

# **Núcleos y Partículas Elementales**

**Maestría en Física Contemporánea  
Departamento de Física - Universidad Nacional  
de La Plata**

Eve Mariel Santangelo

23 de agosto de 2013



# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
I.1.	Breve repaso de la teoría de la relatividad especial . . . . .	9
I.2.	Unidades y órdenes de magnitud . . . . .	11
I.3.	Cómo se producen partículas? . . . . .	14
I.3.1.	Rayos cósmicos . . . . .	14
I.3.2.	Reactores nucleares . . . . .	15
I.3.3.	Aceleradores de partículas . . . . .	15
I.4.	Cómo se detectan partículas? . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Evolución histórica</b>	<b>21</b>
II.1.	Partículas “elementales” hasta 1932 . . . . .	23
II.2.	Más partículas “elementales” (desde 1932 hasta 1960) . . . . .	27
II.2.1.	El mesón pi y el muón . . . . .	27
II.2.2.	Antipartículas . . . . .	29
II.2.3.	Los neutrinos . . . . .	31
II.2.4.	Partículas “extrañas” . . . . .	33
II.3.	La “óctuple senda” (eightfold way) y el modelo de quarks . . . . .	35
II.4.	Evolución de las teorías de las interacciones fundamentales . . . . .	39
<b>III</b>	<b>Simetrías en Física Subatómica</b>	<b>43</b>
III.1.	Simetrías, grupos y leyes de conservación . . . . .	45
III.2.	Rupturas de simetría . . . . .	49
III.3.	Momento angular orbital y espín en Mecánica Cuántica no relativista . . . . .	50
<b>IV</b>	<b>Física nuclear</b>	<b>57</b>
IV.1.	Fenomenología de los núcleos . . . . .	59
IV.2.	Modelos para la estructura nuclear . . . . .	61
IV.2.1.	Independencia de carga e isospín nuclear . . . . .	62
IV.2.2.	Modelos efectivos . . . . .	64
IV.3.	Reacciones nucleares. Aplicaciones de la Física Nuclear . . . . .	70
IV.3.1.	Desintegraciones nucleares . . . . .	70

IV.3.2. Fisión nuclear . . . . .	74
IV.3.3. Fusión nuclear . . . . .	80

**V Teoría de las Interacciones Fundamentales. El Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales 83**

V.1. Intentos de construir una Mecánica Cuántica Relativista. Problemas de interpretación . . . . .	86
V.1.1. Partícula sin espín. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	86
V.1.2. La ecuación de Dirac . . . . .	89
V.2. Teoría Cuántica de Campos . . . . .	93
V.2.1. Construcción de acciones clásicas. Ecuaciones clásicas de movimiento y cargas conservadas. Cuantización . . . . .	93
V.2.2. Teorías de campos libres . . . . .	95
V.2.3. Teorías de campos interactuantes . . . . .	102
V.2.4. Virtudes y defectos del modelo estándar de las interacciones fundamentales . . . . .	117

**VI Agradecimientos 119**

**VII Apéndice 1: Breve repaso de espacios vectoriales, cambios de coordenadas y tensores. 123**

VII.1.Espacio vectorial . . . . .	125
VII.2.Bases y cambios de base . . . . .	126
VII.3.Producto escalar y tensor métrico. Relación entre tensores covariantes y contravariantes. . . . .	128
VII.4.El espacio de Minkowski $M^4$ . . . . .	129

**VIII Apéndice 2: Grupo de Lorentz-Poincaré 131**

# **Parte I**

## **Introducción**



---

La Introducción está basada, principalmente, en el contenido de las referencias [1, 2, 3].

Las dos preguntas fundamentales que la física subatómica intenta responder son:

- De qué está hecha la materia al nivel más fundamental? Cuáles son las partículas elementales? Dicho de otro modo: cuáles son las partículas que, bajo la suposición de no tener estructura interna, permiten dar una descripción simple, y tan unificada como sea posible, de la naturaleza.

Es un hecho, y es muy notable, que toda la materia aparece concentrada en muy pequeños fragmentos constituyentes, con grandes espacios entre ellos. Todavía más notable es que podamos identificar unos pocos tipos diferentes de esos fragmentos, que se replican cantidades astronómicas de veces para conformarnos a nosotros y a toda la materia que nos rodea. Aún más: esas réplicas son réplicas exactas, no sólo similares, como ocurre con objetos macroscópicos. Por ejemplo, todos los electrones son indistinguibles entre sí. Y lo mismo ocurre con el resto de las partículas elementales.

Una vez que hayamos respondido esa primera pregunta, deberemos dar respuesta a la siguiente:

- Cómo interactúan esas partículas y cómo, a partir de esas interacciones fundamentales, resultan las interacciones entre las partículas compuestas?

Es bien sabido que, a principio del siglo pasado, se desarrollaron dos ideas revolucionarias en la descripción teórica de los fenómenos físicos: la Mecánica Cuántica (C) y la Teoría de la Relatividad (R). La primera se aplica a sistemas de tamaño atómico ( $\sim 10^{-15}$  m) o menor. La segunda, a sistemas que se mueven a velocidades comparables con la velocidad de la luz ( $\sim 3 \times 10^8$  m/s). Así, podemos dividir la Física actual en cuatro grandes secciones: NCNR, NCR, CNR y CR. De estas cuatro grandes secciones de la Física, la primera (NCNR) es la que describe los procesos que percibimos diariamente (sistemas de tamaño mucho mayor que el atómico, que se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz. A esta suele llamársela Física Clásica porque, al estar ligada directamente con la escala accesible a la percepción sensorial, fue la primera que se desarrolló. Pero, actualmente, todas las secciones han sido suficientemente testeadas como para considerarlas bien establecidas y deberían ser consideradas igualmente “clásicas”.

Los sistemas físicos que estudiaremos en estas clases, por ser de tamaño atómico o subatómico, requerirán un tratamiento cuántico. Como veremos, la estructura nuclear puede explicarse con teorías efectivas (no fundamentales) no relativistas (CNR), mientras que una teoría fundamental de las partículas realmente elementales requiere el uso de teorías cuánticas relativistas (CR).

Hay ciertas cuestiones generales que valen independientemente de la forma particular de la interacción, porque surgen directamente del tipo de dominio de la física que se está considerando. Por ejemplo, de la relatividad, de la mecánica cuántica, o de la combinación de ambas. En el marco de la relatividad, igual que en la mecánica no relativista,

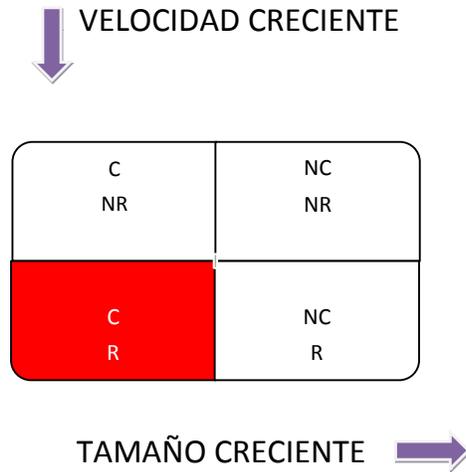


Figura 1: Dominios de la Física

la energía y la cantidad de movimiento son siempre conservadas en procesos de desintegración o dispersión. Pero, a diferencia de lo que ocurre en la mecánica no relativista, la masa en reposo no tiene por qué conservarse. Una desintegración del tipo

$$x \rightarrow y + z$$

puede perfectamente ocurrir, aun cuando la masa en reposo de la partícula  $x$  sea mayor que la suma de las masas en reposo de las partículas  $y$  y  $z$ . Además, la relatividad permite la existencia de partículas de masa en reposo nula, como el fotón, cuya existencia no tendría sentido en la teoría de Newton.

También la mecánica cuántica exige ampliar ciertos conceptos que provienen de la teoría clásica: un dado sistema cuántico se describe por su estado. Si estudiamos un proceso, tal como una transición de un estado a otro, todo lo que podemos calcular es la probabilidad de su ocurrencia. Por ejemplo: lo más común es que un pión cargado se desintegre en un muón más un neutrino, pero no todos lo hacen. Algunos prefieren desintegrarse en un electrón más un neutrino. La probabilidad de que ocurra esta segunda transición es menor que la probabilidad de que ocurra la primera, pero no es nula.

Finalmente, la unión de relatividad y mecánica cuántica da lugar a cosas únicas, como la existencia de antipartículas y la demostración del principio de exclusión de Pauli para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , entre otras cosas.

Las respuestas a las dos preguntas planteadas al comienzo de esta sección han ido variando con el tiempo, de modo particularmente vertiginoso durante el siglo pasado. El modo usual de reponder a esas preguntas consiste en estudiar la naturaleza mediante experimentos, generalmente basados en la colisión entre partículas. Los rápidos avances tecnológicos realizados durante el último siglo han permitido efectuar estos experimentos a energías siempre crecientes. Como veremos más adelante, a partir del principio de incerteza es posible comprender cualitativamente que energías cada vez mayores equivalen a

distancias cada vez más pequeñas y, por lo tanto, a una resolución cada vez más detallada de la estructura de la materia . Así, las partículas que parecían elementales en experimentos realizados a una dada energía resultan, cuando se los mira a energías mayores, estar compuestas de partículas más elementales.

En los últimos tiempos, se ha llegado a desarrollar una teoría que describe todas las interacciones entre partículas elementales, salvo la interacción gravitatoria. Esta teoría -reunión de la teoría de Glashow, Salam y Weinberg (GSW) para las interacciones electromagnéticas y débiles (unificadas bajo el nombre de interacciones electrodébiles) y de la Cromodinámica Cuántica (QCD) para las interacción fuerte, recibe el nombre de Modelo Estándar. Desde 1978, cuando se detectaron las partículas mediadoras predichas por GSW, el Modelo Estándar ha resistido todos los tests experimentales. Hay, ciertamente, algunos elementos demasiado “ad hoc” en el modelo y alguna de sus predicciones (la existencia de la partícula de Higgs) no ha sido aún verificada (aunque existen experimentos, como el que se realiza en el CERN, destinados a hacerlo). Pero proporciona una descripción de la realidad notablemente acertada.

## I.1. Breve repaso de la teoría de la relatividad especial

Cuando se estudia la mecánica de partículas no relativistas (mecánica de Newton), se aplica el principio de relatividad que podemos llamar de Galileo:

- Las medidas realizadas por dos observadores INERCIALES se relacionan entre sí por una transformación de Galileo.
- Las leyes de la mecánica son las mismas para todos los observadores inerciales.

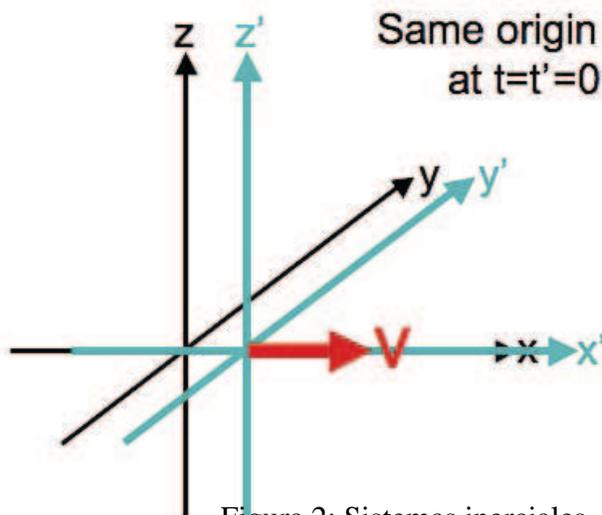


Figura 2: Sistemas inerciales

Para dos observadores inerciales  $O$  y  $O'$  cuyos respectivos sistemas de referencia se

muestran en la figura 2, las transformaciones de Galileo toman la forma:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

Obsérvese, en particular que ambos observadores inerciales miden el mismo tiempo. La noción de simultaneidad tiene, entonces, sentido cuando se comparan medidas realizadas por observadores inerciales que se mueven a bajas velocidades. Para partículas que se mueven a velocidades próximas a la de la luz ( $c$ ), en cambio, vale el principio de relatividad especial de Einstein:

- Las medidas realizadas por dos observadores INERCIALES se relacionan entre sí por una transformación de Lorentz.
- Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales.
- $c$  es una constante universal (todos los observadores miden el mismo valor de la velocidad de la luz en el vacío).

Las transformaciones de Lorentz (ver apéndice VIII), para el caso de la figura 2, están dadas por:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left( ct - \frac{v}{c} x \right) \\ x' &= \gamma \left( x - \frac{v}{c} ct \right) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ . Observar:

- 1) La velocidad de un observador debe ser siempre estrictamente menor que  $c$ .
- 2) En el límite no relativista ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ), o bien  $\gamma \rightarrow 1$ , las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo, como debe ser.

Las variables espaciales y temporales en un dado sistema inercial pueden considerarse como las cuatro componentes de un objeto  $X$ , llamado un tetravector contravariante (ver apéndice VII). Por ejemplo, en el sistema  $O$ :

$$X : (ct, x, y, z). \tag{3}$$

El mismo objeto, en el sistema  $O'$  estará caracterizado por las variables primadas:

$$X : (ct', x', y', z'). \tag{4}$$

con las variables primadas y sin primar relacionadas como lo establece la ecuación (82). Cualquier objeto cuyas componentes se transformen de este modo frente a una transformación de Lorentz como la que estamos estudiando será, también, un tetravector contravariante. A partir de las coordenadas de  $X$  en un dado sistema inercial puede formarse

otro objeto, llamado el intervalo espacio-temporal, que ya no es un tetravector contravariante, sino un escalar de Lorentz: todos los observadores inerciales miden el mismo valor para ese intervalo (ver ejercicio en Trabajo Práctico 1). El intervalo se define por:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

que puede pensarse como una “distancia” en el espacio-tiempo, llamado espacio de Minkowski (para más detalles, ver apéndice VII).

