Modelos Matemáticos en Física Clásica

Práctica 10: Ondas

1. Calcule la velocidad de propagación de ondas elásticas longitudinales y transversales en un bloque de aluminio, con las constantes elásticas dadas en la práctica anterior.

2. Calcule las longitudes de onda posibles de ondas estacionarias en una varilla de longitud L, con un extremo fijo (caracterizado por desplazamiento nulo) y otro libre (caracterizado por deformación nula).

   a) Para una varilla de aluminio de $15\,cm$ de longitud, calcule la frecuencia más baja (llamada fundamental) de oscilaciones transversales.

   b) Si se usa como diapasón, calcule la longitud necesaria para afinar un La 440 (frecuencia de 440 Hz).

3. Considere el problema de Sturm-Liouville resultante de separar variables en una ecuación de ondas con velocidad c en un intervalo $[-L/2, L/2]$, con condiciones de contorno periódicas (tanto en los desplazamientos como en sus derivada espaciales).

   a) Calcule el espectro y las autofunciones correspondientes, teniendo en cuenta la degeneración si la hubiera.

   b) Pruebe que las autofunciones son ortogonales, y normalícelas.

   c) Busque teoremas de completitud del conjunto hallado en el espacio apropiado de funciones periódicas, distinguiendo el tipo de convergencia de series de funciones involucrado (desarrollos en series de Fourier).

   d) Calcule los coeficientes del desarrollo de una solución que cumpla condiciones iniciales de posición $u(x, t = 0) = u_0(x)$ y velocidad $\partial_t u(x, t = 0) = v_0(x)$ con u_0, v_0 funciones periódicas con dos derivadas continuas.

4. Analice las características de una onda plana monocromática longitudinal descripta por la parte real de
$$\vec{u}(\vec{r}, t) = A\breve{n}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$
donde $\vec{k}$ es un vector de onda dado, $\breve{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ es el versor en la dirección del vector de onda, A es una amplitud compleja y $\omega = |\vec{k}|c$.

   a) Verifique que es solución de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$ con velocidad de propagación c, y que es una onda longitudinal ($\nabla \times \vec{u} = 0$).

   b) Verifique que es una onda viajera. ¿Cuál es la dirección de propagación?

   c) Grafique esquemáticamente, identifique los planos con idéntico desplazamiento ("frentes de onda"), calcule la longitud de onda, la frecuencia y el período de oscilación.

5. Analice las características de una onda plana monocromática transversal descripta por la parte real de
$$\vec{u}(\vec{r}, t) = (A\breve{t}_1 + B\breve{t}_2)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$
donde $\vec{k}$ es un vector de onda dado, $\breve{t}_1$, $\breve{t}_2$ son versores perpendiculares entre sí y perpendiculares al vector de onda, A, B son amplitudes complejas y $\omega = |\vec{k}|c$.

a) Verifique que es solución de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$ con velocidad de propagación c, y que es una onda transversal($\nabla \cdot \vec{u} = 0$).

b) Grafique esquemáticamente, identifique los planos con idéntico desplazamiento ("frentes de onda"). Note que el desplazamiento es una deformación de corte.

c) Discuta las posibles polarizaciones según los módulos y fases de las amplitudes A, B (sin perder generalidad, puede tomar $\vec{k}$ en la dirección del eje z, y$\breve{t}_1$, $\breve{t}_2$ en las direcciones de los ejes x, y. Además, tome el plano $z = 0$ y discuta sólo la dependencia del desplazamiento $\vec{u}$ con el tiempo. Finalmente, estará describiendo la curva paramétrica que describe el desplazamiento en el plano perpendicular al vector de onda).