si $r_< = |x'|$, $r_> = |\bar{x}|$ tendremos

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{l} \frac{(r')^{l}}{(r)^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

reemplazando en esta expresión $P_\ell(\cos\gamma)$ por el desarrollo como suma de esféricas armónicas tendremos

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{(2\ell+1)} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y^*_{\ell m}(\theta'\varphi') Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}$$

Desarrollo de las funciones de Green en coordenadas esféricas, a partir de este resultado para $\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

Ejemplo 1

Problema exterior con superficie esférica en $r=a$

$$G(\bar{x},\bar{x}') = \left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} - \frac{a}{x'\left|\bar{x}-\frac{a^2}{(x')^2}\bar{x}'\right|} \right)$$

$$= 4\pi \sum_{\ell,m} \frac{1}{(2\ell+1)} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \frac{1}{a} \right] Y^*_{\ell m}(\theta'\varphi') Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

ya que $\left\{ \frac{a}{r'} \left(\frac{a^2}{r'^2} r'\right)^\ell \left(\frac{1}{r}\right)^{\ell+1} \equiv \left(\frac{a^{2\ell+2}}{a}\right) \frac{(r')^{\ell-2\ell-1}}{(r)^{\ell+1}} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \equiv \frac{1}{a} \left(a^2\right)^{\ell+1} \cdot \frac{1}{(rr')^{\ell+1}} \right.$

Así

$$\boxed{\begin{aligned} G(\bar{x},\bar{x}') &= 4\pi \sum_{\ell,m} \frac{1}{(2\ell+1)} g_\ell(rr') Y^*_{\ell m}(\theta'\varphi') Y_{\ell m}(\theta\varphi) \\ g_\ell(rr') &= \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \end{aligned}}$$

El factor $\left[\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right]$ tiene como

límites los resultados ya obtenidos

$(r<r')$ $\left[\frac{1}{(r')^{\ell+1}}\left\{r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\right.$

$(r>r')$ $\left[(r')^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+1}}\right]\frac{1}{r^{\ell+1}}$

Si $r=a$ ó $r'=a$ el factor radial se anula. $\Rightarrow g(r,r')\Big|_{r=a\ (\text{ó}\ r'=a)} = 0$

Solución general para la función de Green (coordenadas esféricas)

$$\begin{cases} \nabla_x^2 G(\bar{x},\bar{x}') = -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{x}') \\ \delta(\bar{x}-\bar{x}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \end{cases}$$

(Aquí hemos utilizado la propiedad (transf. de coordenadas)

$$\delta(x-x') = \frac{1}{|J(x_i\to u_i)|}\prod_j \delta(u_j-u_j').$$

En función de la base de esféricos armónicos tenemos

$$\boxed{\delta(\bar{x}-\bar{x}') = \frac{\delta(r-r')}{r^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m_\ell}(\theta',\varphi')Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)}$$

(hemos usado las propiedades de ortonormalidad de los esféricos armónicos).

Analogamente, escribimos

$$G(\bar{x},\bar{x}') = \sum_{\ell m_\ell} A_{\ell m_\ell}(\theta'\varphi')\, g_\ell(r,r')\, Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \nabla^2(r,\theta,\varphi)\left[g_\ell(r,r')\, Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)\right] = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')\, Y_{\ell m_\ell}(\theta$$

donde $A_{\ell m_\ell}(\theta',\varphi') = Y_{\ell m_\ell}(\theta',\varphi')$

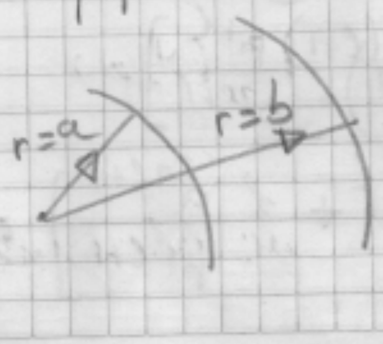
Usando la separación de variables y la completitud y ortogo-
nalidad de $Y_{\ell m}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \nabla^2(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(r\quad) + \dfrac{1}{r^2}\nabla^2(\theta,\varphi) \\ \nabla^2(\theta,\varphi) = \left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\quad\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\quad)\right] \end{cases}$$

Así $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r g_\ell(r,r')\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_\ell(r,r') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-}$$

Por lo tanto $$g_\ell(r\,r') = \begin{cases} A r^\ell + B r^{-(\ell+1)} & r<r' \\ A' r^\ell + B' r^{-(\ell+1)} & r>r' \end{cases}$$

Para superficies limitadoras concéntricas tenemos



$g(r,r') = 0$ si $r=a$
ó $r=b$

Así podemos escribir

$$g_\ell(r r') = \begin{cases} A\left(r^\ell - \dfrac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right) & r<r' \\ B'\left(\dfrac{1}{r^{\ell+1}} - \dfrac{r^\ell}{b^{2\ell+1}}\right) & r>r' \end{cases}$$

por lo tanto

$$g_\ell(r,r') = C\left(r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}}\right)$$

A partir de $\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}(r g_\ell) - \dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_\ell = -\dfrac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')$

multiplicando por r e integrando en $(r'-\varepsilon, r'+\varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r g_\ell(r,r')\right)_{r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr}\left(r g_\ell(r r')\right)_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}$$

en $r = r'+\varepsilon \rightarrow (r_< = r' \quad r_> = r)$

$$\frac{d}{dr}\left(r g_\ell(r,r')\right)_{r=r'+\varepsilon} = C\left(r'^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+1}}\right)\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^\ell} - \frac{r^{\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r g_\ell(r,r')\right)_{r=r'-\varepsilon} = C\left(\frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^\ell}{b^{2\ell+1}}\right)\frac{d}{dr}\left(r^{\ell+1} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^\ell}\right)$$

$$\Rightarrow C\left[(r')^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+1}}\right]\left[-\frac{\ell}{(r')^{\ell+1}} - (\ell+1)\frac{r'^\ell}{b^{2\ell+1}}\right]$$

$$- C\left[\frac{1}{(r')^{\ell+1}} - \frac{r'^\ell}{b^{2\ell+1}}\right]\left[(\ell+1)r'^\ell + \ell\frac{a^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1}}\right] =$$

$$= C\left\{ -\frac{\ell}{r'} - (\ell+1)\frac{r'^{2\ell}}{b^{2\ell+1}} + \ell\frac{a^{2\ell+1}}{r'^{2\ell+2}} + \frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\frac{(\ell+1)}{r'} - \frac{(\ell+1)}{r'} - \ell\frac{a^{2\ell+1}}{r'^{2\ell+2}} + \frac{r'^{2\ell}}{b^{2\ell+1}}(\ell+1) + \frac{\ell}{r'}\frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right]$$

$$= \frac{C}{r'}\left\{ -\ell - \cancel{\frac{(\ell+1)}{b^{2\ell+1}}r'^{2\ell+1}} + \cancel{\ell\frac{a^{2\ell+1}}{r'^{2\ell+1}}} + (\ell+1)\frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}} - (\ell+1) - \cancel{\ell\frac{a^{2\ell+1}}{r'^{2\ell+1}}} + \cancel{\frac{r'^{2\ell+1}(\ell+1)}{b^{2\ell+1}}} + \ell\frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right\}$$

$$= \frac{C}{r'}\left\{ -\ell\left(1 - \frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right) - (\ell+1)\left(1 - \frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right)\right\}$$