Obsérvese, de paso, que la contribución al intervalo de la parte espacial es menos una auténtica distancia, la distancia en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . De la misma forma puede definirse un invariante a partir de cualquier tetravector contravariante. Un tetravector que usaremos a menudo es el tetraimpulso o tetravector de energía-impulso:

$$P : \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right),$$

donde  $E$  es la energía de una dada partícula y  $\vec{p}$  es su cantidad de movimiento. A partir de este tetravector puede, con la misma regla usada para construir el intervalo a partir de  $X$ , construirse un escalar de Lorentz, dado por:

$$\left( \frac{E}{c} \right)^2 - (p_x)^2 - (p_y)^2 - (p_z)^2 = m^2 c^2,$$

o bien

$$E^2 = (cp_x)^2 + (cp_y)^2 + (cp_z)^2 + m^2 c^4, \tag{5}$$

donde  $m$  se llama la masa en reposo de la partícula. Obsérvese que, en particular, en un sistema de referencia donde la cantidad de movimiento de la partícula sea el vector nulo ( $p_x = p_y = p_z = 0$ ), resulta una de las ecuaciones más famosas de la física:

$$E = mc^2$$

## I.2. Unidades y órdenes de magnitud

Una referencia muy interesante es [4]

De la figura 3 se ve claramente que las longitudes con las cuales trataremos al estudiar física nuclear y física de partículas elementales son extremadamente pequeñas comparadas con la escala humana ( $\sim 1m$ ). Por esa causa, las longitudes que caracterizan a estos sistemas se expresan, usualmente, en femtometros, también llamados, en este contexto, Fermi:  $1fm = 10^{-15}m$ . En cuanto a las energías, las mismas se expresan en múltiplos de electrón volt. Un electrón volt ( $eV$ ) es la energía que adquiere una

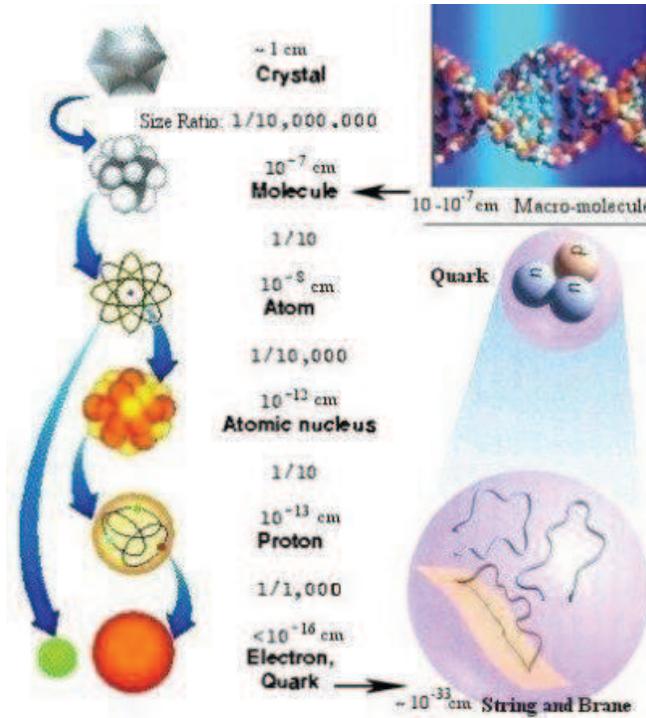


Figura 3: Escalas de longitud

partícula de carga ( $e$ ) igual al valor absoluto de la carga del electrón, cuando atraviesa una diferencia de potencial de  $1V$ . Por lo tanto, se tiene  $1eV = 1,62 \cdot 10^{-19} J$ . Esta unidad de energía es adoptada porque las partículas subatómicas son usualmente aceleradas usando campos electromagnéticos. En general, vamos a tratar con energías grandes, y haremos uso de múltiplos de esta unidad, que anotaremos con los prefijos usuales:  $1keV = 10^3 eV$ ,  $1MeV = 10^6 eV$ ,  $1GeV = 10^9 eV$ ,  $1TeV = 10^{12} eV$ . Los órdenes de magnitud de las energías que nos interesarán aparecen en la figura 4.

Usualmente, teniendo en cuenta la relación entre energía y masa en reposo,  $E = mc^2$ , las masas de las partículas se expresan en  $\frac{MeV}{c^2}$  o  $\frac{GeV}{c^2}$ .

Dado que trataremos con teorías relativistas, aparecerá a menudo en nuestros desarrollos la velocidad de la luz,  $3 \times 10^8 m/seg$ . Por tratarse de teorías cuánticas, donde el principio de incerteza desempeña un papel importante, otra constante que aparecerá a menudo es la constante de Planck. Es fácil recordar su valor como  $\hbar c = 200 MeV fm$ .

En física de partículas elementales, es muy común utilizar las llamadas unidades “naturales”. Para entender cómo se usan, recordemos que, si representamos por  $[L]$ ,  $[T]$  y  $[M]$  las unidades de longitud, tiempo y masa, las dimensiones de las distintas cantidades físicas pueden expresarse como combinaciones de ellas. Por ejemplo, si escribimos el módulo de la fuerza de Coulomb entre dos electrones como  $F = \frac{e^2}{d^2}$ , donde  $d$  es la distancia que los separa:

Energía (eV)	Comentarios
$1.2 \times 10^{28}$	Energía de Planck
$\sim 3 \times 10^{25}$	Escala de unificación fuerzas débiles, electromagnéticas y fuertes
	DESIERTO DE ENERGÍAS
$\sim 10^{12}$	Energía máxima accesible al <a href="#">LHC</a>
$\sim 2 \times 10^{11}$	Masa en reposo del quark top
$\sim 9 \times 10^{10}$	Masa en reposo de los bosones intermedarios ( $W^+$ , $W^-$ , $Z^0$ )
$\sim 1 \times 10^9$	Masa en reposo del protón y del neutrón
$\sim 5 \times 10^5$	Masa en reposo del electrón
$\sim 1.4 \times 10^1$	Energía de ligadura del electrón en el átomo de hidrógeno

Figura 4: Escalas de energía

$$[e]^2 = [F][L]^2 = \frac{[M][L][L]^2}{[T]^2} = \frac{[M][L]^3}{[T]^2}$$

y la constante de estructura fina, definida como  $\frac{e^2}{\hbar c}$ , resulta ser adimensional, ya que

$$[c] = \frac{[L]}{[T]} \quad [\hbar] = \frac{[M][L]^2}{[T]}.$$

Utilizar unidades “naturales” consiste en tomar  $\hbar = c = 1$  para realizar los cálculos y recuperar luego las unidades correctas multiplicando por las potencias necesarias de  $\hbar$  y de  $c$ . Está claro de lo anterior que, cuando se calcula en unidades naturales, se tiene que  $[L] = [T]$  y  $[M] = [L]^{-1}$ . Obsérvese que, en unidades naturales  $[E] = [M]$ . Por eso, las masas de las partículas suelen expresarse en MeV o GeV.

A menudo, cálculos simples, basados en consideraciones referentes a unidades características de un problema, permiten estimar el orden de magnitud de cantidades de interés. El siguiente (tomado de la referencia [4]) explica por qué, al estudiar partículas elementales, puede despreciarse la fuerza gravitatoria frente a la electromagnética.

El valor absoluto de la energía gravitatoria entre dos electrones puede escribirse

$$E_g = \frac{Gm_e^2}{r},$$

donde  $G = 6,673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} seg^{-2}$  es la constante gravitatoria y  $r$  es la distancia que separa a los dos electrones.

La energía coulombiana entre las mismas partículas está dada por

$$E_{em} = \frac{e^2}{r}.$$

En este último caso, puede definirse la constante adimensional  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{\hbar c}$ , llamada constante de estructura fina, cuyo valor es  $\alpha_{em} \sim \frac{1}{137}$ . Si, por analogía, definimos una constante adimensional para la interacción gravitatoria como  $\alpha_g = \frac{Gm_e^2}{\hbar c}$ , al reemplazar el valor numérico de la masa del electrón, que  $\alpha_g \sim 10^{-44}$ , más de cuarenta órdenes de magnitud menor que la constante de estructura fina. Cierto es que hemos elegido hacer el cálculo para el electrón, que es muy liviano. Pero nótese que, incluso para los mediadores de la interacción electrodébil, cuya masa es unas  $10^5$  veces mayor que la del electrón, la interacción gravitatoria sigue siendo despreciable frente a la electromagnética.

## I.3. Cómo se producen partículas?

Información complementaria muy útil para esta sección puede encontrarse en:

<http://www.auger.org/>

<http://www.cnea.gov.ar/xxi/reactores/RA1.asp>

<http://public.web.cern.ch/public/>

En particular, la página del CERN incluye un link destinado al público infantil y juvenil.

Los experimentos, tanto en Física Nuclear como en Física de Partículas Elementales, son esencialmente de dos tipos: choques entre partículas o desintegraciones. Pero, cómo se producen esas partículas que luego colisionarán o se desintegrarán? Producir electrones y protones es una cosa relativamente simple, visto que son constituyentes estables de la materia que nos rodea. Para producir electrones, basta calentar un trozo de metal. Si se quiere un haz de electrones, basta colocar una placa cargada con una ranura cerca del lugar donde se producen. Los electrones que pasen a través de la placa serán nuestro haz de electrones. Un haz así producido es el paso inicial en la construcción de un tubo de rayos catódicos, como el tubo de un televisor o un osciloscopio, y también es la primera pieza en un acelerador de electrones.

Para producir protones basta con ionizar hidrógeno (eliminar el electrón de cada átomo). Si se bombardea un tanque de hidrógeno con partículas muy energéticas, los electrones son tan livianos que las partículas incidentes los eliminan al pasar. Un tanque de hidrógeno es, en realidad, un tanque de protones.

Pero otras partículas menos usuales provienen, en general, de tres fuentes alternativas, que se describen a continuación.

### I.3.1. Rayos cósmicos

Aquí, la naturaleza hace el trabajo por nosotros. La atmósfera terrestre es permanentemente bombardeada por partículas de gran energía (principalmente protones) que

proviene del espacio exterior. La fuente precisa de estas partículas está aún en estudio. Pero, cuando golpean átomos en las capas más externas de la atmósfera, esas partículas producen lluvias de partículas secundarias (principalmente muones para cuando llegan a nivel de la tierra), que llueven sobre nosotros permanentemente. Como fuentes de partículas los rayos cósmicos tienen dos virtudes: son gratis y pueden alcanzar enormes energías, muy superiores a las que se alcanzan en laboratorio. Pero tienen dos desventajas: la cantidad de ellas que golpea, por unidad de tiempo, un detector de tamaño razonable es muy pequeña y son completamente incontrolables. Así, los experimentos con rayos cósmicos requieren mucha paciencia y buena suerte. Argentina participa en el experimento sobre rayos cósmicos llamado Observatorio Pierre Auger (ver dirección de la página al comienzo de esta Introducción), uno de cuyas dos áreas de detección se encuentra en Malargüe, Mendoza.

### I.3.2. Reactores nucleares

Cuando un núcleo radiactivo se desintegra, emite una variedad de partículas tales como neutrones, neutrinos, rayos  $\alpha$  (núcleos de He, que son estados ligados de dos protones y dos neutrones), rayos  $\beta$  (electrones o positrones) y rayos  $\gamma$  (fotones).

### I.3.3. Aceleradores de partículas

Comenzando con electrones o protones, se los acelera a grandes energías y se los hace incidir sobre un blanco. Mediante arreglos adecuados de imanes y absorbentes se puede seleccionar, entre las partículas salientes luego de la colisión, la especie que se quiere estudiar. Actualmente, es posible generar de este modo haces secundarios muy intensos de positrones, muones, piones, kaones, antiprotones y neutrinos que pueden, a su vez, hacerse incidir sobre otro blanco. Incluso, las partículas estables y sus antipartículas (electrones, positrones, protones y antiprotones) pueden almacenarse en anillos gigantes de almacenamiento, donde circulan a velocidades altísimas y continúan acelerándose, para extraerlas y usarlas en el momento requerido. De estos aceleradores, el más notorio en la actualidad es el LHC (Large Hadron Collider), en el CERN, Ginebra, Suiza. Estudiaremos los distintos tipos de aceleradores en breve.

En general, cuanto mayor sea la masa de la partícula que quiere producirse, mayor será la energía de la colisión requerida. Esta es la razón por la cual, históricamente, se detectaron primero las partículas más livianas.

En efecto, de nuestro breve repaso de la Relatividad especial, recordemos que

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + M^2 c^4 \geq M^2 c^4 .$$

Por lo tanto, para producir una partícula de masa  $M$ , se necesita una energía  $E \geq M c^2$ .

A medida que la tecnología fue avanzando, ha sido posible alcanzar energías siempre crecientes. Actualmente, la partícula más pesada que se ha detectado ha sido el quark top, con una masa de unas 173 veces la masa del protón ( $M_t c^2 = 173 GeV$ ). Hasta el presente,

no sabemos si existe algún límite superior para las masas posibles, aunque se sospecha que la llamada masa de Planck, a partir de la cual se requiere una descripción cuántica de la gravitación,

$$M_P = 2,43 \times 10^{18} \frac{GeV}{c^2},$$

podría ser el límite. Evidentemente, la forma última de saber si algún límite existe es verificarlo experimentalmente y requiere conseguir energías altísimas (las energías alcanzadas en el CERN son del orden de  $1 TeV$ , lo cual está muchos órdenes de magnitud por debajo).

Además de tratar de detectar partículas más masivas, hay otra razón por la cual se realizan experimentos a energías cada vez más altas: a mayor energía pueden verse más detalles, según predice la mecánica cuántica. En efecto, la longitud de onda de de Broglie de una partícula está dada por  $\lambda = \frac{h}{p}$ , donde  $p$  es el valor absoluto de su impulso espacial. La llamada longitud de onda de de Broglie reducida es  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{p}$ .

La forma más directa de acelerar partículas hasta energías altas consiste en usar un campo eléctrico, de modo que  $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ , o bien,  $E = Fd = qV$ , donde hemos considerado que el campo eléctrico  $\mathcal{E} = \frac{V}{d}$  se mantiene constante. El ejemplo más simple de un acelerador de electrones es el tubo de rayos catódicos de un televisor. Por supuesto, todo el sistema debe estar situado en el vacío. De lo contrario, las partículas perderían energía al chocar con las moléculas de aire. Además, alcanzar una diferencia de potencial del orden necesario para que la energía de la partícula alcance los  $MeV$  o, peor aún,  $GeV$  en una sola etapa es imposible, porque es sabido que ocurren rupturas a unos pocos  $keV$ . Por lo tanto, se requirió mucho ingenio para efectuar sucesivas aceleraciones y llegar a las energías deseadas.

La historia de los aceleradores de partículas, empieza con el de de Cockcroft-Walton (1932), así llamado en honor a quienes lo usaron para provocar la primera fisión nuclear (aunque ya había sido propuesto como multiplicador de voltaje por Greinacher, en 1919) y el de van de Graaff (1933). Con ellos se alcanzaban energías del orden de  $500 keV$  para protones y fueron los primeros usados en física nuclear.

La figura 5 muestra un esquema del circuito que caracteriza un multiplicador de voltaje de Cockcroft-Walton: Cuando el potencial AC original, alcanza un pico negativo, el primer diodo deja pasar corriente y se carga el primer capacitor. Cuando la señal cambia de signo, el primer diodo se cierra y se abre el segundo. Esta vez, la corriente fluye tanto desde la fuente AC como desde el primer capacitor, así que el segundo se carga al doble. Y así siguiendo, el voltaje se duplica en cada etapa.

