Trabajo práctico N° 8

Teoría de Landau y punto tricrítico - 16/11/2023

Problema 1. La ecuación de estado de la transición para-ferromagnética estudiada en la práctica anterior puede ser escrita en variables reducidas $\tau = T/\theta$, $B_r = B/B_{max}$ y $\eta = m/m_{sat}$ como:

$$\eta = tanh\left(\frac{B_r + \eta}{\tau}\right) \quad .$$

Considere esta ecuación muy cerca del punto crítico, es decir en el límite $T \to T_c$ y $m \to 0$.

a) Usando como variables adimensionales $t = \frac{T-T_c}{T_c}$ y B_r mostrar que el desarrollo resulta:

$$B_r = \eta t + \frac{\eta^3}{3} + O(\eta^3 t, \eta^5).$$

donde η será el parámetro de orden.

[Ayuda: se puede invertir la tangente hiperbólica y desarrollar luego en η.]

b) Probar que la ecuación de *equilibrio*, para el parámetro de orden del inciso anterior, puede obtenerse minimizando respecto de η una energía libre generalizada de *no equilibrio* de la forma:

$$g^*(B, t, \eta) = f_0(B, t) + \mathtt{A}_0 \left(-B_r\eta + \frac{t\eta^2}{2} + \frac{1}{12}\eta^4\right) \quad ,$$

siendo $f_0(B, t)$ una función analítica y $\mathtt{A}_0$ una constante con dimensiones que energía molar. Notar que en esta expresión η es una variable libre cuyo valor de equilibrio minimiza $g^*(B, t, \eta)$.

Funcional de Landau: Las energía libre generalizada del problema anterior es un ejemplo de funcionales de Landau que son válidas para problemas del tipo campo medio. Landau propuso que, una vez encontrado el parámetro de orden (η), esta funcional puede ser deducida suponiendo que es *analítica* y teniendo en cuenta las simetrías del problema. Luego, los valores del parámetro de orden en el equilibrio termodinámico η_{eq} se obtienre minimizando la funcional. De esta manera la energía libre de Gibbs $g(t, B)$ resulta a partir de la funcional $g^*(B, t, \eta)$ a partir de la relación $g(B, t) \equiv g^*\left(B, t, \eta_{eq}(B, t)\right)$.

Problema 2. Un sistema magnético, en las proximidades del punto crítico, se describe con la *energía libre* de Landau por mol dada por:

$$g^*(B, T, \eta) = f_0(B, T) + \alpha_0(T - T_c)\eta^2 + \frac{1}{2}\beta_0\eta^4 - B\eta \quad ,$$

en donde T_c es la temperatura de crítica, η magnetización, B campo magnético, $\alpha_0 > 0$ y $\beta_0 > 0$ constantes y f_0 una función analítica y termodinámicamente estable. Estudiaremos el caso $B = 0$.

a) Calcular y graficar la magnetización η_{eq} de equilibrio como función de la temperatura para $T > T_c$ y para $T < T_c$ ¿qué tipo de transición de fase ocurre en $T = T_c$?¿ Cuánto vale el expontente β del parámetro de orden?

b) Mostrar que la energía libre de Gibbs molar es:

$$g(T) = f_0(0,T) \qquad \texttt{para} \quad T > T_c \quad \texttt{y}$$

$$g(T) = f_0(0,T) - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0^2}{\beta}(T_c - T)^2 \quad \texttt{para} \quad T < T_c$$

c) Demostrar que la entropía es continua en $T = T_c$ pero sin embargo $c_h = T\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_h$ (el calor específico molar) es discontinuo ¿Cuál es el valor de los exponentes α y α'?

Problema 3. Punto tricrítico: Consideremos un sistema descripto por la siguiente energía libre de Landau:

$$g^*(B,t,\eta) = \frac{1}{2}a\eta^2 + \frac{1}{4}b\eta^4 + \frac{1}{6}c\eta^6 - B\eta$$

donde c es una constante positiva, a y b son funciones de P y T. Estudiaremos la situación en donde a y b son continuas y cambian de signo (se anulan) en un punto T_c , P_c[1] llamado tricrítico. Suponiendo que $a(P,T)$ y $b(P,T)$ son analíticas y resultan linealmente proporcionales a la presión P y a la temperatura T cerca del punto, tendremos $a(p,t) = a_1 t + a_2 p$ y también $b(p,t) = b_1 t + b_2 p$ con $t = (T - T_c)/T_c$ y $p = (P - P_c)/P_c$. Un ejemplo de tal sistema es una mezcla de He^3 y He^4. Determinaremos el diagrama de fases en el plano a-b para $B = 0$, usando la teoría de Landau estudiando cada cuadrante.

a) Caso $a < 0\ \forall b$.

Mostrar que los extremos de la energía libre de Landau son:

$$\eta_1 = 0 \quad ; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \quad ; \quad \eta_3 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}}$$

¿Cuántos estados termodinámicos de equilibrio hay? ¿Cuáles tiene menor energía libre? ¿ Cómo cambian los estados estables si se aplica un campo $B > 0$ y $B < 0$?

b) Caso $a \geqslant 0$ con $b > 0$.

Tomar una recta $b = cte > 0$. Partir desde $a < 0$ estudiado en el inciso anterior, variar continuamente a pasando por $a = 0$ y luego haciendo $a > 0$. Estudiar las tres soluciones η_1, η_2 y η_3 en el límite $a \to 0$ ¿Cuántos estados estables de equilibrio hay en función de a? ¿ Cuánto vale la derivada segunda de $g^*(m_{eq})$ en $a = 0$? ¿ Qué tipo de **transición** hay en esta línea $a = 0$? Dibujarla esquemáticamente en el plano $a - b$.

c) Caso $a > 0$ con $b < 0$

Tomar una recta $b = cte < 0$. Para a sufientemente grande $b^2 - 4ac < 0$ ¿Cuántos estados de equilibrio hay?

Disminuyendo continuamente a se tiene $b^2 - 4ac > 0$ pequeño, mostrar que aparecen dos extremos más dados por:

$$\eta_4 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \quad ; \quad \eta_5 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}}$$

[1] Notar que si b no se anula el término η^6 se puede despreciar resultando el caso estudiado en el problema 2.

que cumplen $|\eta_2| = |\eta_3| > |\eta_4| = |\eta_5|$. ¿Cuáles de ellos son estables? ¿Cuál tiene la mínima energía libre g^*? Si se sigue disminuyendo a ¿qué ocurre con η_1 para $a = 0$?

En una región intermedia los mínimos η_2, η_3 tienen la misma energía libre que el mínimo η_1. Mostrar que esto ocurre para el valor de $a = a_o$ que cumple:

$$b = -4\sqrt{\frac{a_o c}{3}}.$$

¿Cuáles son los estados estables para valores $a < a_o$ y cuáles para valores $a > a_o$.

d) ¿Qué tipo de **transición** hay en la línea $b = -4\sqrt{\frac{ac}{3}}$? Graficarla esquemáticamente en el plano $a-b$. Calcular el salto en el parámetro de orden y su exponente β aproximándose al punto tricrítico por la línea $p = 0$ con $t \to 0$.