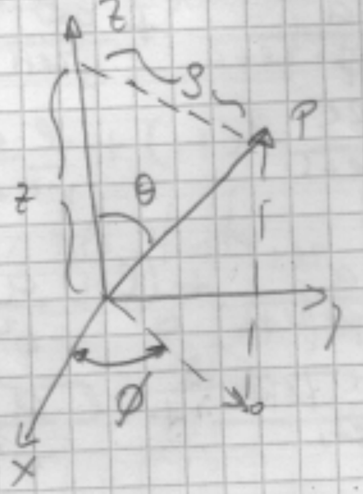
$$= -\frac{4\pi}{r'}$$

obteniendo $\Rightarrow$ $\boxed{C = \frac{4\pi}{[2\ell+1]\left(1 - \frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right)}}$

Por lo tanto, la función de Green para una capa esférica limitada por dos superficies esféricas de radios a y b, resulta dada por la expresión

$$\boxed{G(\bar{x},\bar{x}') = 4\pi\sum_{\ell m_\ell}\left[\frac{Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{(2\ell+1)\left(1 - \frac{a^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1}}\right)}\right]\cdot\left(r_<^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^{\ell}}{b^{2\ell+1}}\right)}$$

Ecuacion de Laplace en coordenadas cilindricas



$$(x,y,z) \rightarrow (\rho, \phi, z)$$

$$x = \rho \cos\phi$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\phi = (y/x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{d\rho}{dx}\dfrac{d}{d\rho} + \dfrac{d\phi}{dx}\dfrac{d}{d\phi} \\ \dfrac{d}{dy} = \dfrac{d\rho}{dy}\dfrac{d}{d\rho} + \dfrac{d\phi}{dx}\dfrac{d}{d\phi} \\ \dfrac{d}{dz} = \dfrac{d}{dz} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dx} = \frac{x}{\rho}} \qquad \boxed{\frac{d\rho}{dy} = \frac{y}{\rho}} \qquad \boxed{\frac{d\rho}{dz} = 0}$$

$$\frac{d\operatorname{tg}\phi}{dx} = \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{d\phi}{dx} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\phi \Rightarrow$$

$$\frac{d\operatorname{tg}\phi}{dy} = \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{d\phi}{dy} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = \frac{1}{x}\cos^2\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dx} = -\dfrac{\rho\operatorname{sen}\phi}{\rho^2\cos^2\phi}\cos^2\phi = -\left(\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\right) \\ \dfrac{d\phi}{dy} = \dfrac{\cos^2\phi}{\rho\cos\phi} = \left(\dfrac{\cos\phi}{\rho}\right) \end{cases}} \qquad \boxed{\frac{d\phi}{dz} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dy} = 0}$$

$$\frac{d}{dx} = \cos\phi \frac{d}{d\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{d}{d\phi}$$

$$\frac{d}{dy} = \sin\phi \frac{d}{d\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{d}{d\phi}$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2(x,y,z) = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2}}$$

Soluciones

$$\boxed{\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho)\,F(\phi)\,Q(z)}$$

$$FQ\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{FQ}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \frac{RQ}{\rho^2}\frac{d^2F}{d\phi^2} + RF\frac{d^2Q}{dz^2} = 0$$

dividiendo por FQR (No singular en todo el espacio) tenemos $\Rightarrow$

Separacion de variables

$$\left(\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{\rho^2 F}\frac{d^2F}{d\phi^2}\right)}_{\left(-\frac{v^2}{\rho^2}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dz^2}\right)}_{k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{v^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} + v^2F = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dz^2} - k^2Q = 0$$

ecuaciones separadas

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Q(z) &= e^{\pm kz} \\ F(\phi) &= e^{\pm i v\phi} \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Ecuación Radial}}$

$$R(\rho) = \rho^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j \quad \text{(Propuesta)}$$

polinomio

factor multiplicador

$$\frac{dR}{d\rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} \left(\frac{R}{\rho^{\gamma}}\right) + \rho^{\gamma} \sum_{j=0} a_j j \rho^{j-1}$$

$$= \frac{\gamma}{\rho} R + \rho^{\gamma} \sum_{j=0} a_j j \rho^{j-1}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = -\frac{\gamma}{\rho^2} R + \frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{\gamma}{\rho} R + \rho^{\gamma} \sum_{j=0} a_j j \rho^{j-1}\right)$$
$$+ \gamma \rho^{\gamma-1} \sum_j a_j j \rho^{j-1} + \rho^{\gamma} \sum_j a_j j(j-1) \rho^{j-2}$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{\gamma}{\rho^2} R} + \frac{\gamma^2}{\rho^2} R + \gamma \rho^{\gamma-1} \sum a_j j \rho^{j-1}$$
$$+ \gamma \rho^{\gamma-1} \sum_j a_j j \rho^{j-1}$$
$$+ \rho^{\gamma} \sum_j a_j j(j-1) \rho^{j-2}$$
$$+ \cancel{\frac{\gamma}{\rho^2} R} + \rho^{\gamma-1} \sum_j a_j j \rho^{j-1} +$$
$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) \rho^{\gamma} \sum_j a_j \rho^j = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma^2}{\rho^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R + R + (2\gamma + 1) \sum_j a_j j \rho^{\gamma+j-2}$$
$$+ \sum_j a_j j(j-1) \rho^{\gamma+j-2} = 0$$

$\Rightarrow \nu^2 = \gamma^2 \Rightarrow \nu = \pm\gamma$ (pre-factor multiplicador

$$\sum_{j=0} a_j \left[\rho^{\gamma+j} + \left[(2\gamma+1)j + j(j-1)\right] \rho^{\gamma+j-2} \right]$$

$$\Rightarrow \left(a_0 + ((2\gamma+1)2+2)a_2\right)\rho^{\gamma} = 0$$

$$a_0 + (4\gamma+4)a_2 = 0$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{a_0}{4(\gamma+1)}}$$

Idem $a_2 \rho^{\gamma+2} + \underbrace{(2\gamma+1)4 + 4\times 3}_{8\gamma+16}) a_4 = 0$

$$\boxed{a_4 = -\frac{a_2}{4\times 2(\gamma+2)}}$$

de donde $a_{2j} = -\dfrac{1}{4j(j+\gamma)} a_{2j-2}$

coeficientes de índice de potencia pares

y $a_{2j+1} = 0 \;\; \forall j$

En general escribimos (usando $\Gamma(n+1) = n!$)

$$\boxed{a_{2j} = \frac{(-)^j \, \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j! \, \Gamma(\alpha+j+1)} a_0}$$

siendo $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$

y por conveniencia $\boxed{a_0 = \dfrac{1}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}}$