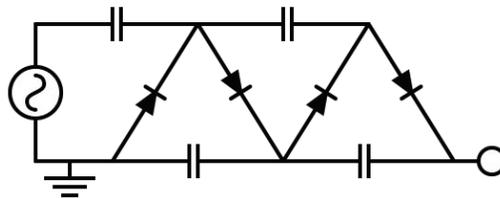


Figura 5: Esquema del acelerador de Cockcroft-Walton

En el acelerador de van de Graaff (para más información, ver <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campoelctrico/graaf/graaf.htm>), el potencial se multiplica transportando cargas hacia un capacitor (ver figura 6).

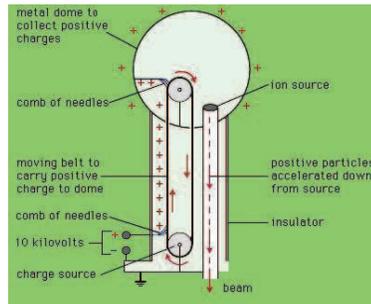


Figura 6: Esquema del acelerador de van de Graaff

A fin de obtener mayores voltajes se usan los llamados aceleradores en tándem, que son sucesivos van de Graaff y, por lo tanto, alcanzan energías algo superiores, aunque siempre del orden requerido en experimentos de física nuclear (Mev). Un ejemplo de estos aceleradores en tándem es el TANDAR, ubicado en el Centro Atómico Constituyentes de la CNEA (ver la dirección web sugerida al comienzo de I.3).

A estos aceleradores siguieron los llamados LINACS, o aceleradores lineales. En estos aceleradores, el haz de partículas se inyecta a lo largo del eje. Dentro de los cilindros, el campo eléctrico es siempre nulo. Entre cilindros, hay un campo alterno. Supongamos que una partícula llega a la región entre dos cilindros cuando el campo es máximo. Sufrirá, entonces una primera aceleración. La longitud del siguiente cilindro se elige de modo que la partícula acelerada llegue al final del próximo cilindro cuando el campo allí es otra vez máximo, de modo que sea acelerada nuevamente. Y el proceso continúa, con cilindros más largos a medida que la partícula se aproxima al blanco y va teniendo mayor velocidad. Un esquema de este tipo de aceleradores aparece en la figura 7.

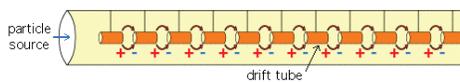


Figura 7: Esquema del LINAC

Obsérvese que, para una partícula con velocidad  $v$ , la longitud del cilindro debe ser tal que  $L = v\tau = \frac{v}{\nu}$ , donde  $\tau$  es el período y  $\nu$  es la frecuencia alterna. Para cuando la partícula alcanza velocidades relativistas, hacen falta frecuencias altísimas para tener aceleradores de una longitud aceptable. El acelerador lineal más largo existente (3km) es el de Stanford (SLAC) y es capaz de acelerar electrones hasta energías de unos 50 GeV. Alcanzar energías del orden del TeV requeriría un LINAC de unos 60 km de longitud

y requiere campos de muy alta frecuencia. El costo de un linac que alcanzase energías del orden del TeV serían, entonces, inmensos. Eso explica por qué, para ese fin, se han adoptado aceleradores circulares. La primera propuesta en este sentido fue el ciclotrón (de 1930).

Los aceleradores circulares usados actualmente son refinamientos de esa idea. Por ejemplo, en el sincrotrón, la partícula es obligada a mantener una trayectoria circular por un campo magnético y, en ciertas regiones lineales, es acelerada por un campo eléctrico en el rango de las radio frecuencias. Sucesivos pasos por estas regiones imprimen a las partículas sucesivas aceleraciones, hasta alcanzar velocidades relativistas. Sin embargo, los aceleradores circulares tienen una desventaja: las partículas aceleradas pierden más energía por radiación que en un acelerador lineal. Esa radiación, conocida como radiación de sincrotrón, es útil para ser usada en otras aplicaciones, tales como el estudio de propiedades de materiales de interés tecnológico, pero es indeseable en el proceso de aceleración. La potencia radiada por una partícula en órbita circular es:

$$P \sim \frac{2q^2c}{3R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4.$$

Obsérvese, en primer lugar, que la pérdida por radiación es mucho menor para protones (debido a su masa mucho mayor) que para electrones.

Por otra parte, la energía disponible en la colisión es mucho mayor si se produce una colisión entre partículas que viajan en sentidos opuestos que si una partícula acelerada choca contra otra en reposo en el laboratorio. Por ejemplo, en el LHC, se almacenan protones viajando en sentidos opuestos en un mismo anillo y se los hace colisionar en ciertos sectores a energías de centro de masa que, se espera, serán del orden de 1000 GeV (1 TeV).

La figura 8 muestra un plano del anillo acelerador del LHC, que tiene una longitud de 27 km, 175 m. por debajo de la frontera entre Suiza y Francia (Consultar la página web sugerida al comienzo de I.3).

Monografía I: Aceleradores de partículas. Ver [1] y las referencias allí sugeridas.

## I.4. Cómo se detectan partículas?

Hay muchos tipos de detectores de partículas: detectores Geiger, cámaras de niebla, cámaras de burbujas, cámaras de chispas, contadores Cerenkov, fotomultiplicadores y muchos otros. En general, se basan en que, al pasar partículas a través de un medio, lo ionizan y esos iones funcionan después como semillas que crean gotas (cámara de niebla), burbujas (cámara de burbujas), o chispas (cámara de chispas). Pero, si las partículas que pasan son neutras, no pueden producir ionización y no dejan rastro en estos detectores. El camino que siguieron se reconstruye estudiando los rastros dejados por el resto de las partículas (cargadas) y usando consideraciones basadas en la conservación de energía e impulso.

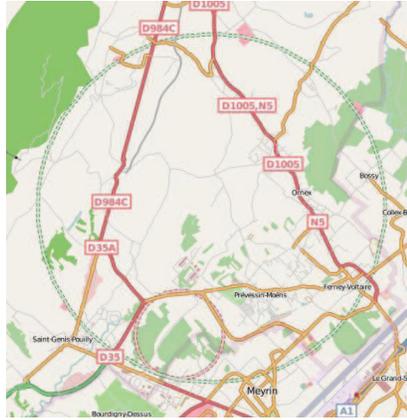


Figura 8: El LHC en el CERN

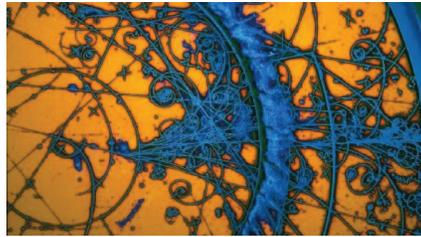


Figura 9: Foto de trayectorias en una cámara de burbujas

Como se ve en la figura 9, las trayectorias seguidas por las partículas son, en general, curvas. Eso se debe a que la cámara se ubica entre los polos de un imán gigantesco. En el campo magnético  $B$ , una partícula de carga  $q$  y velocidad  $v$  describe una órbita circular, donde el radio está dado por la famosa fórmula del ciclotrón.

Hagamos, por ahora, un cálculo no relativista. En general, las partículas que nos interesan se mueven en los detectores a velocidades relativistas. De todos modos, este cálculo nos dará una idea. Debido al campo magnético, la partícula sufre una fuerza  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dado que  $\vec{B}$  es perpendicular a la órbita y  $\vec{v}$  es tangente a la misma, la fuerza es radial. Usando la segunda ley de Newton, tal fuerza produce una aceleración, también centrípeta, dada por  $a_N = \frac{qvB}{m}$ , donde  $m$  es la masa de la partícula (en esta expresión y en las que siguen, hasta el fin de esta sección, todas las magnitudes aparecen en módulo). Recordando que  $a_N = \frac{v^2}{R_C}$ , se tiene para el radio de ciclotrón, cuando la partícula afectada por el campo magnético se mueve a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz,

$$R_C = \frac{mv}{|q|B}.$$

En cuanto a la velocidad angular, su módulo es  $\omega = \frac{v}{R_C} = \frac{qB}{m}$  y la frecuencia  $\frac{qB}{2\pi m}$  se conoce como la frecuencia de ciclotrón.

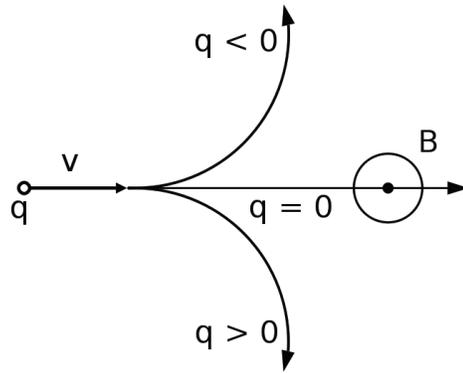


Figura 10: Fuerza de Lorentz

En el caso relativista, el radio de la trayectoria resulta corregido según

$$R_C = \frac{m \gamma v}{q B} = \frac{pc}{|q| B},$$

con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $c$  la velocidad de la luz y  $p$  la cantidad de movimiento relativista de la partícula. Si se mide el radio de la trayectoria y se conoce el campo magnético, se determina, entonces, la cantidad de movimiento de la partícula. La curvatura de la trayectoria permite, también, conocer el signo de su carga.

Monografía II: Detectores de partículas. Ver [1] y las referencias allí sugeridas.

# **Parte II**

## **Evolución histórica**



## II.1. Partículas “elementales” hasta 1932

Además de las referencias ya citadas, para esta sección es muy útil (aunque levemente desactualizado) [5].

La noción de elemento existió desde las épocas de Demócrito, en la Grecia antigua, cuando toda la materia se creía compuesta por cuatro elementos: aire, agua, fuego y tierra.

La definición de elemento dada muchos años después por Robert Boyle (1627-1691), el padre de la química, es, esencialmente, la misma que hemos dado nosotros para una partícula elemental. Boyle dijo que “los elementos son ciertos cuerpos primitivos y simples que no están formados por otros cuerpos, ni unos de otros, y que son los ingredientes de que se componen inmediatamente y en que se resuelven en último término todos los cuerpos perfectamente mixtos”.

A fines del siglo XIX, era sabido que toda la materia está compuesta por ciertos “elementos” (que hoy llamamos átomos). Sin embargo, el rápido aumento en la cantidad de átomos, con propiedades que se repiten periódicamente, era una indicación de que esos átomos debían tener, a su vez, una estructura interna en lugar de ser indivisibles. Así lo comprendió Dmitri Mendeleev (1834-1907), que los ordenó por orden creciente de masa atómica, en una primera versión de su famosa tabla, que se muestra en la figura 11. Al hacerlo, encontró que cada ocho elementos se repetían las propiedades químicas. Aunque, como puede verse en la misma figura, existían huecos en algunos sitios (observar los huecos entre el Ca y el Ti y entre el Zn y el As. Mendeleev postuló, en base a la regularidad encontrada, que los elementos correspondientes a esos huecos debían existir y, en efecto, se descubrieron algún tiempo después.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
R <sub>2</sub> O	RO	R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	RH <sub>4</sub> RO <sub>3</sub>	RH <sub>3</sub> R <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	RH <sub>2</sub> RO <sub>3</sub>	RH R <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	RO <sub>4</sub>
H							
Li	Be	B	C	N	O	F	
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	
K	Ca		Ti	V	Cr	Mn	Fe Co Ni
Cu	Zn			As	Se	Br	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo		Ru Rh Pd
Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W		Os Ir
Au	Hg	Tl	Pb	Bi			Pt

Figura 11: La tabla periódica de Mendeleev, en su forma original

Ahora sabemos que, efectivamente, esa regularidad se debe a las propiedades eléctricas del átomo, que quedan determinadas por la carga eléctrica de su núcleo (idéntica, en valor absoluto, a la carga de sus electrones). Un conocimiento del interior del átomo más acabado comenzó a obtenerse a inicios del siglo XX, con los experimentos de Joseph John (J.J.) Thomson (1856-1940) y de Ernest Rutherford (1871-1937).

Puede decirse que la búsqueda de partículas elementales comenzó en 1897, cuando J.J. Thomson identificó el electrón. Thomson sabía que los rayos catódicos emitidos por un filamento caliente podían ser deflectados por un campo magnético, lo cual indicaba que tenían carga. Más precisamente, el sentido de la curvatura requería que la carga fuese negativa. Haciendo pasar el haz por campos eléctrico y magnético cruzados, Thomson determinó la velocidad de las partículas (del orden de un décimo de la velocidad de la luz  $c$ ) y el cociente de su carga sobre su masa. Este cociente resultó ser enorme, indicando que, o bien la carga de las partículas era inmensa o su masa muy pequeña. Evidencia generada por otros experimentos mostró que el caso era el segundo ( $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ; medida en eV es  $m_e \sim 0,5 \text{ MeV}$ ). Thomson comprendió, correctamente, que los electrones eran constituyentes elementales de los átomos. Pero el electrón tiene carga negativa ( $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ), mientras los átomos son eléctricamente neutros. La pregunta era, entonces, dónde estaba la carga positiva equilibrante.

Thomson había sugerido un modelo del átomo en que los electrones eran como cerezas en una torta (el átomo), dentro de una masa de carga positiva. Pero Rutherford mostró con sus experimentos que los átomos están compuestos por un núcleo interno muy denso, rodeado por una nube de electrones.

En 1911, Rutherford hizo su mayor contribución a la ciencia, al descubrir el núcleo atómico. Había observado que, al bombardear una fina lámina de mica con partículas alfa (él mismo demostró, después que eran núcleos de He) con energías del orden de  $1 \text{ MeV}$ , se obtenía una deflexión brusca de dichas partículas, como si chocaran con objetos de dimensión aproximada  $10^{-15} \text{ m}$ . Al retomar Geiger y Marsden estos experimentos, de modo más detallado, utilizando ahora una lámina de oro, se dieron cuenta de que algunas partículas alfa se desviaban más de 90 grados. Rutherford lanzó entonces la hipótesis, que Geiger y Marsden confrontaron con los resultados de su experimento, de que en el centro del átomo debía haber un núcleo, que contuviera casi toda la masa y toda la carga positiva del átomo y que, de hecho, los electrones debían determinar el tamaño del átomo. Rutherford llamó protón al núcleo del átomo más liviano (hidrógeno), cuya masa es de  $\sim 930 \text{ MeV} \sim 10^3 m_e$  y propuso un modelo en que el electrón orbita alrededor del protón. Este modelo planetario había sido sugerido en 1904 por un físico japonés, Hantaro Nagaoka, aunque había pasado inadvertido. Se le objetaba que, en ese caso, los electrones tendrían que emitir radiación al girar alrededor del núcleo central (en forma similar a la radiación de sincrotrón) y, en consecuencia, al perder energía, el sistema no podía ser estable. Los resultados de Rutherford demostraron que el modelo planetario era, sin duda, el adecuado, puesto que permitía prever con exactitud la sección eficaz de difusión de las partículas alfa en función del ángulo, aunque contradijera las expectativas de la Electrodinámica clásica. Las últimas objeciones teóricas se desvanecieron con la aplicación de los principios de la teoría cuántica, y la adaptación que, en 1914, hizo Niels Bohr del modelo de Rutherford a la Mecánica Cuántica, lo que sirvió para justificar la estabilidad del átomo de Rutherford.

