

## Trabajo práctico N° 7

Mezclas Binarias y Tercer Principio - 3/11/2016

**Problema 1.** El óxido de Aluminio  $Al_2O_3$  funde a  $2300K$  y el calor de fusión es de  $26 Kcal/mol$ . Suponiendo que en la transformación sólido-líquido los cambios de energía interna, volumen y entropía son independientes de  $T$ : calcular la energía libre liberada si el líquido  $Al_2O_3$  es sobreenfriado hasta  $1800K$  y entonces solidifica.

**Problema 2.** La Figura 1 anexa muestra esquemáticamente las energías libres de Gibbs molares de una solución binaria  $A_xB_{1-x}$  para dos fases  $g_{gas}(x_A)$  y  $g_{liq}(x_A)$  a presión constante y para varias temperaturas en función de la fracción molar de  $A$  ( $x_A$ ).

- ¿Cuál es la condición para que una fase sea localmente estable? ¿se cumple este criterio? ¿Cuál es la condición para que una fase sea estable? ¿Cuál es la fase estable a temperaturas altas  $T > 180^\circ C$ ? ¿Y a temperaturas bajas  $T < 140^\circ C$ ?
- Para  $T < 140^\circ C$  y  $T > 180^\circ C$  las componentes gaseosas son 100% miscibles. Interprete desde el gráfico a qué propiedad física corresponden las temperaturas  $T_A = 140^\circ C$  y  $T_B = 180^\circ C$ .
- En la región en donde las curvas se cruzan ¿cómo se determina el estado estable del sistema? Es decir el estado que minimiza la energía libre de Gibbs.
- Grafique esquemáticamente el diagrama de fases ( $x_A, T$ ) que se obtiene al variar continuamente la temperatura  $T$  en función de  $x_A$ .

**Problema 3.**

El diagrama de fases de una solución de A y B, a  $P = 1atm$ , es similar al que se muestra en la figura 2. La curva superior puede ser representada por  $T(x_A) = T_0 - (T_0 - T_1)x_A^2$  y la inferior por  $T(x_A) = T_0 - (T_0 - T_1)x_A(2 - x_A)$

- Un recipiente que contiene la misma cantidad de moles de las dos componentes se calienta hasta su temperatura de ebullición ¿Cuál es la composición del vapor cuando la ebullición comienza? ¿La ebullición tiende a aumentar o disminuir la fracción molar de A en el líquido remanente?
- Mostrar que si se evapora una pequeña cantidad de líquido  $\frac{-dN}{N}$  ( $N$  moles de líquido y  $dN < 0$  moles evaporados), el cambio en la fracción molar del líquido viene dada por:

$$dx_A = \left( \sqrt{(2x_A - x_A^2)} - x_A \right) \frac{dN}{N}$$

**Problema 4.** Demostrar el teorema de Duhem, el cual establece que si el número de moles de todos los componentes de un sistema cerrado es especificado, entonces el estado de equilibrio está completamente determinado por dos variables independientes, independientemente del número de fases y componentes.