Soluciones (Funciones de Bessel de orden γ)

$$J_v(\rho) = \rho^v \sum_{j=0} \frac{(-)^j \Gamma(v+1)}{2^{2j}\Gamma(v+j+1)\, j!} \cdot \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} \cdot \rho^{2j}$$

entonces

$$\boxed{J_v(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^v \sum_{j=0} \frac{(-)^j}{j!\,\Gamma(v+j+1)} \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2j}} \quad v=\gamma$$

o'

$$\boxed{J_{-v}(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-v} \sum_{j=0} \frac{(-)^j}{j!\,\Gamma(-v+j+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2j}} \quad v=-\gamma$$

$j \geq v-1$

si v es entero obviamente resulta

$$\Rightarrow \boxed{J_{-v}(\rho) = (-)^v J_v(\rho)}$$

si v no es entero

$\Rightarrow$ $J_{\pm v}(\rho)$ son linealmente independientes

Funciones de Neumann (llamadas tambien de Bessel de segunda especie)

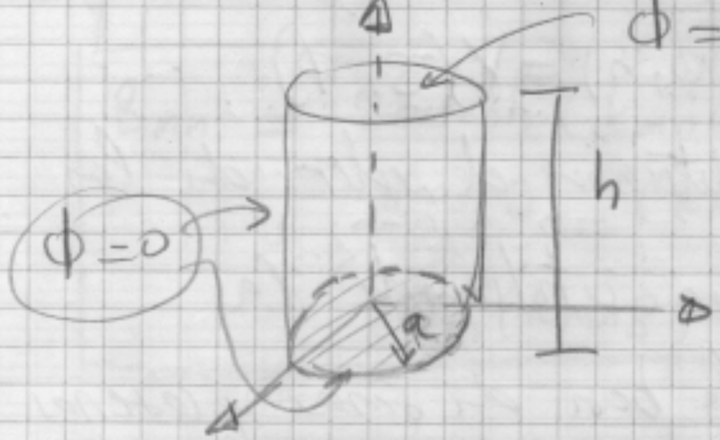
$$\Rightarrow \boxed{N_v(\rho) = \frac{\left(J_v(\rho)\cos(v\pi) - J_{-v}(\rho)\right)}{\operatorname{sen}(v\pi)}}$$

Funciones de Hankel (Bessel de tercera especie)

$$\Rightarrow \boxed{H_v^{(1)}(\rho) = J_v(x) + i\,N_v(x)} \; ; \; \boxed{H_v^{(2)}(\rho) = J_v(x) - i\,N_v(x)}$$

Ejemplo (Condiciones de contorno en coordenadas cilíndricas)

Cilindro de radio a y altura h,
El potencial en la superficie lateral y en la base es $\Phi=0$, en la base superior es $\Phi=V(\rho,\phi)$



entonces, para la parte angular tendremos

$$\begin{cases} F(\phi) = A \operatorname{sen} \nu\phi + B \cos \nu\phi \\ Q_k(z) = \operatorname{senh}(kz) \end{cases}$$

como ν debe ser entero y k es una constante a determinar escribimos la parte radial

$$R(\rho) = C J_\nu(k\rho)$$

como $R(\rho=a)=0 \Rightarrow$

$$J_\nu(X_n(\nu) = k_n(\nu)a) = 0 \quad \Rightarrow k_{\nu n} a$$

$\boxed{n \text{ raíces del polinomio}}$

ceros del polinomio

Entonces, escribimos como solución

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\rho,\phi,z) = \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_v(k_n(v)\rho)\cdot \\ \sinh(k_n(v) z)\cdot(A_{vn}\sin v\phi + \\ B_{vn}\cos v\phi).\end{aligned}}$$

Para $z=h$ $\quad \phi(\rho,\phi,h) = V(\rho,\phi)$

de donde podemos determinar el valor de las constantes A_{vn} y B_{vn} utilizando la ortonormalidad de la base de senos y cosenos circulares y la completitud de las funciones de Bessel de primera especie $(J_v(\rho))$

$$\Rightarrow \boxed{f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{vn} J_n(x_{vn}\rho/a)}$$

entonces multiplicando por J_v e integrando;

$$\boxed{\begin{aligned}A_{vn} = \frac{2}{a^2 J_{v+1}^2(x_{vn})}\int_0^a d\rho\, \rho\, f(\rho)\, J_v\left(\frac{x_{vn}\rho}{a}\right) \\ \text{para} \quad 0 \leq \rho \leq a\end{aligned}}$$

Así, en nuestro problema tenemos $\Rightarrow$

$$\boxed{A_{mn} = \frac{2\,\mathrm{cosech}\,(k_{mn}L)}{\pi a^2 J^2_{m+1}(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho\, \rho\, V(\rho,\phi)\, J_m(k_{mn}\rho) \sin m\phi}$$

y

$$\boxed{B_{mn} = \frac{2\,\mathrm{cosech}\,(k_{mn}L)}{\pi a^2 J^2_{m+1}(k_{mn}a)} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho\, \rho\, V(\rho,\phi)\, J_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi}$$

Nota $\Rightarrow$ Al escribir los resultados anteriores hemos utilizado algunos conceptos básicos (funciones ortonormales, bases, etc)

(1) Condición de ortonormalidad:

base $\{f_n(x)\} \equiv$ conjunto de funciones definidas en un intervalo dado

$$\Rightarrow \int_a^b f_n^*(x) f_m(x)\, dx = \delta_{nm} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

(2) Cualquier función definida en el mismo intervalo se escribe como combinación lineal en la base $\{f_n\}$

$$U(x) = \sum_n a_n f_n(x)$$ donde (multiplicando U por $f_m^*(x)$ e integrando, usando la condición (1))

$$\int_a^b dx\, U f_m^*(x) = \sum_n a_n \int_a^b f_m^*(x) f_n(x)\, dx = a_m$$

(ya que $f_M(x)$ está contenida en $\{f_n(x)\}$

③ Completitud

Construimos
$$U(x) = \sum_n a_n f_n(x)$$
$$= \sum_n \left(\int_a^b ds\, f_n(s)\, U(s)\right) f_n(x)$$
$$= \int_a^b ds \left[\sum_n f_n(s) f_n(x)\right] U(s)$$

de donde
$$\sum_n f_n(s) f_n(x) \Rightarrow \delta(s-x)$$

bajo el signo integral, fija el valor $s=x$ si $x \in (a,b)$ o' $s=0$ si $x \notin (a,b)$

resultando
$$U(x) = \int_a^b ds\, \underbrace{U(s)\,\delta(s-x)}_{\Downarrow} \equiv U(x)$$

fija el valor de $U(s)$ en $s=x$ si $x \in (a,b)$

$\boxed{\text{Ejemplos}}$ Desarrollo de funciones en series de Fourier

(en un intervalo $-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$) las funciones