Pero, rápidamente, se comprendió que los restantes átomos no pueden estar compues-

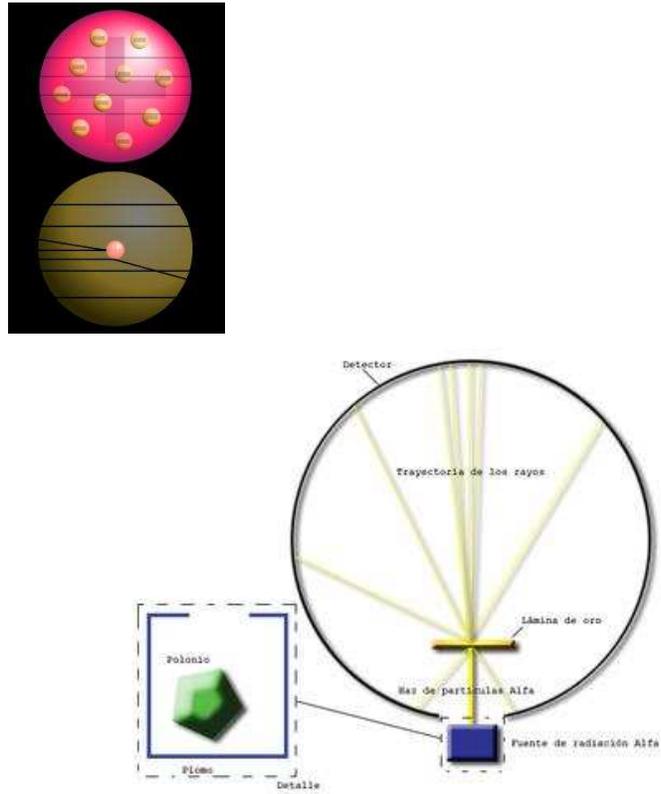


Figura 12: Experimento de Rutheford

tos de igual número de protones y electrones (condición necesaria para que sea eléctricamente neutro) y nada más. Por ejemplo, el átomo de helio ( ${}^4\text{He}$ ) requiere dos electrones, pero tiene una masa que es cuatro veces la del átomo de hidrógeno. De dónde provenía, entonces, la masa extra?

En 1932, con el descubrimiento del neutrón, realizado por James Chadwick (1891-1974), se resolvió ese problema: el neutrón tiene la misma masa que el protón, pero no tiene carga. Eso explica la estructura del  ${}^4\text{He}$ , si se admite que el núcleo contiene, además de los dos protones necesarios para ser neutro, dos neutrones que no alteran la carga, pero duplican su masa. No siempre el número de protones en un núcleo coincide con el número de neutrones en el mismo. En general, en los núcleos más pesados el número de neutrones es mucho mayor que el número de protones y puede variar, dando origen a los llamados isótopos: núcleos con la misma cantidad de protones (llamada el número atómico)  $Z$  y, por lo tanto, la misma carga  $+Ze$ , pero distinto número de neutrones  $N$  y, por lo tanto, distinta masa  $A = N + Z$  ( $A$  se conoce como el número de masa). Por ejemplo, el deuterio es un isótopo del hidrógeno: como este último, tiene  $Z = 1$ , pero su número de masa es  $A = 2$ .

A esta altura del siglo XX, hacia 1932, la respuesta a nuestra primera pregunta estaba tan clara como nunca lo había estado: toda la materia parecía estar compuesta por electrones, protones y neutrones que eran, junto con el fotón (del cual hablaremos en el párrafo siguiente), las únicas partículas requeridas para explicar las observaciones realizadas hasta entonces. De ellas, las partículas cargadas participaban de la interacción electromagnética. Aparte de esta interacción, sólo se conocía la interacción gravitatoria, de intensidad despreciable al tratar problemas a subatómica. Pero esta situación iba a durar poco. Antes de comentar sobre la necesidad de incorporación de otras partículas al modelo, detengámonos un poco en el fotón, del que no hemos dicho nada aún.

El fotón es, en cierto modo, distinto de las otras tres partículas de las que hemos hablado hasta ahora. En efecto, el fotón es considerado el mediador de las interacciones electromagnéticas. Su historia comienza con el estudio, por Max Planck (1858-1947), de la radiación del cuerpo negro, en 1900. Planck trataba de explicar la radiación emitida por un cuerpo caliente, que se resistía a ser explicada por la Mecánica Estadística usual, que predecía la llamada “catástrofe ultravioleta” (según la Mecánica Estadística clásica, la potencia total radiada resultaba ser infinita). Al tratar de explicar los resultados experimentales, Planck propuso que la radiación electromagnética está cuantizada, y que es producida sólo en “paquetes” de energía  $E = \nu h$ , donde  $h$  es la llamada constante de Planck. Planck no explicó el origen de tal cuantización, pero eso lo hizo Albert Einstein (1879-1955), en 1905, al proponer que esta cuantización es una característica del campo electromagnético: la radiación consiste en cuantos de energía. Por ejemplo, cuando la radiación incide sobre un metal, parte de esa energía se transfiere a los electrones, que abandonan la superficie del metal. La máxima energía que dichos electrones pueden tener es independiente de la intensidad de la luz: si la luz es más intensa, se extraerán más electrones, pero su máxima energía sólo dependerá del “color” (longitud de onda o, equivalentemente, frecuencia) de la luz. Este hecho fue definitivamente demostrado en el experimento realizado por Arthur Compton (1892-1962), en 1923. En este experimento,

Compton verificó que las longitudes de onda de la radiación incidente y saliente están relacionadas por:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad (6)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación incidente,  $\lambda'$  la de la radiación reflejada,  $\theta$  es el ángulo entre la radiación incidente y la reflejada y  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$  es la llamada longitud de onda Compton del electrón. Esta es justamente la conclusión que se obtiene si se trata a la luz como una partícula incidente de masa nula y se aplica la ley relativista de conservación del tetraimpulso, junto con  $p^\mu p_\mu = m^2$  y la expresión de Planck para las energías inicial y final del fotón. Haciendo eso, se tiene:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \quad \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$$

junto con  $E_\gamma = c p_\gamma = h\nu$ ,  $E'_\gamma = c p'_\gamma = h\nu'$  y  $E_e = m_e c^2$ , se obtiene (6).

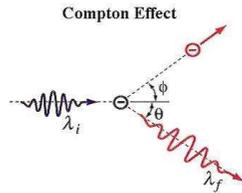


Figura 13: Diagrama del efecto Compton

A esa partícula sin masa, o cuanto de radiación electromagnética, llamamos el fotón. Su naturaleza se explica en forma más precisa cuando se estudian las interacciones electromagnéticas como una teoría de campos cuántica y relativista.

La figura 14 muestra el “modelo estándar”, tal como se lo entendía en el año 1932. Notemos que todas las partículas de materia tienen espín semientero ( $1/2$ ) y, en consecuencia, satisfacen la estadística de Fermi-Dirac (se las llama fermiones). El fotón (mediador de la interacción electromagnética), en cambio, tiene espín entero (1). En consecuencia, satisface la estadística de Bose-Einstein (se lo llama bosón).

## II.2. Más partículas “elementales” (desde 1932 hasta 1960)

### II.2.1. El mesón pi y el muón

Por entonces (tercera década del siglo XX) todo parecía estar bajo control: tres partículas elementales de materia: electrón, protón y neutrón y dos interacciones fundamentales:

		Materia	Interacción	Mediador
Á T O M O	N Ú C L E O	protón (p) m=1 GeV Q= +e s=1/2	electromagnética	fotón ( $\gamma$ ) m=0 GeV Q= 0 s=1
		neutrón (n) m=1 GeV Q= 0 s=1/2	-----	
		electrón (e) m=.5 MeV Q= -e s=1/2	electromagnética	fotón ( $\gamma$ ) m=0 GeV Q= 0 s=1

Figura 14: Modelo estándar en 1932

electromagnética (con el fotón asociado) y gravitatoria parecían explicarlo todo. Incluso, al describir el mundo subatómico podía ignorarse la interacción gravitatoria, por ser muchísimo más débil que la electromagnética.

Al electrón se lo llamó, también, leptón (del griego, liviano) y a los nucleones, el protón y el neutrón, mil veces más pesados, se los llamó hadrones (del griego, pesado).

Pero existía una cuestión a la cual este “modelo estándar” no podía dar respuesta: en átomos con varios protones, cómo hacían los protones para mantenerse unidos entre sí y con los neutrones, para formar el núcleo? Visto que todos los protones tienen la misma carga eléctrica y están muy próximos entre sí ( $\sim 1 fm = 10^{-15} m$ ), debería existir, entre ellos, una repulsión eléctrica muy grande. Qué fuerza los obligaba a permanecer unidos a tan cortas distancias como es el tamaño de un núcleo (algunos fm) sin que el núcleo explotara en mil pedazos? En un intento de responder esta pregunta, Hideki Yukawa (1907-1981) propuso, en 1935, la existencia de una fuerza entre protones y neutrones, debida a un potencial que se conoce con su nombre. Esta fuerza fue llamada, por entonces, fuerza fuerte pero nosotros la llamaremos fuerza nuclear, porque veremos después que no es una interacción fundamental, sino sólo el residuo, a bajas energías, de la verdadera fuerza fuerte, proveniente de la interacción entre quarks. Según Yukawa, la interacción nuclear estaba mediada por una partícula que llamó el mesón  $\pi$  o pión, cuya función en la teoría era similar a la del fotón en la Electrodinámica, aunque con una gran diferencia: debía tratarse de una partícula masiva.

En efecto, Yukawa propuso que la teoría de la interacción nuclear debía ser, como la Electrodinámica y la Gravitación, una teoría de campos. Pero es un hecho que, a distancias macroscópicas, no experimentamos más que fuerzas electromagnéticas y gravitato-

rias. Entonces, la fuerza nuclear debía ser una fuerza de muy corto alcance, a diferencia de las otras dos fuerzas conocidas por entonces, que tienen un alcance infinito. De esta condición, estimó que la masa del pión debía ser unas 300 veces la masa del electrón. De ahí proviene el nombre del mesón (masa intermedia entre leptón y hadrones).

La propuesta de Yukawa era una mera especulación hasta que dos grupos experimentales identificaron, en experimentos con rayos cósmicos realizados en 1937, dos partículas con características similares a las que debería tener la partícula de Yukawa. Pero existían algunas inconsistencias. Hubo que esperar hasta después de la segunda guerra (1947) para comprender que sólo una de esas partículas era, efectivamente, un mesón  $\pi$ . Pero la otra tenía características similares a las del electrón (no participaba en la interacción nuclear). A esta última se la conoce como partícula  $\mu$  o muón. Interactúa exactamente igual que el electrón, como el electrón tiene espín  $1/2$ , pero su masa es unas 200 veces la masa del electrón.

Posteriores medidas mostraron que, además, existían tres tipos de mesones  $\pi$ , todos ellos bosones (espín entero), pero que participaban de distinto modo en la interacción electromagnética, según su carga electromagnética ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$  y  $\pi^-$ ), donde los supraíndices tienen significado evidente.

### II.2.2. Antipartículas

La Mecánica Cuántica no relativista se estableció por completo en un lapso sorprendentemente corto: entre 1923 y 1926. Pero conciliar la Mecánica Cuántica con la Teoría de la Relatividad requirió mucho más tiempo y las contribuciones de muchos grandes físicos. El primer paso importante fue la propuesta, realizada por Paul Dirac (1902-1984) en 1927, de la ecuación que lleva su nombre para describir electrones libres cuya energía satisficiera la ecuación relativista  $E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4$ . De esta ecuación, resulta claro, debido al doble signo de la raíz cuadrada, que a cada solución con energía positiva debería corresponder otra con energía negativa. Pero, si fuese así, todos los electrones elegirían tener energías lo más negativas posibles y, al ocupar esos estados, emitirían una energía infinita. Para explicar por qué tal catástrofe no ocurre, fue necesario comprender que debía elaborarse una Teoría de Campos Cuántica Relativista (RQFT), sobre la cual hablaremos más adelante. Por ahora, lo importante para nosotros es que una teoría tal, permitía reinterpretar esas energías negativas asociándolas con una partícula distinta del electrón: su antipartícula, conocida como el positrón, con energía positiva. La RQFT prevé la existencia de una antipartícula por cada partícula conocida (aunque algunas partículas son sus propias antipartículas) que anotaremos con una barra encima. Por ejemplo, el positrón será anotado  $\bar{e}$ , la antipartícula del protón (antiprotón),  $\bar{p}$ , etcétera. Cada partícula y su antipartícula se caracterizan por tener, entre otras cosas, cargas eléctricas opuestas. En realidad, veremos más adelante que existen otros números cuánticos aditivos que caracterizan las propiedades de las partículas y todos ellos tienen signo opuesto para las correspondientes antipartículas.

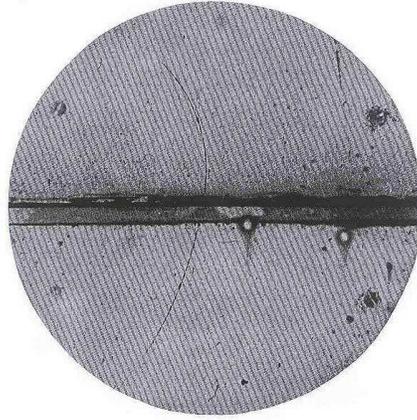


Figura 15: Descubrimiento del positrón

El positrón fue, efectivamente, detectado en 1932 por Carl Anderson (1905-1981), quien observó lo que se ve en la figura 15. Recordemos que una partícula cargada, al moverse en un campo magnético, sufre una fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B},$$

donde  $q$  es la carga eléctrica de la partícula,  $\vec{v}$  es su vector velocidad y  $\vec{B}$  es el campo magnético. En la figura, el campo magnético entra en el plano de la órbita. Una partícula con vector velocidad tangente a la trayectoria sufre, entonces, una fuerza centrípeta debida al campo y recorre una trayectoria circular como la que se ve, con radio  $R_C = \frac{m\gamma v}{qB}$ , conocido como radio del ciclotrón. La concavidad de la trayectoria es compatible con un electrón (carga  $-e$ ) viajando en sentido horario o con un positrón (carga  $+e$ ) viajando en sentido antihorario. Para definir cuál de las dos es la situación real, se introduce la placa de plomo: al pasar a través de la placa, la partícula disminuye su velocidad y, por lo tanto, el radio de su órbita. Del resultado experimental, que se muestra en la figura resulta que la partícula del experimento de Anderson se mueve en sentido antihorario y es un positrón.