**Problema 5.** En la figura 2 se muestra el diagrama temperatura-fracción molar para el sistema binario Ge-Si.

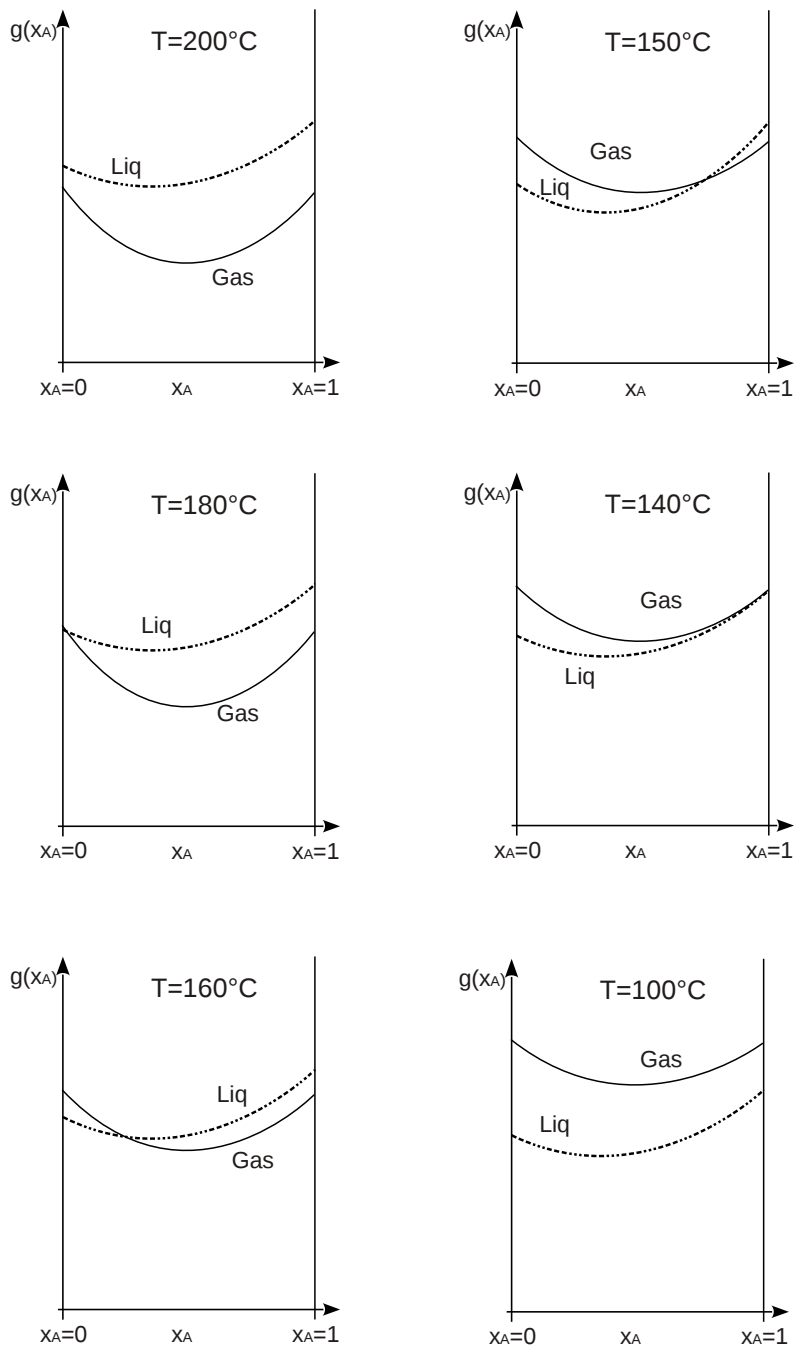


Figura 1: Energías libres de una mezcla binaria (ejercicio 2).

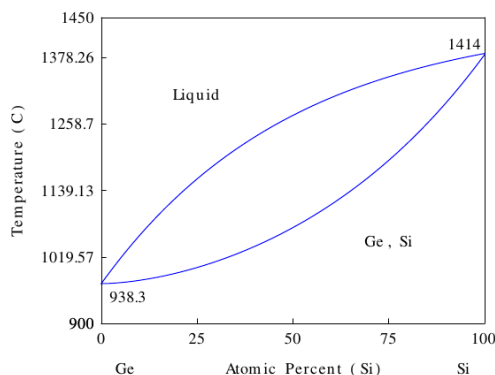


Figura 2: Diagrama de fases de una solución (ejercicios 3 y 5).

- Pruebe que para una concentración global  $x$  en la que el líquido ( $L$ ) y la fase sólida ( $\alpha$ ) coexisten, sus fracciones respectivas  $f_L$  y  $f_\alpha$  en equilibrio a la temperatura  $T$  ( $1200^\circ\text{C}$ ) están dadas por la “regla de la palanca”:  $f_\alpha = \frac{x - x_L}{x_\alpha - x_L}$  y  $f_L = \frac{x_\alpha - x}{x_\alpha - x_L}$
- Del diagrama de fases estime gráficamente a qué temperatura la solución sólida de composición 60 % en peso de Si- 40 % en peso de Ge estará en equilibrio con la fase líquida. Determine la composición de dicha fase líquida (masas atómicas  $m_{Si} = 28,085 \text{ gr/mol}$  y  $m_{Ge} = 72,64 \text{ gr/mol}$ )
- 1 kg de aleación con 15 % en peso de Si es mantenida a  $1100^\circ\text{C}$ , calcule el peso de Si en la fase líquida

**Problema 6.** En el caso de la coexistencia de fases sólidas y líquidas, los sistemas binarios se representan típicamente mediante un diagrama como el que muestra la figura 3 para el sistema Pb-Sn. A temperaturas altas, el sistema se halla en estado líquido, pero cuando se reduce la temperatura, puede cristalizar en dos fases sólidas que aquí se han señalado como  $\alpha$  y  $\beta$ . En este caso la fase  $\alpha$  es rica en Pb y tiene su estructura cristalina, mientras que  $\beta$  tiene la estructura cristalina de Sn y es rica en esa componente.