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}}\, \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) \right\}_{m=\text{entero}}$$ cumplen las

condiciones de ortonormalidad requerida a una base, así, para una función $f(x)$ en el mismo intervalo escribimos su representación en series de Fourier

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1} B_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) f(x)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) f(x)$$

ya que $\boxed{\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{mn}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \cos(\alpha-\beta) \\ \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \cos(\alpha+\beta) \\ \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) \\ \quad \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{2}\left(\cos\left[2\pi\frac{x}{L}(m-n)\right] + \cos\left[2\pi\frac{x}{L}(m+n)\right]\right)$$

$$= \left(\frac{L}{2}\right)\delta_{mn} \qquad \left(\text{idem } \int_{-L/2}^{L/2} dx\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right)$$

Funciones exponenciales

(en un intervalo infinito, definiremos funciones continuas, tal el caso de las funciones exponenciales

$$f_n(x) = e^{\pm ikx} \qquad k = \text{real}$$

así
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} A(k)\, dk$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik'x} F(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik'x} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} A(k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x}}_{2\pi\delta(k-k')}$$

$$= A(k')\, 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A(k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik'x} F(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x} = \delta(k-k') \quad (\underline{\underline{\text{ortogonalidad}}}) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')} = \delta(x-x') \quad (\underline{\underline{\text{completitud}}}) \end{aligned}}$$

Resumen

Campo eléctrico y potencial eléctrico $\Rightarrow$

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi}$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{(Laplace)}$$

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho(\bar{x}) \quad \text{(Poisson)}$$

Consecuencia $\Rightarrow$ Gauss

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho(\bar{x})$$

Resolvente (Función de Green)

$$\nabla^2 G(x,x') = -4\pi\,\delta(x-\bar{x}')$$

$$G(x,x') = \frac{1}{|x-x'|} + F(x,x')$$

Solución general para $\phi(\bar{x})$

$$\phi(\bar{x}) = \int_V \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\frac{\partial}{\partial n'}\left[\frac{1}{R}\right]\right] da$$

$$R = |\bar{x}-\bar{x}'|$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\,\delta(\bar{x}-\bar{x}')$$

Laplacianos en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas

$$\nabla^2(x,y,z) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$$

$$\nabla^2(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Funciones propias, polinomios ortonormales

$$\nabla^2(x,y,z) \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\cos\alpha_n x_i \\ \operatorname{sen}\alpha_m x_i\end{matrix} \quad (x_i = x,y,z)\ \left(\alpha_m \Rightarrow \frac{2\pi m}{L_i}\right)\right\}$$

$$\nabla^2(r,\theta,\varphi) \rightarrow \{F(r)\,Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)\}$$

$$\nabla^2(\rho,\varphi,z) \rightarrow \{J_\nu(x)\}\{e^{\pm i m\varphi}\}\{e^{\pm kz}\}$$

(50)

Teorema de adición de los esféricos armónicos

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{\substack{l=0 \\ m_l=(-l \to l)}}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \left(\frac{4\pi}{(2l+1)} Y^*_{lm_l}(\theta',\varphi') Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \right)$$

Completitud, ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \, Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'}$$

$$\Rightarrow \quad P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m_l=-l}^{l} Y^*_{lm_l}(\theta'\varphi') Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi-\varphi')$$

Solución general a un problema de contorno en coordenadas esféricas

$$\Rightarrow \quad \phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$$

Soluciones a problemas con simetría azimutal

$$\Rightarrow \quad \phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$

Condiciones de Dirichlet $\quad G(x,x') = 0$ sobre S (sup. limitadora)

Condiciones de Neumann $\quad \frac{\partial G}{\partial n'}(x,x') = 0$ para x' sobre S

en general

(Dirichlet) $\phi(x) = \int_V \rho(x') G_D(x,x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(x') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'$

(Neumann) $\phi(x) = \int_V \rho(x') G_N(x,x') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi_n}{\partial n'} G_N \, da' + \langle\phi\rangle_S$

Ejemplos

1. Anillo de radio a y carga total Q en el interior de una esfera conductora de radio b conectada a tierra.
2. Carga lineal uniforme de longitud $2b$ y carga total Q en el interior de una esfera conductora de radio b conectada a tierra.
3. Anillo cargado de radio a y carga total q, simetrico alrededor del eje z, con centro en $z=b$.
4. Esfera conductora con hemisferios a diferentes potenciales.

Desarrollo en multipolos

A partir del desarrollo

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right) \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta'\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

para una dada distribución de cargas $\rho(\bar{x}')$ interior a una dada región

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \sum_{l=0} \sum_{m_l=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right) \cdot \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) \cdot q_{lm_l}}$$

donde

$$\boxed{q_{lm_l} = \int d^3x' (r')^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi') \rho(x')}$$

(esta es la definición de los momentos multipolares)

Los primeros momentos multipolares se escriben

$$(l=0, m_l=0) \Rightarrow q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\bar{x}') d^3x' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

ya que $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$.

Así, si $(l=1, m_l=1)$ tenemos $\begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases}$

luego

$$\boxed{q_{10} = \int d^3x' \rho(\bar{x}') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \, (r')}$$

$$= \int dr' (r')^2 \int d\theta' \sin\theta' \int d\varphi' \, \rho(\bar{x}') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta'$$

$$= \int dr' (r')^2 \cdot \int d\theta' \sin\theta' \int d\varphi' \, \rho(\bar{x}') \cdot z' \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int d^3x' \, \rho(x') z' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \, p_z$$

(p_z es el momento dipolar de carga según $\hat{z}$).

El cálculo de q_{11} resulta en

$$q_{11} = \int d^3x' \, (r') \cdot \rho(\bar{x}') \cdot \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta' \, e^{-i\varphi'} \right]$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3x' \rho(x') \left[r' \sin\theta' \cos\varphi' - i \, r' \sin\theta' \sin\varphi' \right]$$

$$\boxed{q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x - i p_y \right)}$$

El momento $\boxed{q_{1-1} = (-)^1 q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x + i p_y \right)}$

Cuando $l=2$, tenemos los términos componentes del tensor cuadrupolar, tomemos el caso con $l=2$, $m_l=2$

$$q_{22} = \int d^3x' (r')^2 \rho(\bar{x}') \, Y_{22}^*(\theta' \varphi')$$

usando

$$Y_{22}(\theta'\varphi') = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\, \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$$

$$\Rightarrow \int d^3x' \rho(x') \cdot \left\{ r'^2 \sin^2\theta\,(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) \right\} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$$

recordando

$x' = r' \sin\theta \cos\varphi$

$y' = r' \sin\theta \sin\varphi$

$$(x' - iy')^2 = (r')^2 \sin^2\theta' \left\{ \underbrace{\cos^2\varphi' - \sin^2\varphi'} - 2i \sin\varphi' \cos\varphi' \right\}$$

