Series de números complejos

Series de números complejos. Convergencia, convergencia absoluta. Criterios de comparación.

Series numéricas

Dada una sucesión $\{a_n\}$ en un espacio métrico M donde haya definida una suma, con $n \geq n_0$, se llama sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$ a una sucesión $\{S_k\}$ en M definida por

$$S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$$

La serie numérica simbolizada por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

se define como el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

que puede existir o no. Más precisamente, si $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ y es finito, se dice que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge en M y que su suma es S , y se anota

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k.$$

En el caso en que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$ se dice que la serie diverge. Nos referiremos formalmente a la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ antes de determinar si converge, pero usaremos el signo $=$ sólo cuando hayamos determinado que converge.

Ejemplo importante: series geométricas.

Dado un número q en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$ (llamado razón), consideramos la sucesión $\{a_n = q^n\}_{n \geq 0}$ y sus sumas parciales

$$S_k = \sum_{n=0}^k q^n$$

Es fácil calcular que

$$qS_k - S_k = q^{k+1} - 1$$

de donde se despeja, si $q \neq 1$,

$$S_k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

El límite de la sucesión de sumas parciales es finito si y solo si $|q| < 1$, en cuyo caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

En la mayoría de los casos no es posible hallar una expresión cerrada para la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, se puede determinar en muchos casos si la serie converge sin calcular su suma.

Criterios de convergencia

Condición necesaria de convergencia. Dada la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$, para que converja es necesario que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Demostración en clase. Basta ver que $\sim (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$ implica que la sucesión de sumas parciales no es fundamental, luego no puede ser convergente.

Criterio de comparación e series de términos no negativos. Dada una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ (serie de términos reales no negativos), si existe otra serie de términos reales no negativos $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, con $b_n \geq a_n$, convergente, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración en clase. Basta ver que la sucesión de sumas parciales de $\{S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n\}$ es monótonamente creciente y acotada por encima por la suma $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Luego tiene supremo en $\mathbb{R}$, que resulta ser el límite buscado.

O bien que la sucesión de sumas parciales de $\{S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n\}$ es fundamental, con $|S_k - S_l| = \sum_{n=l+1}^k a_n \leq \sum_{n=l+1}^k b_n < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ con solo tomar $k > l$ suficientemente grandes, ya que $\sum_{n=n_0}^k b_n$ es fundamental por ser convergente.

Convergencia absoluta. Dada una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ o $a_n \in \mathbb{C}$, se puede estudiar la serie de términos no negativos asociada $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Se dice que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Propiedad. La convergencia absoluta implica convergencia puntual. Es decir,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Demostración en clase. Basta ver que, dados $k \geq l$,

$$\left| \sum_{n=n_0}^k a_n - \sum_{n=n_0}^l a_n \right| = \left| \sum_{n=l+1}^k a_n \right| \leq \sum_{n=l+1}^k |a_n| < \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ con solo tomar k, l suficientemente grandes, ya que $\sum_{n=n_0}^k |a_n|$ es fundamental por ser convergente.

Debe notarse que la convergencia absoluta puede ser probada con técnicas de series de términos reales no negativos (como comparación), y asegura la convergencia (sin módulo).

Otros criterios. Se pueden trabajar otros criterios de convergencia, como el del cociente o el de la raíz. También se conocen criterios de convergencia condicional, que prueban el caso en que la serie de módulos no converge pero la serie sin módulos sí converge.