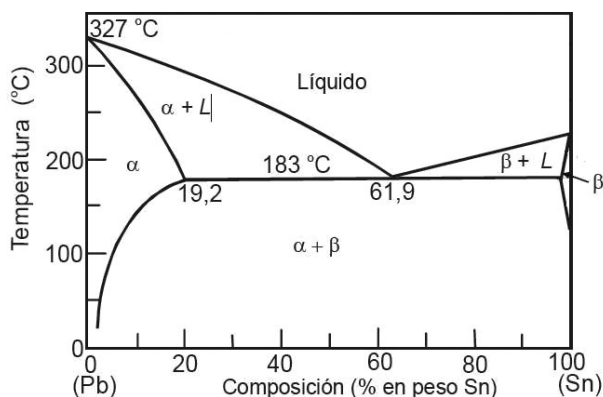


Figura 3: Diagrama de fase de la mezcla binaria plomo-estaño (Ejercicio 6).

- a) A partir de este diagrama dibuje esquemáticamente las curvas de energías libres  $g_{liq}(x)$ ,  $g_{\alpha}(x)$  y  $g_{\beta}(x)$  para cada fase para cada una de las cuatro regiones de temperatura: i)  $327^{\circ}\text{C} < T$ ; ii)  $232^{\circ}\text{C} < T < 327^{\circ}\text{C}$ ; iii)  $183^{\circ}\text{C} < T < 232^{\circ}\text{C}$ ; y iv)  $T < 183^{\circ}\text{C}$ .
- b) Use la regla de las fases para predecir el número de grados de libertad para una aleación de Pb con 35 % atómico de Sn a  $250^{\circ}\text{C}$ .
- c) Interprete los grados de libertad para una aleación a la temperatura eutéctica ( $183^{\circ}\text{C}$ ).

**Problema 7.** Mostrar que la entropía de un gas de van der Waals monoatómico<sup>1</sup> puede ser escrita como:

$$S(T, V, N) = \frac{3}{2}NR \left\{ \ln \left[ \left( \frac{3}{2}RT \right) (v - b)^{\frac{2}{3}} \right] + \text{cte} \right\}.$$

Mostrar que en el límite de  $T \rightarrow 0$  esta función viola el postulado de Nernst ( $S \rightarrow S_0 = \text{cte}$  cuando  $T \rightarrow 0$ ) ¿Qué ocurre con los gases ideales?

**Problema 8.** Se encierran  $N$  partículas no interactuantes dentro de una caja aislada de volumen  $V$ . Suponiendo que la energía es constante, podemos ignorar la cantidad de microestados asociados con las velocidades de las partículas y contar sólo los asociados al espacio.

- a) Mostrar que, si se divide el espacio en celdas iguales de volumen  $\pi$ , el número total de microestados asociados a un macroestado está dado por:  $\Omega(V, N) = \frac{V^N}{\pi^N}$ ,
- b) Si la caja está dividida por un pistón fijo en dos volúmenes  $V_1$  y  $V_2$  que contienen  $N_1$  y  $N_2$  partículas mostrar que  $\Omega = \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{\pi^N}$ ,
- c) Se define a la entropía por la ecuación de Boltzmann

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N).$$

Mostrar que la entropía así definida resulta extensiva para el caso calculado en b). Calcular el estado de equilibrio para el sistema planteado en el punto b) si el pistón se libera.

- d) Mostrar que la anterior definición conduce a una cte indeterminada en la entropía asociada al volumen arbitrario  $\pi$  ¿Qué ocurre si  $\pi \rightarrow 0$  ?

**Problema 9.** Considerar un sistema con  $N = \text{cte}$ . Supongamos que en el plano  $(T, V)$  partimos desde alta temperatura en un camino con  $V = \text{cte}$ .

- a) Suponiendo que para temperaturas muy bajas  $C_v(T)$  es analítica y se puede desarrollar en serie de Taylor como:

$$C_v(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \dots$$

Mostrar que para que la entropía se mantenga acotada cuando baja la temperatura ( $S \rightarrow S_0 = \text{cte}$  cuando  $T \rightarrow 0$ ) es necesario que  $a_0 = 0$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Partir del ejercicio 6c) de la práctica 3.

<sup>2</sup>Notar que a bajas temperaturas, en concordancia con esto, para metales  $C_v(T) = a_1 T$ , mientras que para un cristal y para un gas de fotones  $C_v(T) = a_3 T^3$ .

b) Suponiendo que la entropía se mantiene constante para  $T = 0$  probar que para esa temperatura

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = 0.$$

c) Suponiendo que  $\alpha \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$  y usando las relaciones entre funciones respuesta, mostrar que  $(c_p - c_v) \rightarrow 0$ .