$(x'-iy')(x'-iy')$

$$= (r')^2 \sin^2\theta' \left\{ \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi \right\}$$

de donde resulta

$$\boxed{q_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3x' \rho(\bar{x}')\,(x' - iy')^2}$$

En general, escribimos para los elementos del tensor cuadrupolar $\Rightarrow$

$$\boxed{Q_{ij} = \int d^3\bar{x}' \rho(\bar{x}')\,(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})}$$

El resultado final para una distribución dada de cargas, observada desde el exterior se escribe (reuniendo los términos calculados hasta el momento)

$$\boxed{\phi(\bar{x}) = \frac{q}{r} + \frac{\bar{p}\cdot\bar{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots}$$

Expresemos ahora el campo eléctrico en función de los momentos multipolares,

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\left\{ \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1}\, q_{\ell m}\left(\frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}}\right)\right\}$$

$$E_r\Big|_{\ell m} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\bar{\nabla}\phi\right)\Big|_{\ell m} \Rightarrow 4\pi\,\frac{(\ell+1)}{(2\ell+1)}\, q_{\ell m}\, \frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+2}}$$

$$E_\theta\Big|_{\ell m} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\bar{\nabla}\phi\right)\Big|_{\ell m} = -\frac{4\pi}{(2\ell+1)}\cdot q_{\ell m}\cdot\frac{1}{r^{\ell+2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{\ell m}\right)$$

$$E_\phi\Big|_{\ell m} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\bar{\nabla}\phi\right)\Big|_{\ell m} = -\frac{4\pi}{(2\ell+1)}\, q_{\ell m}\,\frac{im}{r^{\ell+2}\sin\theta}\,Y_{\ell m}(\theta\varphi)$$

Para el caso de un dipolo orientado según el eje z ($p_x = p_y = 0$, $p_z = p$)

$q_{1\pm1} = 0$, $q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p$ resulta

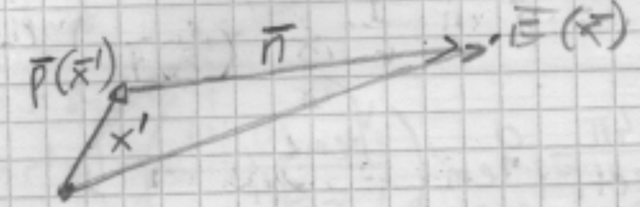
$$E_r = \left(\frac{4\pi \times 2}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,\frac{1}{r^3} = \frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,(-)\sin\theta = \frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$E_\phi = 0$ (ya que $m=0$)

Este resultado se escribe, para una orientación arbitraria del vector dipolar eléctrico como

$$\boxed{\bar{E}(\bar{x}) = \frac{3\bar{n}(\bar{p}\cdot\bar{n}) - \bar{p}}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}}$$



Problema explicar los resultados anteriores usando la expresión general ($\bar{p} \,//\, \hat{z}$)

- Desarrollo multipolar de la energía de una distribución de cargas en un campo externo.

Para una dada distribución la energía electrostática viene dada por

$$\boxed{U = \int \rho(\bar{x})\,\phi(\bar{x})\,d^3\bar{x}}$$

Para un potencial con variaciones pequeñas en el entorno al origen, efectuamos un desarrollo de Taylor en $\bar{x}=0$

$$\phi(\bar{x}) = \phi(0) + \bar{x}\cdot(\bar{\nabla}\phi)_{\bar{x}=0} + \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i x_j \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\bar{x}=0} + \cdots$$

ó

$$\phi(\bar{x}) = \phi(0) - \bar{x}\cdot\bar{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i x_j \left[\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right]_{\bar{x}=0} + \cdots$$

Como suponemos que la distribución de carga no es la fuente del campo externo, tenemos $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E}\Big|_{\bar{x}=0} = 0}$

y a partir de esta relación completamos el tensor cuadrupolar, de donde resulta

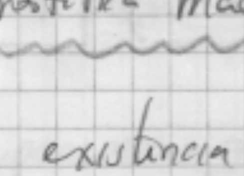
$$\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}=0) - \bar{x}\cdot\bar{E}(\bar{x}=0) - \frac{1}{6}\sum_{ij}\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_{x=0}$$

$\Rightarrow$ reemplazando en la expresión de U, tenemos

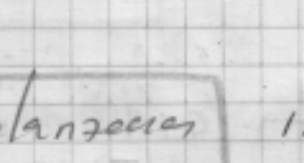
$$\boxed{U = q\,\phi(\bar{x}=0) - \bar{p}\cdot\bar{E}(\bar{x}=0) - \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}=0} + \cdots}$$

Electrostática macroscópica

La existencia de cargas de polarización indica la necesidad de modificar las ecuaciones válidas en vacío. En la figura mostramos esquemáticamente la situación generada por la aplicación de un campo externo a un medio polarizable.



{Campo externo nulo, carga total nula en el volumen ocupado por materia}



{Campo externo}
(las cargas se orientan pero no se desprenden del medio)

Si contamos con N dipolos, el momento dipolar total debido a la muestra orientada resulta

$$\overline{P} = N \langle \vec{p} \rangle$$

Este vector sumado al campo eléctrico define el vector desplazamiento $\overline{D}$, tal que

$$\boxed{\overline{D} = \overline{E} + 4\pi \overline{P}}$$

Notemos que la carga total del sistema es

$$\boxed{\rho = \rho_{externa} + \rho_{polarización}}$$

Carga neta del sistema

La condición de linealidad

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \vec{E}}$$

nos permite escribir

$$\boxed{\overline{D} = (1 + 4\pi \chi_e)\, \overline{E}}$$

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$$

donde $\varepsilon = 1 + 4\pi \chi_e$ es la constante dieléctrica del medio material.

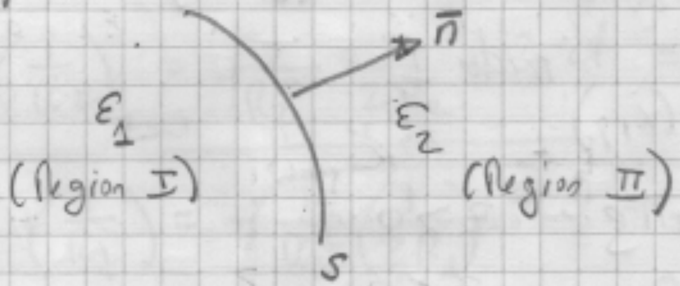
Así, reescribimos la ley de Gauss

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = 4\pi \rho \quad \text{ó} \\ \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho\end{gathered}}$$

El vector $\bar{D}$ tiene como fuentes las cargas libres.
El vector $\bar{E}$ tiene como fuentes las cargas totales
El vector $\bar{P}$ tiene como fuentes las cargas de polarización.

