

### Práctica 4: transformaciones de Lorentz de campos electromagnéticos

1. a) Muestre que la expresión del campo eléctrico de una carga puntual  $q$  en movimiento con velocidad  $v$  en la dirección del eje  $z$ , en el instante en que la carga coincide con el origen, es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1-v^2)}{r^2(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}} \vec{r}$$

donde  $\vec{r}$  es el vector del origen del sistema  $\mathcal{O}$  (donde la partícula está en movimiento) al punto de observación y  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{r}$  y el eje  $z$ , medido también en  $\mathcal{O}$ .

- b) Dé la expresión del campo eléctrico en función del tiempo. Estudie el límite  $v = 1$ .  
 c) Encuentre la expresión del campo magnético generado por la misma carga.  
 d) Verifique explícitamente que se satisface la ley de Gauss.
2. Encuentre las fórmulas de transformación de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  ante un boost general con velocidad  $\vec{v}$ .
3. a) Muestre que  $B^2 - E^2$  es un invariante de Lorentz. ¿Cuál es su expresión en notación tensorial?  
 b) Verifique que la forma covariante del conjunto de ecuaciones de Maxwell homogéneas es equivalente a

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \partial^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0.$$

4. En un sistema  $\mathcal{O}$  hay campos  $\vec{E}, \vec{B}$  ortogonales entre sí.  
 a) Muestre son ortogonales en cualquier otro sistema.  
 b) Si son uniformes y estáticos, determine si existe un  $\mathcal{O}'$  en movimiento relativo uniforme respecto a  $\mathcal{O}$  en el cual alguno de los dos se anule.
5. Un dipolo magnético clásico puntual  $\vec{m}$ , en reposo en el origen de un sistema  $\mathcal{O}$ , da lugar a un potencial vector

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

y a ningún potencial escalar.

- a) Muestre que si el dipolo se mueve con velocidad  $\vec{v}$ ,  $v \ll 1$ , se observa un momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  asociado con el momento magnético dado por
- $$\vec{p} = \vec{v} \times \vec{m}$$
- b) Muestre que la energía de interacción entre el dipolo móvil y unos campos externos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  es la misma que la que se hubiera obtenido mediante el cálculo del campo magnético  $\vec{B}'$  en el sistema de referencia  $\mathcal{O}'$  del momento magnético.
6. Una barra infinitamente larga y de radio  $R$  está cargada uniformemente en volumen con una densidad de carga  $\rho$ . Calcule de dos maneras distintas los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve a velocidad  $v$  paralelamente a la barra:

- a) A partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema,

- b) Por transformación directa de los campos.
7. Por un alambre infinitamente largo y de radio  $R$  circula una corriente  $I$  uniformemente distribuida en la sección transversal del alambre. Calcule de dos maneras distintas los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve a velocidad  $v$  paralelamente al alambre:
- A partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema,
  - Por transformación directa de los campos.
8. En su sistema en reposo, un lazo rectangular conductor con lados de longitud  $a$  y  $b$ , descargado, transporta una corriente  $I$ . Cuando se lo observa desde un sistema que se mueve a velocidad  $v$  en una dirección paralela al lado de longitud  $a$ ,
- ¿Cuál es la distribución de cargas en el lazo?
  - ¿Cuál es su momento dipolar eléctrico en este sistema expresado en términos del momento dipolar magnético en el sistema en reposo?
9. En un cierto sistema de referencia un campo eléctrico estático uniforme  $E_0$  es paralelo al eje  $x$  y una inducción magnética estática uniforme  $B_0 = \alpha E_0$  ( $\alpha > 1$ ) se encuentra en el plano  $(x, y)$  formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Determine la velocidad relativa de un sistema de referencia en el cual los campos eléctricos y magnéticos son paralelos. ¿Cuáles son los campos en ese sistema para  $\theta \ll 1$ ?
10. Dos alambres infinitos paralelos tienen una carga por unidad de longitud  $\lambda$  y están separados una distancia  $d$ . Muestre que la fuerza por unidad de longitud con que se atraen para un observador que se mueve paralelo a las barras con velocidad  $v$  es la misma que para un observador fijo a los alambres.