Una pregunta que surge naturalmente es: si a cada partícula corresponde una anti-partícula, por qué toda la materia de nuestro Universo está compuesta por las primeras y no por las segundas.

Las teorías científicas aceptadas afirman que en el origen del universo existían materia y antimateria en iguales proporciones. Pero la materia y la antimateria se aniquilan mutuamente, dando como resultado energía pura, y sin embargo, el universo que observamos está compuesto únicamente por materia. Se desconocen los motivos por los que

no se ha encontrado antimateria en el universo. En Física, el proceso por el que la cantidad de materia superó a la de antimateria se denomina bariogénesis, y algunas posibles explicaciones son:

1. Pequeño exceso de materia tras el Big Bang: se supone que la materia que forma actualmente el universo podría ser el resultado de una ligera asimetría en las proporciones iniciales de ambas. Se ha calculado que la diferencia inicial entre materia y antimateria debió ser tan insignificante como de una partícula más de materia por cada diez mil millones de parejas partícula-antipartícula. 2. Asimetría CP: En 1967, Andréi Sajarov postuló por primera vez que las partículas y las antipartículas no tenían propiedades exactamente iguales o simétricas; se trata de una explicación basada en la violación de las simetrías discretas de conjugación de carga y paridad (violación CP). Algunos experimentos sugieren que esto quizás sea cierto y que, por lo tanto, no es necesario que haya existido un exceso de materia en el Big Bang: simplemente, las leyes físicas que rigen el universo favorecen el predominio de la materia frente a la antimateria. 3. Existencia de galaxias de antimateria ligada por antigравidad: Muy pocos científicos confían en esta posibilidad, pero todavía no ha podido ser completamente descartada.

Monografía 3: Asimetría entre materia y antimateria (Más detalles pueden encontrarse en las referencias [6, 7]).

### II.2.3. Los neutrinos

Por la misma época del descubrimiento del positrón, se observó que algunos procesos de desintegración nuclear, conocidos como desintegración nuclear  $\beta$ , parecían violar la conservación de energía e impulso. En tales procesos, un núcleo radiactivo parecía decaer en otro núcleo más liviano, emitiendo sólo un electrón:



Si la carga eléctrica debe conservarse, está claro que el núcleo hijo debe tener un protón más que su padre. Entonces, debe ser el que le sigue en la tabla periódica. Hay muchos ejemplos de decaimientos  $\beta$ : por ejemplo, el potasio  ${}_{19}^{A=40}K$  se transforma en calcio  ${}_{20}^{A=40}Ca$ , donde  $A$  es el peso atómico (suma de los números de protones y neutrones) y  $Z$  es el número atómico (número de protones). Como en todo proceso, deben conservarse la energía y el impulso. Pero en las medidas, se encontraba que el electrón saliente llevaba menos energía e impulso que los debidos. Para resolver esta paradoja, sin abandonar la muy probada ley de conservación de energía e impulso, Wolfgang Pauli (1900-1959) postuló la existencia de una nueva partícula, que se llevara la diferencia de energía e impulso. Debía, en primer lugar, ser neutra, para no afectar la conservación de la carga eléctrica. Para satisfacer la conservación de energía e impulso, su masa debía ser prácticamente cero (de hecho, todas las cotas para su masa siguen siendo consistentes con cero). Pero, además, no debía sufrir interacciones electromagnéticas (puesto que no la veían los detectores), ni nucleares. No sólo se tenía una nueva partícula (el neutrino,  $\nu$ ), y su correspondiente antipartícula (el antineutrino,  $\bar{\nu}$ ) sino, además, una nueva interacción fundamental, bautizada interacción débil, de la cual participaban todas las partículas de

materia conocidas, pero tan débil que un neutrino, no sufriendo ninguna otra interacción, podía penetrar miles de años-luz de plomo sin dificultad.

En términos de la partículas consideradas elementales por entonces, el proceso (7) podía explicarse como:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}. \quad (8)$$

Pronto se midieron otros procesos que sólo podían ser explicados por la presencia de un neutrino o de su antipartícula, el antineutrino. En primer lugar, el proceso llamado desintegración  $\beta$  inversa

$$\nu + n \rightarrow p + e. \quad (9)$$

Además:

$$\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu} \quad (10)$$

$$\pi^+ \rightarrow \bar{\mu} + \nu. \quad (11)$$

La pregunta natural es la siguiente: es el antineutrino que aparece en (8) igual al neutrino de (9)? Podría bien ocurrir, ya que el neutrino no tiene carga eléctrica, que fuese su propia antipartícula. Pero no es así: tienen distintas helicidades (un concepto que discutiremos más adelante). Es decir: el neutrino no es su propia antipartícula. Para responder a esta pregunta, se buscó producir la reacción

$$\bar{\nu} + n \rightarrow p + e, \quad (12)$$

similar al proceso beta inverso. Pero la conclusión fue que esta reacción no ocurre (en realidad, se establecieron cotas compatibles con cero para la probabilidad de que ocurra).

Se postuló, entonces, la existencia de un nuevo número cuántico conservado aditivo (como lo es la carga eléctrica), llamado número leptónico y anotado por  $L$ . El electrón, el muón y ambos neutrinos tienen  $L = 1$ , mientras sus antipartículas tienen  $L = -1$ . Visto que debe conservarse, la suma de los números leptónicos en el estado inicial debe coincidir con la suma de números leptónicos en el estado final de la misma. Eso impone que reacciones como (12) estén prohibidas y que puedan ocurrir todas las restantes que escribimos hasta ahora.

Pero, además, el neutrino de (9) no es el mismo que el de (11). Los distinguimos llamándolos, respectivamente, neutrino del electrón ( $\nu_e$ ) y neutrino del muón ( $\nu_\mu$ ). Experimentalmente, se observó que el proceso (muón que se transforma en electrón, emitiendo radiación)

$$\mu \rightarrow e + \gamma$$

no existe. Obsérvese que la conservación de  $L$  no lo prohíbe. Para explicar por qué no ocurría fue necesario introducir dos diferentes números leptónicos: el número leptónico

del electrón ( $L_e$ ) y el de muón ( $L_\mu$ ), cada uno de ellos conservado en forma independiente y, por supuesto, tales que  $L_e + L_\mu = L$ . Además,  $L_e = 1$  para el electrón y su neutrino,  $L_e = -1$  para sus antipartículas,  $L_e = 0$  para el muón, su neutrino y todas sus antipartículas y mutatis mutandi para la familia del muón.

Vale la pena notar que hay una diferencia entre los números leptónicos y la carga eléctrica: como veremos después, la conservación de la carga eléctrica deriva de la existencia de una simetría fundamental en la teoría que explica la interacción electromagnética. Cuando se propuso la existencia de estos varios números fermiónicos, no existía aún una teoría que describiera las interacciones débiles, que recién aparecería muchos años después.

A esta altura, tenemos ya muchas partículas que interactúan electromagnética y débilmente, pero no sienten interacción nuclear: el electrón, el muón, sus respectivos neutrinos y las antipartículas de todos ellos. A todas estas partículas se las llama leptones (como habíamos bautizado al electrón (y hay más por descubrir).

Contrariamente, a todas las partículas que sufran los tres tipos de interacción (como el protón y el neutrón y sus antipartículas) las llamaremos hadrones. Durante el período que estamos describiendo se descubrieron muchos otros hadrones.

#### II.2.4. Partículas “extrañas”

Por un breve período, hacia 1947, parecía que toda la física de partículas estaba en orden: se había detectado el mesón  $\pi$  de Yukawa, y también el positrón y el neutrino (nótese que todas estas eran partículas cuya existencia fue primero supuesta y que se midieron a posteriori). La necesidad de la existencia del muón no estaba del todo clara, pero su existencia no contradecía ninguna predicción teórica. Pero esta situación bastante cómoda se transformó, a partir de diciembre de 1947, en un verdadero caos. Primero, en medidas de rayos cósmicos, se detectó un proceso similar al de la figura 16. Se concluyó de este experimento que, al pasar las partículas provenientes de rayos cósmicos a través de la placa de hierro, se producía una partícula neutra, que se desintegraba después en un par de piones, dejando la novedosa traza en forma de V. A esa partícula se la llama actualmente el kaón neutro ( $K^0$ ) y el proceso se anota:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- . \quad (13)$$

Poco después, se midió otro proceso, en que una partícula cargada, que se denota  $K^+$ , se desintegraba en tres piones:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ .$$

Ambas partículas se comportaban, en cierto sentido, como los piones y, como ellos, tenían espín entero. A todas las partículas que sufrían la interacción nuclear, además de la débil y la electromagnética y que tenían espín entero, se las llamó mesones. A continuación, empezaron a descubrirse muchísimos otros mesones:  $\eta$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  y otras, todas ellas similares a piones pesados.

Al mismo tiempo, se midió otro proceso, similar al de la ecuación (13) (llamado tipo V por su aspecto), pero con un pión y un protón como productos de desintegración:



La figura 16 muestra un esquema de los rastros dejados por los productos de desintegración en este último experimento.

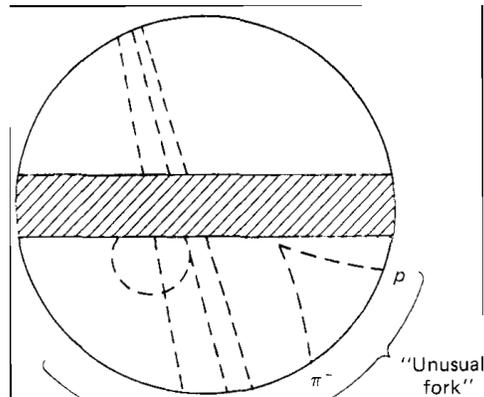
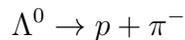


Figura 16: Descubrimiento del barión  $\Lambda^0$

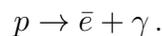
Esa partícula, que también participa de las interacciones fuertes, se comporta como los protones y neutrones y, como ellos, tiene espín semientero. A todas estas partículas se las bautizó bariones. En los siguientes años se descubrieron muchos otros bariones:  $\Sigma$ ,  $\Xi$  y otros.

Todas estas nuevas partículas, no sólo eran inesperadas, sino que eran extrañas, en el sentido de crearse de modo copioso (vía interacción nuclear) y decaer muy lentamente (vía interacción débil). Para explicar esto, se asignó a cada partícula un nuevo número cuántico, llamado “extrañeza” y anotado  $S$ , que debía conservarse en las reacciones fuertes, pero no en las débiles. A las partículas extrañas se les asignó  $S = 1$  y a las restantes partículas,  $S = 0$ . Así, procesos débiles tales como



donde la única partícula con extrañeza es  $\Lambda^0$  podían ocurrir vía interacción débil (que viola la conservación de  $S$ ), pero no vía interacción fuerte (que conserva la extrañeza) y eran canal de desintegración para las partículas extrañas.

Notemos que, hasta ahora, nada impediría la desintegración del protón, mediante el proceso:



Obviamente, la probabilidad de este proceso debe ser muy baja: si fuera grande, los átomos comunes se desintegrarían. Aunque tal desintegración no se ha excluído por completo, para forzar que no ocurra, se puede introducir un nuevo número conservado: el número bariónico, que vale uno para los bariones, -1 para sus antipartículas y cero para mesones y leptones. De este modo, el protón, siendo el barión más liviano, no podría decaer en nada, conservando al mismo tiempo el número bariónico. (Obsérvese que nunca se postuló algo como un “número mesónico”). Las teorías de gran unificación de las fuerzas fundamentales más modernas predicen una muy pequeña probabilidad de desintegración del protón, y existen experimentos destinados a acotar esa probabilidad. Pero la cota parece ser compatible con cero. Actualmente, la cota mínima a la vida media del protón es de  $6,6 \times 10^{33}$  años.

Como vemos, cerca de 1960, el panorama de la física de partículas era caótico. Para dar una idea de la situación, al recibir su premio Nobel, Willis Lamb (1905-2008) dijo:

“Cuando se entregó por primera vez el Premio Nobel, los físicos sólo conocían dos objetos que podían llamarse “partículas elementales: el protón y el electrón. A partir de 1930, apareció una infinidad de nuevas partículas. He escuchado decir: antes, quien descubría una nueva partícula solía ser premiado con un Premio Nobel. Ahora, debería pagar una multa de U\$S 10.000.”

### II.3. La “óctuple senda” (eightfold way) y el modelo de quarks

Para ampliar sobre esta sección, se sugieren los libros que aparecen como referencia [8, 9].

Como se ve, lo que había estado tan claro hacia fines de la década de 1940, era terriblemente complicado a mediados de la década de 1960. Era necesario el equivalente de Mendeleev, que pusiera cierto orden en este zoológico donde se creaban cada vez más partículas, estableciendo una especie de tabla periódica, no ya para los núcleos, sino para los hadrones. Los Mendeleev de los hadrones fueron Murray Gell-Mann (1929-) y Yuval Ne’eman (1925-2006). Gell-Mann llamó a su esquema “La óctuple senda”, una expresión tomada de las enseñanzas de Buda, quien enunció ocho modos de proceder para conseguir el fin del sufrimiento mediante la superación de la ignorancia. El nombre hacía también referencia a los grupos de ocho partículas con características similares en que podían reunirse algunos de los bariones y, también, algunos de los muchos mesones conocidos.

La observación que realizaron ambos científicos fue que los bariones y mesones formaban diagramas muy definidos (multipletes) si se los agrupaba usando sus carga eléctrica y su extrañeza. Por ejemplo, los ocho bariones más livianos se agrupaban formando el diagrama que se muestra en la figura 17

Este conjunto de partículas se conoce como el octuplete bariónico. Nótese que las partículas con las mismas cargas (en unidades de la carga del protón) se encuentran sobre las mismas diagonales. La líneas horizontales, en cambio, contienen partículas con la misma extrañeza.

II.3 LA “ÓCTUPLE SENDA” (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

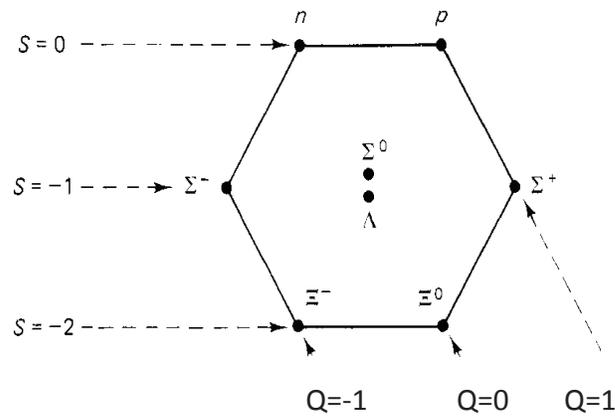


Figura 17: Octuplete de bariones

Los ocho mesones más livianos se agrupan en un diagrama similar, que se ve en la figura 18.