Condiciones de Contorno para $\bar{E}$ y $\bar{D}$:

La figura muestra una capa que separa dos medios con diferentes constantes dieléctricas.

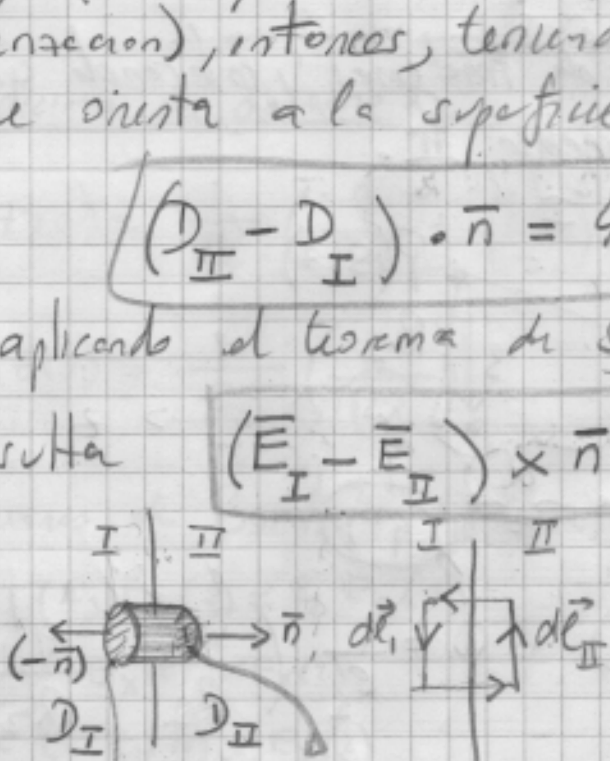


Suponemos que σ es la densidad superficial de carga (excluyendo la densidad de carga de polarización), entonces, teniendo en cuenta al vector que orienta a la superficie tenemos

$$\boxed{(D_{II} - D_{I}) \cdot \bar{n} = 4\pi\sigma} \quad \text{(Componentes Normales)}$$

y aplicando el teorema de Stokes a $\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0}$

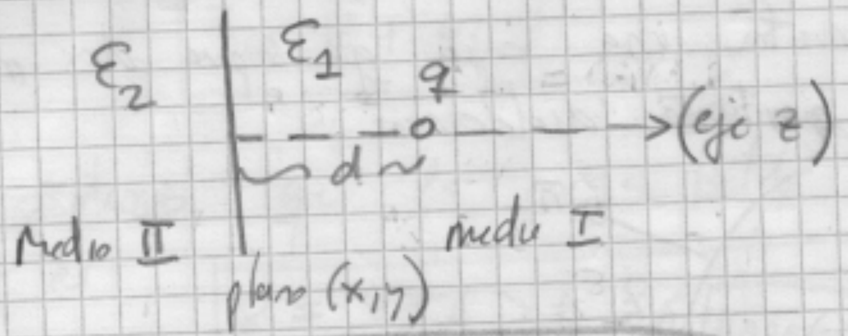
resulta $$\boxed{(\bar{E}_{I} - \bar{E}_{II}) \times \bar{n} = 0} \quad \text{(componente tangencial)}$$



$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Problemas de contorno con dieléctricos ⇐

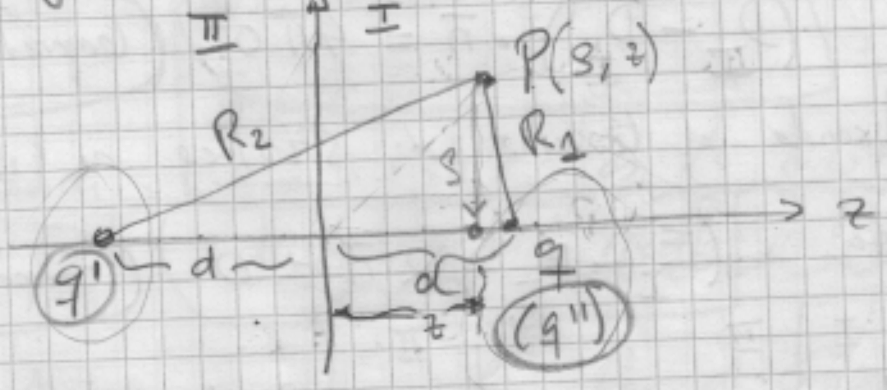
Ejemplo 1 Carga q en un medio dieléctrico (ε_1) semiinfinito, a una distancia d del plano de separación de otro medio (ε_2)



Condiciones

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varepsilon_1 \nabla\cdot\overline{E} = 4\pi\rho & z>0 \\ \varepsilon_2 \overline{\nabla}\cdot\overline{E} = 0 & z<0 \\ \overline{\nabla}\times\overline{E} = 0 & \end{array}}$$

Aplicaremos el método de imágenes, colocando una carga imagen en el medio II.



Así en I ($z>0$) $\quad \phi = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{R_1} + \dfrac{q'}{R_2}\right)$

y en II ($z<0$) $\quad \phi = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{q''}{R_1}\right)$

(E1)

Entonces ⇒

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right)_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_2}\right)_{z=0} =$$

$$R_1=\sqrt{\rho^2+(d-z)^2} \qquad R_2=\sqrt{\rho^2+(d+z)^2}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right)} = (-)\left(\frac{1}{R_1^2}\right)\left(\frac{1}{2R_1}\right)(2)(d-z)(-) = \frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_2}\right)_{z=0} = \frac{1}{R_2^2}\cdot\frac{1}{2R_2}\cdot 2d = \frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

Componente Normales.

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{2R_1}\right)\cdot 2\rho = -\frac{\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{1}{R_2^2}\left(\frac{1}{2R_2}\right)\cdot 2\rho = -\frac{\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

Componente tangenciales

⇒ Condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \phi(z>0) = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{R_1}+\dfrac{q''}{R_2}\right) \Rightarrow \\ \phi(z<0) = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{q''}{R_1}\right) \end{cases}$$

Condiciones de Borde $\varepsilon_i E_z(i) =$ constante

$(q-q'=q'')$ $\quad \varepsilon_1 E_z(1) = \varepsilon_2 E_z(2)$ $\quad$ } $D_{n_1}=D_{n_2}$

$\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q') = \frac{q''}{\varepsilon_2}$ $\quad E_x(1)=E_x(2)$

$\quad E_y(1)=E_y(2)$ $\quad$ } componentes tangenciales entonces obtenemos como resultado el sistema

$$\begin{cases} q = q' + q'' \\ \frac{1}{\varepsilon_1} q = -\frac{1}{\varepsilon_1} q' + \frac{1}{\varepsilon_2} q'' \end{cases}$$

