Práctica 6: dinámica de campos relativistas. Simetrías.

1. **a)** Escriba el lagrangiano invariante de Lorentz más general en 4 dimensiones para un campo escalar real $\phi(x)$, si además debe ser invariante ante transformaciones de escala $x^\mu \to \lambda\, x^\mu$ y $\phi \to \lambda^{-\Delta}\phi$ (Δ es la llamada *dimensión de escala* de ϕ). Encuentre la corriente conservada asociada a la invariancia de escala.

b) Generalice a $d+1$ dimensiones.

2. **a)** Demuestre que el lagrangiano invariante de Lorentz

$$L = \frac{1}{2} m\, U_\alpha U^\alpha + q\, U_\alpha A^\alpha$$

da las ecuaciones de movimiento relativista correctas para una partícula de masa m y carga q en interacción con un campo externo descripto por los potenciales $A^\alpha(x)$.

b) Defina los momentos canónicos y escriba el hamiltoniano en forma covariante.

3. **a)** Demuestre que los lagrangianos que difieren solamente en la derivada total respecto al tiempo de alguna función de las coordenadas y del tiempo son equivalentes, en el sentido de que conducen a las mismas ecuaciones de movimiento.

b) Muestre que la trasformación $A^\alpha \to A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$ de los potenciales en el lagrangiano de una partícula cargada de masa m, carga e y velocidad $\vec{v}$,

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + e\vec{v}.\vec{A} - e\Phi,$$

da lugar a otro lagrangiano equivalente.

4. El tensor de energía-momentos de un sistema de partículas puede definirse como

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_n p_n^\mu \frac{d}{dt} x_n^\nu(t)\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))\,,$$

donde $\vec{x}_n(t)$ es la trayectoria de la partícula n-ésima y $x_n^0(t) = t$.

a) Muestre que puede escribirse

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_n \frac{p_n^\mu\, p_n^\nu}{E_n}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))\,.$$

b) Reescríbalo de modo de poner en evidencia su carácter tensorial.

c) Obtenga la expresión de su tetradivergencia $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ y muestre que para la partícula libre es nula (T es una cantidad conservada).

5. Muestre que la carga eléctrica es independiente del tiempo y un invariante de Lorentz.

6. Considere campos electromagnéticos sin fuentes confinados en una región finita del espacio. Muestre que las integrales tridimensionales espaciales de las componentes T^{00} y T^{0i} del tensor simétrico de energía-momentos electromagnético transforman como las componentes de un tetravector independiente del tiempo.

7. Una densidad lagrangiana alternativa para el campo electromagnético es ($\epsilon_0 = 1/4\pi$):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}\partial_\alpha A_\beta\, \partial^\alpha A^\beta - J_\alpha A^\alpha \,.$$

a) Derive las ecuaciones de movimiento. ¿Son las ecuaciones de Maxwell? ¿Bajo qué hipótesis?

b) Demuestre que esta densidad lagrangiana difiere de esta otra:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha,$$

en una tetradivergencia. ¿Afecta esta tetradivergencia adicional a la acción o a las ecuaciones de movimiento?

8. Partiendo de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

use la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ para escribir una densidad lagrangiana invariante frente a las transformaciones de gauge locales

$$\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}\,, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}\,, \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)\,.$$

Obtenga las ecuaciones de movimiento correspondientes.

9. Considere la densidad lagrangiana de un campo vectorial masivo V_μ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu\,, \quad \text{con } F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu\,.$$

a) Obtenga las ecuaciones de movimiento y muestre que para $m \neq 0$ se cumple $\partial_\mu V^\mu = 0$.

b) Muestre que V_0 puede ser obtenido a partir de las otras componentes del campo.

c) Construya los momentos conjugados a V_μ y escriba la densidad hamiltoniana del sistema.

10. Considere una carga puntual q en reposo y en el origen. Suponiendo que el fotón tiene una masa no nula μ, encuentre la forma del potencial electrostático asociado a la carga.