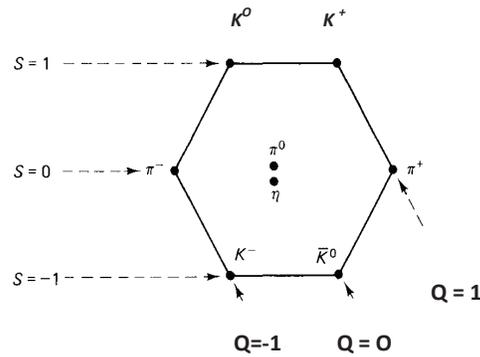


Figura 18: Octuplete de mesones

No sólo hexágonos existían en el esquema: los diez bariones que seguían en masa se agrupaban en un decuplete, como se ve en la figura 19.

Lo notable es que, también en forma similar a lo que había hecho Mendeleev, al acomodarse estos últimos bariones en el decuplete, la partícula ahora conocida como  $\Omega^-$  no había sido detectada. Gell-Mann predijo su existencia y cuánto debía valer su masa. La partícula fue, finalmente, detectada en 1964.

Como ocurrió mucho antes con la tabla periódica, la Óctuple senda dio origen a la pregunta: por qué se portan los hadrones de modo tan regular?, por qué se reúnen en estos curiosos diagramas? La tabla periódica debió esperar muchos años hasta que se desarrollara la mecánica Cuántica y, de la mano de este desarrollo y del principio de exclusión de Pauli se pudiera explicar su regularidad. En cambio, la óctuple senda encontró una explicación en muy pocos años: ya en 1964, el mismo Gell-Mann y Stephan Zweig (1881-1942) propusieron, de manera independiente, que todos los hadrones conocidos por entonces estaban compuestos por partículas más elementales: los quarks. Los quarks existían en tres tipos, o sabores, caracterizados por su carga eléctrica y su extrañeza, formando un

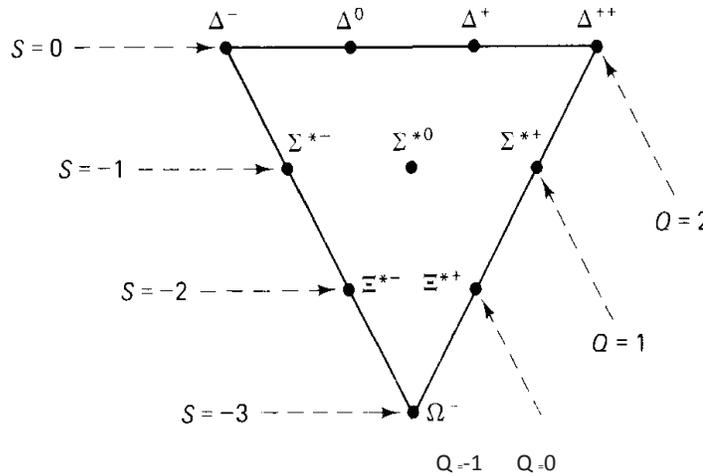


Figura 19: Decuplete bariónico

diagrama triangular como el que se muestra en la figura 20.

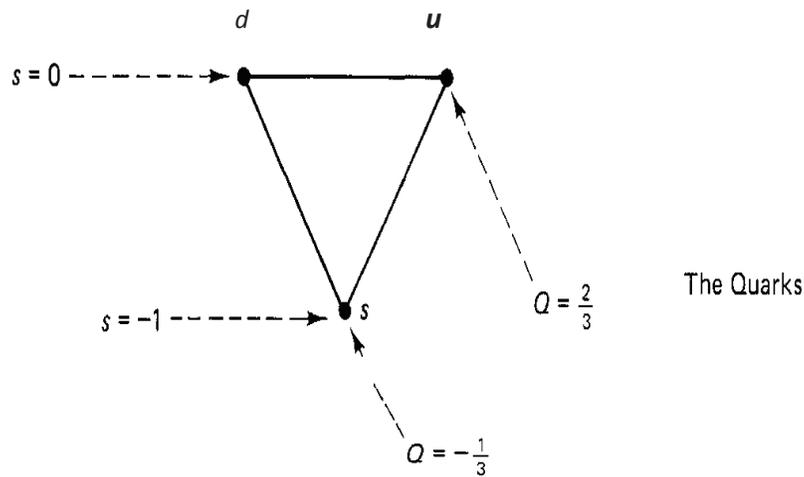


Figura 20: Los quarks

El quark up ( $u$ ) lleva carga  $2/3$  y extrañeza cero; el quark down ( $d$ ) tiene carga  $-1/3$  y extrañeza cero; el  $s$ , llamado quark extraño, tiene carga  $-1/3$  y extrañeza  $S = -1$ . A cada quark  $q$  corresponde un antiquark  $\bar{q}$ , con ambos números cuánticos (carga eléctrica y extrañeza) cambiados de signo, como se muestra en la figura 21.

El modelo de quarks afirma que:

- Cada barión está compuesto por tres quarks (cada antibarión está compuesto de tres antiquarks). Por ejemplo, un protón está compuesto por dos quarks  $u$  y un quark  $d$ .
- Cada mesón está compuesto por un quark y un antiquark. Por ejemplo, el pión  $\pi^+$  está compuesto por un  $u$  y un  $\bar{d}$ .

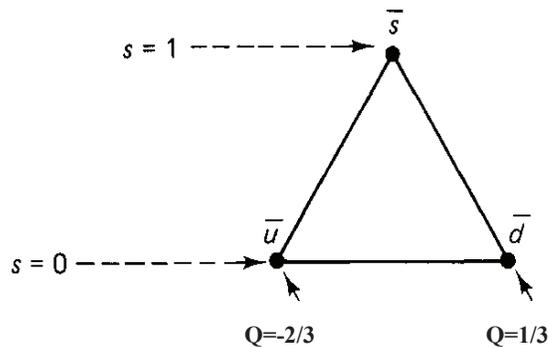


Figura 21: Los antiquarks

Con estas reglas es cuestión de simple aritmética construir los diversos hadrones que forman, por ejemplo, el octete de mesones y el decuplete de bariones. Por ejemplo: tres quarks  $u$  tendrán carga total  $+2$  y extrañeza cero. Esa es la partícula  $\Delta^{++}$ . Algo similar ocurre con las posibles combinaciones quark-antiquark, que reproducen el octete mesónico. Pero hay una combinación,  $s\bar{s}$ , que corresponde a una novena partícula que no está en el hexágono. Se trata de un tercer mesón, aparte del  $\pi^0$  y del  $\eta$ , con ambos números cuánticos nulos. Tal partícula fue, efectivamente, detectada y se llama la partícula  $\eta'$ . Explicar el octete bariónico es algo más complicado, porque requiere tener en cuenta, además, los espines, pero funciona igualmente bien. Efectivamente, todos los multipletes de la óctuple senda que tienen masas más grandes pueden explicarse mediante estados excitados de los quarks. Obsérvese que hay ciertos hadrones cuya existencia sería incompatible con el modelo de quarks. Por ejemplo: no puede haber un barión con  $S = 0$  y  $Q = -2$ : no existe combinación de tres quarks que dé por resultado esos números. Tampoco puede haber un mesón de carga  $+2$ , como la del barión  $\Delta^{++}$  o de extrañeza  $-3$ , como el barión  $\Omega^-$ . Durante mucho tiempo se realizó una intensa búsqueda de estas partículas “exóticas”, pero no se encontró ninguna.

Las partículas que, hasta 1964, habían parecido ser partículas elementales (en particular, el protón y el neutrón), comenzaban a pensarse ahora como compuestas de otras más elementales, los quarks. La construcción precisa de todos los hadrones a partir de quarks está fundada en el uso de la teoría de grupos que, como veremos más adelante, aparece toda vez que existe una simetría. El grupo de simetría en que se funda la óctuple senda es el grupo  $SU(3)$ . Suele llamárselo grupo  $SU(3)$  de sabor, para distinguirlo del grupo  $SU(3)$  de color, sobre el cual está basada la teoría que explica la dinámica de los quarks. En esta etapa inicial del modelo de quarks se dice, entonces, que los quarks existen en tres especies o “sabores”:  $u, d, s$ .

Pero hay un detalle inusual: al cabo de más de 40 años, nadie ha detectado un quark libre. Si el protón, por ejemplo, está compuesto de tres quarks, podría pensarse que, golpeándolo con suficiente energía, los quarks deberían aparecer después de la colisión co-

mo partículas libres. Pero no es el caso. Si se produjeran, serían muy fáciles de detectar, debido a su carga fraccionaria, que los hace únicos. Pero ningún quark libre ha sido detectado jamás. A este fenómeno se lo conoce como confinamiento de los quarks y una tarea pendiente para los físicos teóricos consiste en mostrar de modo analítico que la Cromodinámica Cuántica (QCD, teoría de las interacciones fuertes entre quarks) conduce, en su límite de bajas energías, al confinamiento.

Otra dificultad con el modelo de quarks se presentó al tratar de interpretarlo en base al principio de exclusión: los quarks debían tener spin  $1/2$  para poder, con tres de ellos, construir un barión, que también tiene spin  $1/2$  sí resultaba, por ejemplo, que la partícula  $\Delta^{++}$  debía consistir de tres quarks idénticos, en el mismo estado, violando el principio de exclusión. Para resolver esta dificultad se propuso la existencia de otro número cuántico: el color. Por cada sabor de quark, existían tres colores. Así, los tres quarks que integran  $\Delta^{++}$  pueden coexistir con todos los restantes números coincidentes, pero distintos valores de la carga de color. Tal carga de color es la consecuencia de una nueva simetría, cuyo grupo asociado es también  $SU(3)$ . Se la llama simetría de color y se agrega al modelo de quarks un tercer postulado:

- Todas las partículas existentes en la naturaleza tienen carga de color nula (las tres cargas deben aparecer en la misma proporción).

Así, todos los bariones deben estar compuestos de un quark de cada color, lo mismo para los antibariones, compuestos de un antiquark de cada color (con signo negativo) y para los mesones  $q\bar{q}$ , que tienen carga de color nula, como todas las restantes cargas. Pero no pueden existir partículas formadas por dos o por cuatro quarks, porque su carga de color no podría anularse.

A estos tres sabores iniciales de quarks (up ( $u$ ), down ( $d$ ), strange( $s$ )) se agregaron, con el tiempo, otros tres: charm ( $c$ ), top ( $t$ ) y bottom ( $b$ ).

Dado que los nucleones están formados por quarks, en el marco del modelo de quarks, la fuerza fuerte fundamental ya no es una fuerza entre nucleones, sino una fuerza fuerte entre quarks: la Cromodinámica Cuántica (QCD), basada en la simetría  $SU(3)$  de color. Por lo tanto, la fuerza nuclear del tipo de Yukawa se interpreta como una fuerza efectiva, remanente a bajas energías o, lo que es igual, a grandes distancias, de la QCD, tal como las fuerzas de van der Waals son la teoría efectiva proveniente de la Electrodinámica Cuántica (QED).

## II.4. Evolución de las teorías de las interacciones fundamentales

A fin del siglo XIX ya existía una teoría de las interacciones electromagnéticas: la teoría de James Clerk Maxwell (1831-1879). Vale la pena observar que esta teoría es el primer ejemplo de una teoría de campos *relativista* para una de las interacciones fundamentales: la Electrodinámica. También debe señalarse que es el primer ejemplo de unificación. Antes de Maxwell, electricidad y magnetismo eran considerados como dos fenómenos distintos. Maxwell comprendió que una única teoría podía incluir a ambos como dos as-

pectos de una misma interacción: la interacción electromagnética, y mostró que esa unificación podía realizarse respetando el principio de la Relatividad Especial de Einstein. Por la misma época, Einstein formuló la teoría de la Relatividad General, que es una teoría de campos para otra de las interacciones fundamentales: la gravitación.

Al comprenderse que debían existir, además de estas interacciones otras dos: nuclear y débil se propusieron, por analogía con la Electrodinámica, sendas teorías relativistas que las describían de modo no cuántico.

Pero está claro que una buena teoría de las interacciones fundamentales no sólo debe ser consistente con la Relatividad, sino también con los postulados de la Mecánica Cuántica. Conciliar ambas cosas fue una tarea que demandó decenios. Sobre la base de la Electrodinámica de Maxwell, Freeman Dyson (1923-), Julian Schwinger (1918-1994), Richard Feynman (1918-1988) y otros desarrollaron, en la década del 50, la Electrodinámica Cuántica (QED). Se trata de una teoría cuántica de campos, basada en el principio de invarianza frente a transformaciones de gauge. Es una teoría capaz de reproducir con extraordinaria precisión los resultados experimentales. Por ejemplo, la predicción de la teoría para la constante de estructura fina,  $\alpha$ , coincide con la medida experimental hasta orden  $10^{-8}$  (el error es, a lo sumo del orden de una parte en mil millones).

Actualmente sabemos que la interacción nuclear no es una interacción fundamental, porque los nucleones no lo son. En cambio, las partículas elementales son los quarks, de los cuales están formadas todas las partículas que interactúan fuertemente, llamadas hadrones. La interacción fuerte, tal como la entendemos ahora es una fuerza fuerte entre quarks. Una teoría de campos cuántica y relativista para esta interacción también existe: es la Cromodinámica Cuántica (QCD), basada en la simetría de color y con una carga de color asociada. También ésta es una teoría de gauge, y fue desarrollada generalizando las ideas que caracterizan a la Electrodinámica Cuántica. En este contexto, debería poder demostrarse que la fuerza nuclear es el residuo, a bajas energías, de QCD. Tal demostración no existe, porque requeriría resolver QCD en regiones donde la constante de acoplamiento se hace muy grande (esclavitud infrarroja) y no puede usarse teoría de perturbaciones. El otro límite de QCD (altas energías), donde la constante de acoplamiento es pequeña (libertad asintótica) arroja predicciones en perfecto acuerdo con los resultados de los experimentos de altas energías.

También la interacción débil es explicada por una teoría cuántica relativista de campos de gauge: la teoría de Glashow-Salam y Weinberg, propuesta en la década de 1960. Esta teoría no sólo describe la interacción débil adecuadamente, sino que la describe en forma unificada con la interacción electromagnética. Se la conoce como la teoría de las interacciones electrodébiles. Además de describir procesos débiles que se conocían en la época de su formulación, la teoría predijo la existencia de los llamados procesos de corriente neutra, medidos a posteriori. Pero, como mencionamos antes, tiene algunos aspectos no del todo satisfactorios: para dar masa a las partículas requiere de un mecanismo conocido como el mecanismo de Higgs, cuyo origen y razón de ser no se comprenden completamente. Este mismo mecanismo, predice la existencia de una partícula de espín cero (la partícula de Higgs) que aún no se ha detectado, aunque se espera verificar su existencia en los experimentos de LHC (CERN; Ginebra). Como ya dijimos también, el

## II.4 EVOLUCIÓN DE LAS TEORÍAS DE LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

modelo de Glashow, Salam y Weinberg contiene demasiados parámetros a ajustar con el experimento, lo cual no es deseable en una teoría fundamental.

