Práctica 2: Transformaciones de Lorentz. Geometría del espacio-tiempo. Tensores.

1. **a)** Muestre que x_μ son las componentes de un vector covariante.

b) Muestre que $\partial^\mu \phi$ son las componentes de un vector contravariante.

c) Discuta por qué no se hace distinción entre vectores covariantes y contravariantes en espacio euclídeo.

2. Dado un par de eventos separados por un intervalo tipo tiempo, muestre que existe un sistema de referencia en el que ocurren en el mismo lugar del espacio, y que no existe un sistema de referencia en el que ocurran en el mismo instante. ¿Qué sucede con dos eventos separados por un intervalo tipo espacio?

3. Muestre que

a) la suma de dos vectores tipo espacio y ortogonales es un vector tipo espacio, y que que la suma no es necesariamente tipo espacio si los vectores no son ortogonales.

b) dos vectores tipo tiempo no pueden ser ortogonales.

c) un vector tipo tiempo y otro tipo luz no pueden ser ortogonales.

d) la suma de dos vectores que apunten al futuro y no sean tipo espacio apunta al futuro y no es tipo espacio.

e) el complemento ortogonal a un dado vector tipo luz está formado por vectores que o son proporcionales a él o son tipo espacio.

f) dos vectores tipo luz son ortogonales si y sólo si son colineales.

4. Sea U un vector unitario tipo tiempo, V un vector arbitrario y P un tensor de componentes $P^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + U^\alpha U_\beta$,

a) Muestre que el vector de componentes $P^\alpha{}_\beta V^\beta$ es ortogonal a U.

b) Muestre que $P^\alpha{}_\mu P^\mu{}_\beta = P^\alpha{}_\beta$.

c) Dé una interpretación del tensor P.

5. **a)** Escriba la matriz Λ para el boost general definido por el vector tridimensional $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

b) Verifique que Λ es un elemento del subgrupo de Lorentz propio ortócrono

c) Recupere la forma de los boosts paralelos a los ejes.

d) Muestre que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección conmutan y que son equivalentes a una única transformación de Lorentz con velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

e) Muestre que dos transformaciones de Lorentz sucesivas con v_1 en la dirección $\check{x}$ y v_2 en la dirección $\check{y}$ no conmutan. Muestre además que en cualquier orden ellas se apliquen, no son equivalentes a una única transformación de Lorentz con velocidad $\vec{V} = v_1\, \check{x} + v_2\, \check{y}$.

6. Dadas las componentes $M^{\alpha\beta}$ de un tensor como una matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

- **a)** Calcule las componentes del tensor simétrico, $M^{(\alpha\beta)}$, y del antisimétrico, $M^{[\alpha\beta]}$.
- **b)** Encuentre las componentes $M^{\alpha}{}_{\beta}$, $M_{\alpha}{}^{\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$.

7. Si A es un tensor con componentes $A^{\alpha\beta}$ y B es un tensor con componentes $B_{\alpha\beta}$, muestre que $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$ es un escalar de Lorentz.

8. Sea A un tensor antisimétrico con componentes $A^{\alpha\beta}$, S un tensor simétrico con componentes $S_{\alpha\beta}$, B un tensor arbitrario con componentes $B_{\alpha\beta}$ y C un tensor arbitrario con componentes $C^{\alpha\beta}$. Muestre que:

- **a)** $A^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = 0$
- **b)** $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}B_{[\alpha\beta]}$
- **c)** $S_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}C^{(\alpha\beta)}$

9. Muestre que las componentes del tensor de Levi-Civita son invariantes ante transformaciones de Lorentz propias.

10. Analice el efecto de una rotación de ángulo 2π sobre un vector y sobre un espinor.