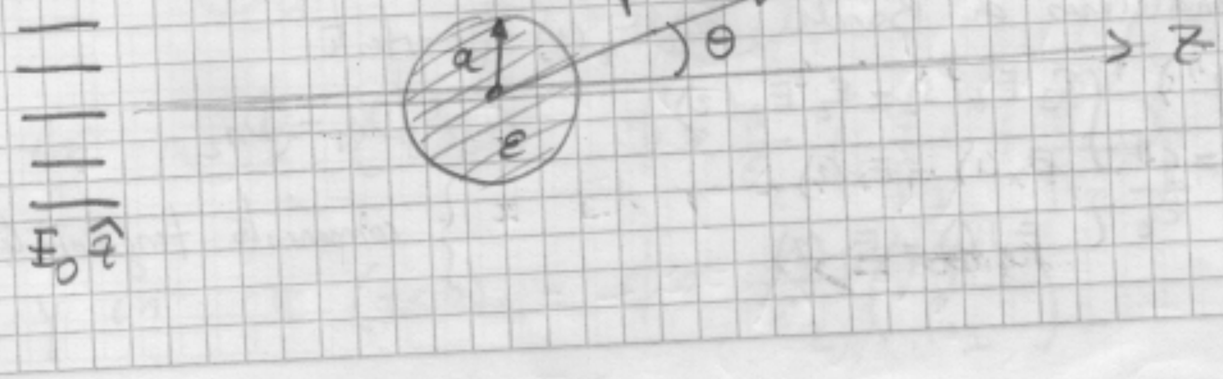
$$\Rightarrow \quad q' = \begin{vmatrix} q & 1 \\ q/\varepsilon_1 & 1/\varepsilon_2 \end{vmatrix} \frac{1}{\text{determ.}} = \frac{q\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)}$$

$$= q \cdot \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = -q\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)$$

análogamente $\quad q'' = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & q \\ -1/\varepsilon_1 & q/\varepsilon_1 \end{vmatrix}}{\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_1}\right)} = \dfrac{q\,(2/\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/\varepsilon_2 \varepsilon_1}$

$$q'' = \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$$

$\boxed{\text{Ejemplo 2}}$ Esfera de radio a y constante dieléctrica ε en un campo uniforme que a grandes distancias se comporta como $E \Rightarrow E_0 \hat{z}$



63

Condiciones del Problema

Carga libres $\Rightarrow$ No existen $\Rightarrow$ (Problema de Laplace)
Simetría $\Rightarrow$ axial $\Rightarrow$ (Rotaciones alrededor del eje z no proporcionan información)

$$r<a \quad \phi\,(\text{interior}) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\, r^l P_l(\cos\theta)$$

$$r>a \quad \phi\,(\text{exterior}) = \sum_{l=0} \left(\beta_l r^l + C_l\, r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$$

Condicion en infinito $\phi = -E_0 z$

y en $r=a$

Componente tangencial de E $\Rightarrow -\frac{1}{a}\frac{\partial \phi_{int}}{\partial\theta} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial\theta}$

Componente normal de D $\Rightarrow -\varepsilon\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} = -\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r}$

Estas condiciones se traducen en las siguientes relaciones entre constantes (α_l, β_l, C_l)

$$\begin{cases} \beta_1 = -E_0 & \text{ya que } r P_1(\cos\theta) = z \\ \beta_l = 0 & \forall l \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Por independencia de las derivadas para cada l tenemos $\Rightarrow$

$l=1 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 + \frac{c_1}{a^3}$

$$\boxed{\alpha_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3}}$$

$l \neq 1$ $\boxed{\alpha_l = \frac{c_l}{a^{2l+1}}}$

y las derivadas radiales conducen a las relaciones

$l=1 \Rightarrow -\varepsilon\alpha_1 = +E_0 + \frac{2c_1}{a^3}$

ó $\boxed{\varepsilon\alpha_1 = -E_0 - 2\frac{c_1}{a^3}}$

y para $l \neq 1$ $\boxed{-\varepsilon l \alpha_l = (l+1)\frac{c_l}{a^{2l+1}}}$

por lo tanto $\Rightarrow$

(A) $\begin{cases} E_0 = -\alpha_1 + \frac{c_1}{a^3} \\ E_0 = -\varepsilon\alpha_1 - \frac{2c_1}{a^3} \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 0 = -\alpha_l + \frac{c_l}{a^{2l+1}} \\ 0 = -\varepsilon l \alpha_1 + (l+1)\frac{c_l}{a^{2l+1}} \end{cases}$

por (A) $\begin{cases} \alpha_1 = E_0\left(-2/a^3 - 1/a^3\right) / \left(2/a_3 + \varepsilon/a_3\right) \\ c_1 = E_0\left(-1+\varepsilon\right) / \left(2/a_3 + \varepsilon/a_3\right) \end{cases}$

ó sea $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = -3E_0/(2+\varepsilon) \\ c_1 = E_0(\varepsilon-1)/(2+\varepsilon) \end{cases}}$

65

y por (B) $\alpha_\ell = c_\ell = 0 \quad \forall \ell \neq 1$.

Así resulta

$$\phi_{interior} = -\left(\frac{3}{2+\varepsilon}\right) E_0 r \cos\theta$$

$$\phi_{exterior} = -E_0 r \cos\theta + \frac{(\varepsilon-1)}{(\varepsilon+2)} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta$$

En el interior de la esfera el campo es constante y paralelo al campo externo.

(el campo en la esfera es menor que el campo externo)

$$E_{int} = \left(\frac{3}{2+\varepsilon}\right) E_0 \qquad (\text{según } \hat{z})$$

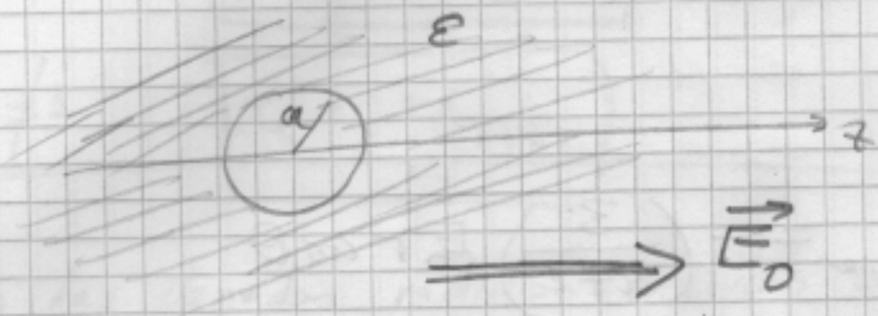
en el exterior tenemos el campo aplicado ($E_0 \hat{z}$) y el campo debido a un dipolo colocado en el origen de la esfera (momento dipolar $\boxed{p = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) a^3 E_0}$ orientado según el campo externo).