Un poco por estas razones y más por cumplir con el sueño de unificación del que Maxwell fue precursor, se han propuesto diversas teorías que unifican las interacciones electrodébiles y las fuertes. Las teorías de cuerdas van más allá: proponen un modo de unificación que, además, podría conducir a la cuantización de la gravitación. Pero, actualmente, no está aún claro que sea este el camino a seguir para tener una “teoría de todo” (TOE), como suele llamarse a la teoría de cuerdas.

La figura 22 presenta una comparación de los rangos relativos de las interacciones fundamentales entre los campos de materia y muestra las partículas cuánticas que actúan como mediadoras en cada una de ellas. La figura 23 presenta un resumen del llamado Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales, tal como se lo entiende en la actualidad.

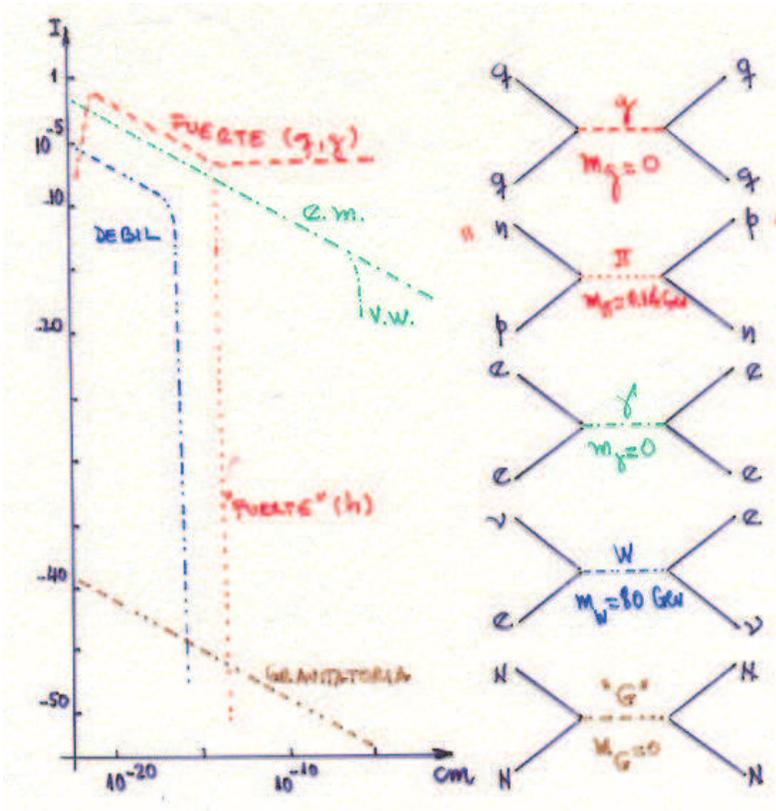


Figura 22: Rangos de las interacciones fundamentales (y no tanto)

# II.4 EVOLUCIÓN DE LAS TEORÍAS DE LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

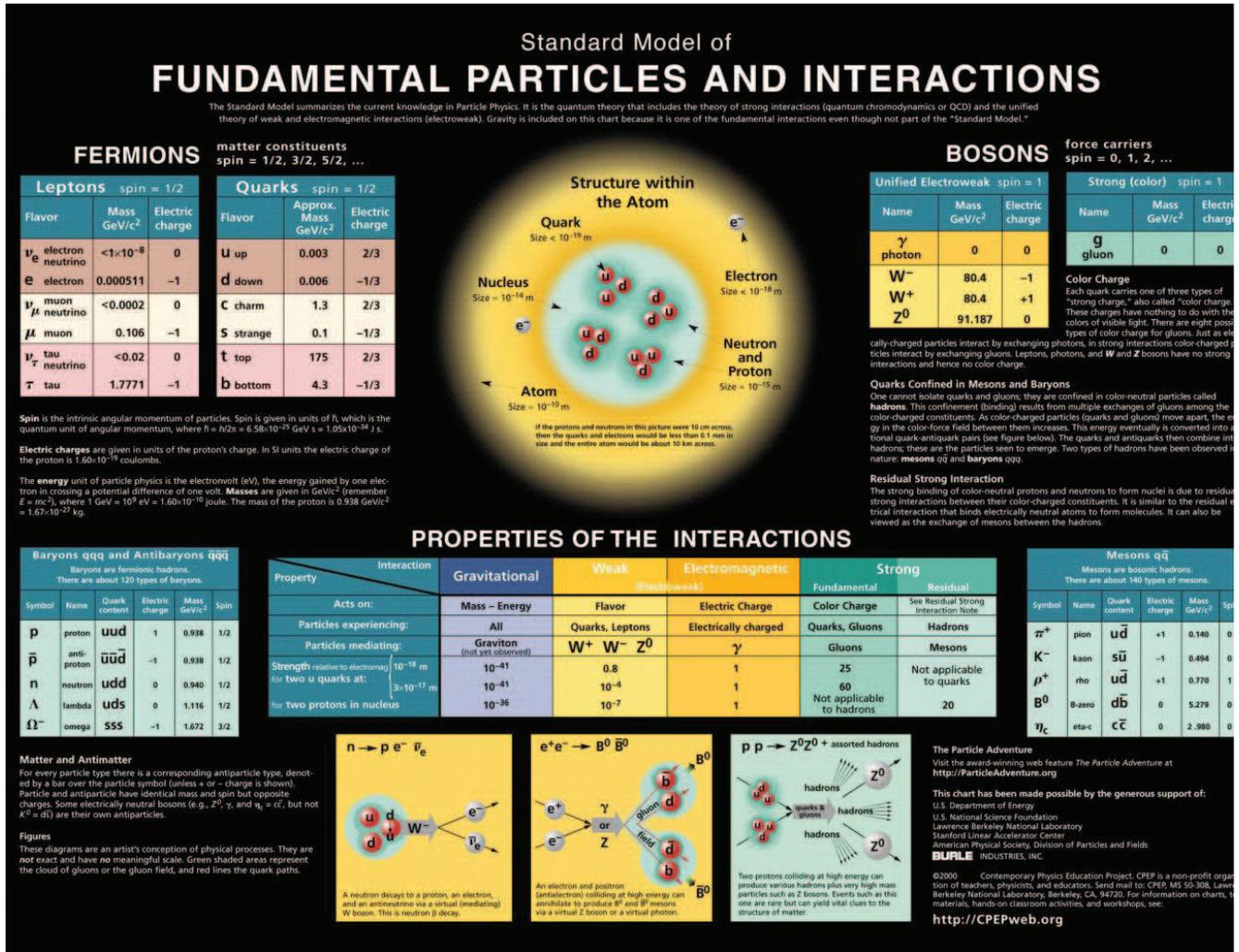


Figura 23: Modelo Estándar

## **Parte III**

# **Simetrías en Física Subatómica**



### III.1. Simetrías, grupos y leyes de conservación

Esta sección está basada, fundamentalmente, sobre el correspondiente capítulo de la referencia [2]. Ver también [11, 12]. Algunos videos de divulgación y programas interactivos sobre simetrías pueden encontrarse en:

- [www.geometriadinamica.cl/2009/11/el-lenguaje-de-la-simetria/;](http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/el-lenguaje-de-la-simetria/)
- [www.dailymotion.com/video/x1vt7e\\_frank-wilczek\\_simetria fisica-y-music\\_school](http://www.dailymotion.com/video/x1vt7e_frank-wilczek_simetria fisica-y-music_school)
- [www.acorral.es/index3.htm;](http://www.acorral.es/index3.htm;)
- [www.geometriadinamica.es/Tabla/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/](http://www.geometriadinamica.es/Tabla/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/)
- [www.youtube.com/watch?v=LpvLCN19y3A](http://www.youtube.com/watch?v=LpvLCN19y3A)

Se recomienda, como lectura adicional [10] (la versión en español está agotada), de donde proviene la cita siguiente:

*“La idea de simetría, no importa en forma cuán amplia o restringida se la considere, es una idea mediante la cual el hombre, a través de los siglos, ha tratado de comprender y crear orden, belleza y perfección.”* Hermann Weyl (1885-1955)

Más allá de un puro placer estético, en el mundo de la Física (y mucho más en el mundo de la Física Subatómica), las simetrías están directamente ligadas con la dinámica de los sistemas estudiados. No es demasiado exagerado decir que las simetrías son la explicación más fundamental de las leyes físicas.

Empecemos por analizar un ejemplo matemático simple de cuán útiles pueden ser las consideraciones basadas en el estudio de las simetrías. Analicemos el gráfico de la figura 24

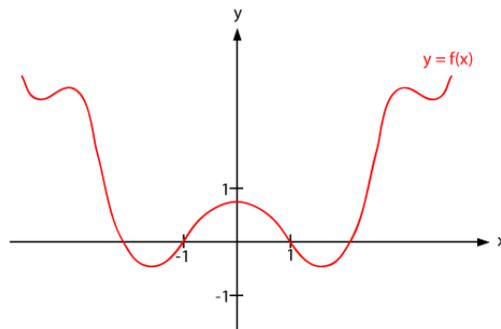


Figura 24: Función par

No sabemos cuál es, exactamente su expresión funcional, pero podemos afirmar que se trata de una función par,  $f(-x) = f(x)$ . Sin saber más, podemos estar seguros de cosas tales como (obsérvese que el producto de una función par por una impar resulta impar y que la derivada de una función par es una función impar):

$$\int_{-a}^a x f(x) dx = 0, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-b} = - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=b}, \quad \int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx,$$

con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales arbitrarios.

En la antigüedad, los griegos pensaban que las simetrías debían reflejarse directamente en los movimientos de objetos: por ejemplo, las estrellas debían moverse en trayectorias circulares, porque éstas son las trayectorias más simétricas en un plano. Pero resulta que los planetas no describen órbitas circulares, sino elípticas. Newton comprendió que las simetrías fundamentales se reflejan en las ecuaciones de movimiento, aunque no necesariamente en soluciones particulares de esas ecuaciones. La ley de gravitación universal de Newton tiene simetría esférica (la fuerza es la misma en todas las direcciones, depende sólo de la distancia entre las masas interactuantes) pero las órbitas de los planetas no tienen la misma simetría. Por eso, observando los fenómenos físicos no es tan fácil detectar las simetrías detrás de los mismos y escribir las ecuaciones que se derivan de ellas. Sin embargo, además de Newton, Einstein y Dirac, por ejemplo, fueron capaces de hacerlo.

Precisemos un poco más qué se entiende por simetría: es una transformación que puede realizarse sobre un sistema y que lo deja invariante, es decir, lo lleva a una configuración que es indistinguible de la que tenía antes de ser transformado. En el caso de la función de la figura 24, cambiar el signo del argumento es una operación de simetría, que deja invariante a la función considerada.

Un ejemplo geométrico lo constituyen las simetrías de rotación de un triángulo equilátero. Si el triángulo es rotado en sentido contrario al de las agujas de un reloj en  $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ , alrededor de un eje perpendicular al plano que pase por el punto donde se cruzan sus tres "alturas", el triángulo vuelve a ser el mismo. Llamaremos a esta primera transformación  $R_{\frac{2\pi}{3}}$ . Otra transformación de simetría consiste en dejarlo como está (una transformación muy obvia, que se conoce como la transformación idéntica o identidad) ( $R_0 = I$ ). También pueden hacerse, sucesivamente, dos rotaciones como la  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  ya mencionada, cosa que da por resultado una rotación en  $240^\circ$  ( $R_{\frac{4\pi}{3}}$ ). En realidad, la acción sucesiva de cualquier número de ellas, también es una simetría: el triángulo permanece invariante. Por supuesto, hacer tres rotaciones en  $\frac{2\pi}{3}$  en el mismo sentido es lo mismo que aplicar la transformación idéntica. Hacer una rotación en  $\frac{2\pi}{3}$  en sentido antihorario es como rotar  $\frac{4\pi}{3}$  en sentido horario y así siguiendo, de modo que hay tres rotaciones distintas. Estas tres tienen todas las propiedades que caracterizan a un grupo de simetría (en este caso, se trata del grupo cíclico  $C_3$ ).

En general, el conjunto de las transformaciones de simetría de un dado sistema y su operación de composición deben tener las siguientes propiedades (aquí se entiende que, en la composición, se aplica primero la transformación que aparece a la derecha):

1. Clausura de la ley de composición: Si  $R_i$  y  $R_j$  están en el conjunto de simetrías, su aplicación sucesiva,  $R_i R_j$ , también debe estar en él, para todos los posibles pares de transformaciones  $R_i$  y  $R_j$ .
2. Existencia de la identidad: existe un elemento  $I$  en el conjunto, tal que  $I R_i = R_i I = R_i$  para todo  $R_i$ .
3. Existencia de la inversa: para todo  $R_i$  en el conjunto existe un elemento, también perteneciente al conjunto, que llamaremos  $R_i^{-1}$  tal que  $R_i R_i^{-1} = I$ .

4. Asociatividad de la composición:  $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j)R_k$ , para todas las transformaciones  $R_i, R_j, R_k$  en el conjunto.

Estas son las propiedades que definen la estructura algebraica conocida como **grupo**. Nótese que aunque, en nuestro ejemplo, la ley de composición es conmutativa, la definición de grupo no lo exige. En general, no lo es. Si lo es, el grupo se llama **abeliano**. Si no, se lo llama **no-abeliano**. Por ejemplo: las traslaciones en el espacio de tres dimensiones constituyen un grupo abeliano, pero las rotaciones en el mismo espacio, no.

Los grupos pueden ser **finitos**, como en nuestro ejemplo, donde el grupo ( $C_3$ ) contiene sólo tres elementos o **infinitos** (como el grupo de los enteros, entendiendo la suma usual como la ley de composición).

Finalmente, los grupos pueden ser **discretos** (cada elemento puede caracterizarse por un índice entero) como  $C_3$ , o el grupo de los enteros, o **continuos** (se necesitan uno o más parámetros continuos para caracterizar todos los elementos. Las rotaciones de ángulo arbitrario en el plano son un ejemplo de este último caso (un círculo es invariante frente a estas transformaciones). Por supuesto, todos los grupos finitos son discretos.

