

Práctica 1: Transformación de eventos en el espacio-tiempo

1.
 - a) Si usa la convención de unidades $c = 1$, seleccione las unidades fundamentales de la mecánica y determine las dimensiones de las siguientes magnitudes: longitud, tiempo, intervalo, masa, velocidad, impulso, aceleración, fuerza y energía.
 - b) Si usa unidades naturales $\hbar = c = 1$, repita el análisis anterior.
 - c) Si usando $c = 1$ encuentra una longitud $l = 5$ s, convierta l a metros. Convierta también la energía $E = 10^{-20}$ g a eV.
2. Una regla de longitud L está en reposo en un sistema en el cual está orientada a un ángulo θ con respecto al eje x . ¿Cuáles son la longitud L' y orientación θ' medidas por un observador moviéndose a velocidad \vec{v} paralela al eje x con respecto al primer sistema?
3.
 - a) Considere un cohete que se mueve con velocidad \vec{v} con respecto a un dado sistema, que llamaremos el laboratorio. El cohete emite un pulso de luz a ángulos polar θ' y azimutal ϕ' con respecto a la dirección de \vec{v} . ¿Cuál es la dirección angular del pulso en el sistema del laboratorio?
 - b) Considere una partícula en reposo en el sistema del cohete, que emite luz uniformemente en todas las direcciones. Muestre que la luz que en el sistema del cohete se emite hacia el hemisferio delantero será vista desde el laboratorio concentrada en un cono hacia adelante con eje en la dirección de movimiento.
4. A las doce del mediodía una nave espacial pasa frente a la Tierra a una velocidad de $0.8c$. Los tripulantes de la nave sincronizan sus relojes con los terrestres disponiéndolos en la hora 12:00.
 - a) A las 12:30 según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra en reposo relativo a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?
 - b) ¿Cuál es la distancia propia entre la Tierra y la estación?
 - c) A las 12:30 hora de la nave se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuál es la hora de la Tierra cuando se recibe la señal?
 - d) Si desde la Tierra se contesta inmediatamente, ¿a qué hora de la nave se recibirá la respuesta?
5. En el día de Año Nuevo de 2021, un astronauta (A) parte de la Tierra con una velocidad de $0.8c$ y viaja hacia la estrella más cercana $-\alpha$ Centauro A-, que se encuentra a una distancia de 4 años luz, medida en el sistema de referencia de la Tierra. Una vez que ha llegado a la estrella regresa inmediatamente a la Tierra a la misma velocidad, llegando al punto de partida el día de Año Nuevo de 2031, tiempo terrestre. El astronauta tiene un hermano gemelo (B) que permanece en la Tierra, y ambos acuerdan mandarse saludos mediante señales de radio cada día de Año Nuevo hasta que el viajero regrese a casa.
 - a) Comprobar que A manda sólo 6 mensajes (incluyendo el que manda el último día de su viaje), mientras que B manda 10. ¿Qué significa esto en términos de las edades de los hermanos cuando se reencuentran?

- b) Dibujar el diagrama espacio-temporal del viaje de A trazado en el sistema de referencia de la Tierra (señalar las escalas tanto de x como de ct en años luz). Trazar también las líneas de mundo de todas las señales de radio que transmite B . Verificar con el auxilio del diagrama que A ha recibido sólo una señal hasta el momento de su vuelta y que recibe las otras nueve durante el viaje de retorno.
- c) Trazar otro diagrama espacio-temporal, también en el sistema de referencia de la Tierra, mostrando las líneas de mundo del astronauta y de todas las señales que él emite. Verificar que su hermano recibe un mensaje cada tres años de tiempo terrestre durante los nueve primeros años siguientes a la partida de su hermano y recibe a continuación tres mensajes más a lo largo del último año, haciendo un total de 6.
- d) ¿Qué edad tiene cada gemelo cuando se invierte la velocidad del cohete? Considere esta cuestión justo antes y justo después del comienzo del retorno.
6. Un tren debe atravesar un puente a velocidad relativista. Una persona ha colocado bombas en los extremos del puente, que hace estallar *simultáneamente* (observa la explosión desde afuera) cuando ve al tren ocupar *exactamente* la longitud del puente. Un pasajero del tren, advertido del atentado, verá al puente contraerse, por lo que se ubica en el primer vagón y espera pasar el puente a salvo. Describa con precisión la posición y tiempo de las explosiones vistas desde el tren, y diga si el pasajero pasa antes de que ocurra la explosión. Ilustre con un diagrama espacio-temporal.
7. Considere la siguiente afirmación:
La Relatividad tiene que estar mal. Si una barra de 20 m transportada en la dirección de su longitud por un corredor, tan rápido que la misma parece tener 10 m en el sistema de laboratorio, en algún instante entrará enteramente en una habitación de 10 m de longitud. Observe la situación desde el punto de vista del corredor: para él la habitación parece contraída a la mitad de su longitud. ¿Cómo puede una barra de 20 m caber en una habitación de 5 m?
 Explique como la Relatividad trata a la barra y a la habitación sin contradicción. Para aclarar la paradoja, haga un diagrama espacio-temporal en cada uno de los sistemas, indicando eventos relevantes y líneas de simultaneidad en cada caso.
8. Un sistema de coordenadas \mathcal{O}' se mueve a velocidad \vec{v} relativa a otro sistema \mathcal{O} . En \mathcal{O}' una partícula tiene velocidad \vec{u}' y aceleración \vec{a}' . Encuentre la ley de transformación de Lorentz para aceleraciones, y muestre que en el sistema \mathcal{O} las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a \vec{v} son

$$a_{\parallel} = \gamma^{-3} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^{-3} a'_{\parallel}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \gamma^{-2} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^{-3} \left(\vec{a}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times (\vec{a}' \times \vec{u}') \right)$$

9. Considere los rayos de luz emitidos por una estrella que alcanzan a la Tierra perpendicularmente a su velocidad \vec{v} (medida en un sistema fijo a la estrella). Usando el teorema de adición de velocidades, calcule el ángulo de incidencia de dichos rayos en un sistema fijo a la Tierra.
10. Considere un medio isótropo y homogéneo de índice de refracción n (sistema \mathcal{O}') moviéndose con velocidad $\vec{v} = \beta c \hat{x}$ con respecto a un observador en reposo en el sistema \mathcal{O} . ¿Cuál es la velocidad de la luz en dicho medio medida en \mathcal{O} ? Dé la expresión linealizada en β (válida para $\beta \ll 1$).