La polarización es constante en el volumen de la esfera

$$\vec{P} = \left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)\vec{E} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\vec{E_0}$$

Ejemplo 3

Cavidad esférica en un dieléctrico



Aplicando el resultado anterior, reemplazando $(\varepsilon) \to (1/\varepsilon)$, de donde tenemos

$$\boxed{E_{int} = \frac{3}{(2+1/\varepsilon)} E_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\right) E_0}$$

$\Rightarrow$ { (el campo en la cavidad es mayor que el campo externo).

$$\phi'(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i}{|\bar{x}-\bar{x}_i|}$$

la energía potencial necesaria para remover la carga es entonces

$$U_i = q_i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{|\bar{x}_i-\bar{x}_j|}$$

La energía potencial total es entonces

$$U_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|\bar{x}_i-\bar{x}_j|}$$

ó en forma simetrica

$$\boxed{U_{TOTAL} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\bar{x}_i-\bar{x}_j|}}$$

(eliminando la restriccion $j<i$)

Para una distribucion continua de cargas, resulta

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\bar{x})\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|} d^3\bar{x}\, d^3\bar{x}'}$$

Podemos usar la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\bar{x}) = -4\pi \rho(\bar{x})$$

y la definicion de $\phi(\bar{x}) = \int \frac{d^3\bar{x}'\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

para reescribir $U \Rightarrow$ $\boxed{U = -\frac{1}{8\pi} \int d^3\bar{x}\; \Phi(\bar{x}) \nabla^2 \phi(\bar{x})}$

61

de donde

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \phi\, \bar{\nabla}^2 \phi\, d^3x$$

$$= -\left(\frac{1}{8\pi}\right)\left[\int \bar{\nabla}\cdot(\phi\, \bar{\nabla}\phi)\, d^3\bar{x} - \int |\bar{\nabla}\phi|^2 d^3\bar{x}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{8\pi}\right)\int |\bar{\nabla}\phi|^2 d^3x$$

(el primer término se anula, es una dif exacta)

de manera que $\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int |\bar{E}|^2 d^3x}$

Veamos como se modifica esta expresion en presencia de dielectricos, escribiendo $\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi}$ y tomando la densidad de carga como fuentes de $\bar{D}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = 4\pi\rho}$,

de donde para una variacion de la densidad de carga tendremos

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi}\bar{\nabla}\cdot(\delta\bar{D})$$, luego reescribimos

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\bar{x})\,\Phi(\bar{x})\, d^3x$$

Tomemos una pequeña variación

$$\delta U = \int \delta \rho(\bar{x})\, \phi(\bar{x})\, d^3x$$

$$\delta \rho = \frac{1}{4\pi} \bar{\nabla} \cdot (\delta \bar{D})$$

$$\delta U \equiv \int \frac{1}{4\pi} \left(\bar{\nabla} \cdot (\delta \bar{D})\right) \phi(\bar{x})\, d^3x$$

$$\equiv \int \frac{1}{4\pi} \left[\bar{\nabla} \cdot \left[(\delta \bar{D}) \phi \right] - \delta \bar{D} \cdot \bar{\nabla} \phi \right] d^3x$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi} \int \delta \bar{D} \cdot \vec{E}\, d^3x$$

$\Rightarrow$ Si el medio es lineal resulta

$$\bar{E} \cdot \delta \bar{D} = \frac{1}{2} \delta (\bar{E} \cdot \bar{D})$$

entonces $\delta U = \dfrac{1}{8\pi} \left[\displaystyle\int \delta (\bar{E} \cdot \bar{D})\, d^3\bar{x} \right]_D.$

considerando la suma de variaciones, resulta

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi} \int \bar{E} \cdot \bar{D}\, d^3x}$$

Si tomamos la variación debido a la introducción de un dieléctrico

$$U_{vacío} = \frac{1}{8\pi} \int \bar{E}_0 \cdot \bar{D}_0\, d^3\bar{x}$$

$$U_{dielect} = \frac{1}{8\pi} \int \bar{E} \cdot \bar{D}\, d^3\bar{x}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{8\pi} \int (\bar{E} \cdot \bar{D} - \bar{E}_0 \cdot \bar{D}_0)\, d^3\bar{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\pi}\int\Big[\big(\bar{E}\cdot\bar{D}_0 - \bar{D}\cdot\bar{E}_0 + \bar{E}\cdot\bar{D} - \bar{E}\cdot\bar{D}_0 + \bar{E}_0\bar{D} - \bar{E}_0\bar{D}_0\big)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\pi}\int\Big[\big(\bar{E}\cdot\bar{D}_0 - \bar{D}\cdot\bar{E}_0\big)\Big]d^3\bar{x}$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int\Big[\big(\bar{E}+\bar{E}_0\big)\cdot\big(\bar{D}-\bar{D}_0\big)\Big]d^3\bar{x}$$

y siendo $\left(\bar{E}+\bar{E}_0\right) = -\bar{\nabla}\Phi$ la segunda integral

$$\Rightarrow -\frac{1}{8\pi}\int\big(\bar{D}-\bar{D}_0\big)\cdot\bar{\nabla}\phi\, d^3\bar{x}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int\Big\{\bar{\nabla}\big[\phi\,(\bar{D}-\bar{D}_0)\big] - \phi\,\bar{\nabla}\cdot(\bar{D}-\bar{D}_0)\Big\}d^3\bar{x}$$

Como $\bar{\nabla}\cdot(\bar{D}-\bar{D}_0) = 0$ (No cambia la densidad de cargas libres al introducir el dieléctrico) $\Rightarrow$ la integral se anula $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{8\pi}\int\big(\bar{E}\cdot\bar{D}_0 - \bar{D}\cdot\bar{E}_0\big)d^3\bar{x}$$

reemplazando entonces $\bar{D}_i = \varepsilon_i\bar{E}_i \Rightarrow$

$$\frac{1}{8\pi}\int\big(\bar{E}\cdot\bar{E}_0\,\varepsilon_0 - \bar{E}\cdot\bar{E}_0\,\varepsilon_1\big)$$

$$\boxed{\Delta U = -\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\,\bar{E}\cdot\bar{E}_0\, d^3\bar{x}}$$

Si suponemos que el dieléctrico esté rodeado por vacío $(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\rightarrow(\varepsilon-1)$

71

Y usamos la definición de $\overline{P}$

$$\overline{P} = \chi_e \overline{E}$$

$$\varepsilon = (1 + 4\pi\chi_e) \Rightarrow$$

$$\varepsilon - 1 = 4\pi\chi_e$$

$$(\varepsilon - 1)\overline{E}\cdot\overline{E}_0 = (4\pi\chi_e\overline{E})\cdot(\overline{E}_0) = 4\pi\overline{P}\cdot\overline{E}_0$$

Así $\boxed{\Delta U = -\frac{1}{2}\int \overline{P}\cdot\overline{E}_0\, d^3x}$

{expresa la energía asociada a la presencia del dieléctrico $(\overline{P})$ en el campo externo $(\overline{E}_0)$.}