En Física, son particularmente importantes los grupos de matrices. Entre ellos, los más importantes son los grupos de matrices **unitarias** (matrices complejas  $U$  de  $n \times n$ , tales que  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ ). Como en todos los grupos de matrices, la ley de composición es, en este caso, el producto usual entre matrices. Este grupo se llama  $U(n)$  (grupo **unitario** de  $n \times n$ . Entre estas matrices, interesan, en general, las que tienen determinante 1 (son unimodulares), que forman un subgrupo, al cual se conoce como grupo unitario **especial**  $SU(n)$ . Si nos restringimos a matrices reales, las matrices que satisfacen la primera condición se llaman **ortogonales** y el grupo, grupo ortogonal  $O(n)$ . El subgrupo especial se anota  $SO(n)$ . Por ejemplo, las rotaciones en el espacio de tres dimensiones, pueden representarse por el grupo  $SO(3)$ .

Ejemplo de un grupo finito de matrices:

Las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

constituyen un grupo finito (por lo tanto, discreto), abeliano, de tres elementos, como puede verificarse en la tabla que sigue:

$\cdot$	$I$	$M_1$	$M_2$
$I$	$I$	$M_1$	$M_2$
$M_1$	$M_1$	$M_2$	$I$
$M_2$	$M_2$	$I$	$M_1$

Es fácil establecer una correspondencia entre este último grupo y el grupo  $C_3$  ( $I \Leftrightarrow I_{2 \times 2}, R_{\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow M_1, R_{\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow M_2$ ). Todo grupo  $G$  de transformaciones puede representarse por un grupo de matrices. A cada elemento del grupo  $G$ , que anotaremos  $g$  puede

asociársele una matriz  $M_g$ , respetando la ley de composición: si  $gh = l$  (con  $g$ ,  $h$  y  $l$  pertenecientes a  $G$ , entonces  $M_g M_h = M_l$ . Se dice que las matrices  $M$  constituyen una **representación** del grupo  $G$ . Por ejemplo, la teoría del espín surge de estudiar las representaciones matriciales del grupo  $SU(2)$  (matrices unitarias de  $2 \times 2$  con determinante igual a 1). Para elementos próximos a la identidad en ambos grupos, dichas representaciones coinciden con las del grupo de rotaciones en el espacio tridimensional. Veremos esto con más detalle en breve.

Por supuesto, dado un grupo, existen muchas posibles representaciones matriciales del mismo. Esas representaciones pueden ser **fieles**, si la relación entre elementos de  $G$  y matrices  $M_g$  es uno a uno, pero puede ocurrir que se asigne la misma matriz a más de un elemento. Por ejemplo, una representación posible para cualquier grupo es la llamada **representación trivial**: a todo elemento del grupo se le asigna 1, matriz de  $1 \times 1$ . A esta se la llama representación trivial y, por supuesto, no es fiel. Un ejemplo del caso contrario son las matrices de la ecuación (15), que constituyen una representación fiel del grupo de rotaciones del triángulo equilátero,  $C_3$ .

Todo grupo de matrices tiene, además de la representación trivial, una representación constituida por las propias matrices que definen al grupo (obviamente, fiel). Se la conoce como la representación de definición, o representación **fundamental**. Por ejemplo,  $SU(2)$  tiene representaciones de dimensiones 1 (trivial), 2 (fundamental), 3, 4, 5, .... Las representaciones de  $SU(2)$  coinciden con las de  $SO(3)$  si se admiten, para este último, representaciones no fieles aparte de la trivial. Esto es importante, porque la componente de espín de, por ejemplo, la función de onda para partículas no relativistas, está formada por vectores cuyas componentes se transforman con matrices de alguna representación de  $SU(2)$ . En particular, como veremos en breve, las partículas de espín 1/2 son vectores de la representación fundamental y se transforman como las componentes de vectores de la representación fundamental. En el modelo de quarks, los quarks son vectores de la representación fundamental de  $SU(3)$  y los hadrones lo son de otras representaciones de mayores dimensionalidades. En este caso, las transformaciones no son transformaciones de los puntos del espacio-tiempo, como en las rotaciones, sino transformaciones de los campos de la teoría (simetría interna).

Es fácil comprender que, a partir de dadas representaciones siempre puede formarse otra de dimensión superior. Por ejemplo, si un elemento del grupo está respresentado por  $M$  en una representación y por  $M'$  en otra, basta combinar ambas matrices como bloques de una tercera, para que esta última, de dimensión mayor, también represente al mismo elemento del grupo. Pero interesa determinar las llamadas **representaciones irreducibles**, que son aquéllas formadas por matrices que no se pueden llevar a la forma diagonal en bloques. Por ejemplo, la matriz que sigue es diagonal en bloques (un bloque

de  $2 \times 2$ , otro de  $1 \times 1$  y finalmente, uno de  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La importancia de las simetrías quedó claramente establecida a partir de 1917, cuando Emmy Noether (1882-1935) (se sugiere leer su biografía, por ejemplo, en [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)) demostró su famoso teorema, que puede resumirse como sigue: “Toda vez que existe una simetría continua existe, en la teoría clásica, una cantidad conservada (independiente del tiempo)”. Como ejemplos de aplicación de este teorema, podemos mencionar que la conservación de energía es debida a la invariancia de las leyes físicas con respecto a traslaciones temporales, la conservación de la cantidad de movimiento es debida a la invariancia de esas mismas leyes frente a traslaciones espaciales y la conservación de momento angular es debida a la invariancia frente a rotaciones en el espacio. La conservación de la carga eléctrica es debida a la invariancia de la Electrodinámica frente a transformaciones del grupo  $U(1)$ , que dan origen a la llamada simetría de gauge.

Hay una diferencia entre las tres primeras simetrías y esta última: la invariancia de gauge de la Electrodinámica no está asociada con una simetría del espacio-tiempo. Así, en Física Subatómica, pueden distinguirse dos tipos de simetrías: **simetrías espacio-temporales** y **simetrías internas**. Las teorías cuánticas de campos del Modelo Estándar se basan, como la Electrodinámica, sobre simetrías internas de gauge, caracterizadas por otros grupos de simetría que, a diferencia de  $U(1)$ , son no abelianos. Veremos esto con más detalle en la Parte V de estos apuntes.

Otros ejemplos de simetrías internas (pero no entendidas como simetrías de gauge) son, por ejemplo, el grupo  $SU(3)$  de sabor del modelo de quarks en su formulación original y la simetría de isospín nuclear, que discutiremos en la Parte IV de estos apuntes.

## III.2. Rupturas de simetría

Las simetrías son tan valiosas, que aun las simetrías no exactas o rotas son útiles. Las simetrías pueden estar rotas en dos formas:

1. Pueden existir términos explícitos en el lagrangiano de la teoría, que no respetan la simetría y conducen a ecuaciones de movimiento no invariantes. Esos términos pueden aparecer en el lagrangiano clásico, como correcciones a la parte del mismo que sí es invariante, cuando estudiamos una simetría clásica que es sólo aproximada. También puede ocurrir que tales términos aparezcan como consecuencia de la

cuantización de la teoría que, clásicamente es invariante. En ese caso se los conoce como anomalías cuánticas. A este tipo de ruptura se la llama ruptura explícita.

2. Puede ocurrir que el lagrangiano y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento sean invariantes frente a una dada transformación, pero el estado de menor energía de la teoría (conocido como estado fundamental) no sea simétrico. Más explícitamente, este tipo de ruptura ocurre cuando, al variar algún parámetro, la solución de las ecuaciones de movimiento que es invariante frente a la simetría en cuestión deja de ser energéticamente favorable y, en cambio, empiezan a serlo otras que no permanecen invariantes al aplicarles la transformación, sino que se transforman unas en otras por la acción de la misma. Este tipo de ruptura se llama ruptura espontánea (o a la manera de Nambu-Goldstone). Aun cuando una cualquiera de estas soluciones es asimétrica, si se considera el conjunto de todas las soluciones asimétricas, la simetría está presente, porque la transformación lleva de unas a otras de estas soluciones. Por eso, en este caso, suele hablarse simetría oculta, o de simetría realizada a la manera de Nambu-Goldstone más que de simetría rota. Cuando el estado fundamental es simétrico, en cambio, se dice que la simetría está realizada a la manera de Wigner-Weyl.

Un primer ejemplo de simetría explícitamente rota es la que aparece en  $SU(3)$  de sabor o, equivalentemente, en la el modelo de la óctuple senda para los hadrones: Si la simetría fuese exacta, todos los hadrones que integran un mismo multiplete deberían tener la misma masa. Sin embargo, es un hecho experimental que esto no ocurre; aun cuando sus masas están más proximas entre sí que las masas de hadrones en diferentes multipletes, las primeras no son exactamente iguales. La diferencia de masas entre hadrones que integran un mismo multiplete puede atribuirse a la existencia de una ruptura explícita, debida a correcciones electromagnéticas, de la simetría  $SU(3)$  de sabor.

En cuanto al segundo tipo de ruptura, sólo diremos, por el momento, que una ruptura espontánea de simetría da origen a la aparición de bosones sin masa: los llamados bosones de Goldstone. En presencia de una invariancia de gauge, permite dar masas a las partículas en la teoría de las interacciones electrodébiles por medio del mecanismo de Higgs, como veremos en la Parte V de estos apuntes.

### III.3. Momento angular orbital y espín en Mecánica Cuántica no relativista

El momento angular, en tres dimensiones, puede escribirse como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

En Mecánica clásica, sus tres componentes pueden medirse simultáneamente y pueden tomar cualquier valor real. En Mecánica cuántica, en cambio, se transforma en un operador. Por ejemplo, su componente  $z$  está dada por

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (16)$$

Las restantes son similares y pueden obtenerse permutando cíclicamente las variables en la expresión anterior ( $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  y  $z \rightarrow x$ , es decir,

$$L_x = yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (17)$$

$$L_y = zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (18)$$

Es fácil verificar que dos cualesquiera de estas componentes no conmutan entre sí, sino que satisfacen, por ejemplo,

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

y permutaciones cíclicas. El conjunto de relaciones de conmutación puede sintetizarse en:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar L_k. \quad (19)$$

Los símbolos  $\epsilon_{ijk}$  se conocen como las componentes del tensor de Levi Civita. Toman el valor 0 si dos de los subíndices coinciden, 1 si  $i = 1$ ,  $j = 2$  y  $k = 3$  o cualquier permutación cíclica y  $-1$  para las restantes permutaciones.

Dado que las componentes diferentes del momento angular no conmutan, no pueden medirse simultáneamente y, por lo tanto, sólo pueden usarse para caracterizar el estado cuántico los autovalores de una de ellas. Por convención, se elige caracterizar al estado mediante los autovalores de  $L_z$ .

Existe un operador que conmuta con todas las componentes de  $\vec{L}$ : se lo llama operador de Casimir y está dado por  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ . En conclusión, al realizar una medida podrán determinarse simultáneamente el autovalor de una componente del momento angular, por ejemplo, el autovalor de  $L_z$ , que llamaremos  $m$ , y el autovalor de  $L^2$ , que llamaremos  $\lambda$ .

Así, cada estado queda caracterizado por dos números cuánticos:  $\lambda$  y  $m$  y lo escribiremos  $|\lambda; m\rangle$ . Además, puede mostrarse que  $m$  puede ser entero o semientero y puede variar desde  $-l$  hasta  $l$ , como sigue:

Si se definen los llamados operadores escalera

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y,$$

se demuestra fácilmente (ver trabajo práctico número III) que  $[L^2, L_+] = 0 = [L^2, L_-]$ ,  $[L_z, L_+] = +\hbar L_+$  y  $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$ . Como consecuencia, se tiene (de ahí el nombre escalera que reciben  $L_+$  y  $L_-$ ):

$$L_z L_+ |\lambda; m\rangle = (m + 1)\hbar L_+ |\lambda; m\rangle$$

$$L_z L_- |\lambda; m \rangle = (m - 1) \hbar L_- |\lambda; m \rangle$$

es decir: si se aplica el operador de subida sobre un autovector de  $L_z$  correspondiente al autovalor  $m$  se obtiene un autovector del mismo operador de autovalor  $m + 1$ . Si comenzamos a aplicar el operador de subida a partir de un dado valor de  $m$ , podremos hacerlo un número finito de veces, ya que  $L_z^2 = L^2 - L_x^2 - L_y^2 \leq L^2 \rightarrow m^2 \leq \lambda$  y se debe llegar a un paso en que  $L_+ |\lambda; l \rangle = 0$ . Similarmente, aplicando el operador escalera de bajada, llegaremos a un estado tal que  $L_- |\lambda; -l' \rangle = 0$ .

De las relaciones (demostradas en el trabajo práctico número 3):

$$L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

resulta que  $\lambda = \hbar^2 l(l + 1)$  y  $\lambda = \hbar^2 l'(l' + 1)$ , por lo que se tiene  $l = l'$  y el número total de valores de  $m$  posibles es  $2l + 1$ . Resumiendo: los autovalores de  $L^2$  tienen la forma  $2l + 1$  y, para cada  $l$  dado, la proyección  $L_z$  toma  $2l + 1$  valores, desde  $-l$  hasta  $l$ , como se muestra en la figura 25. Obsérvese que  $2l + 1$  debe ser un número natural, de modo que  $l$  puede, en principio, ser entero o semientero. Este es un tipo de cuantización enteramente nuevo: sólo algunas orientaciones del impulso angular están permitidas; se trata, por lo tanto, de un caso de cuantización espacial.

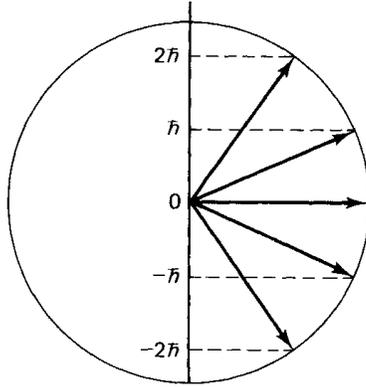


Figura 25: Posibles orientaciones del vector momento angular para  $l = 2$

Si el Hamiltoniano del sistema es central (sólo depende de la distancia y no de los ángulos), todos los estados correspondientes a un dado valor de  $l$  tendrán la misma energía, aunque correspondan a distintos valores de  $m$  (o sea, a distintas proyecciones del impulso angular en dirección  $z$ ). Se dirá, en ese caso, que todos ellos forman un multiplete o que son estados degenerados en energía. Todos los estados del multiplete corresponderán a una misma energía, dado que el Hamiltoniano sólo distingue entre distintos valores de  $l$  y no entre valores de  $m$ . En el caso de potenciales centrales basta, entonces, el número cuántico  $l$  para caracterizar los estados propios del sistema y suele llamarse a los estados con la siguiente nomenclatura:  $s(l = 0)$ ,  $p(l = 1)$ ,  $d(l = 2)$ ,  $f(l = 3)$ ,  $g(l = 4)$ .

En el caso del momento angular orbital, los valores de  $m$  permitidos resultan ser sólo los enteros (los semienteros no son admisibles si se impone que las funciones de onda sean univaluadas) y, por lo tanto, también los  $l$ 's deben ser enteros, como veremos a continuación. Más adelante encontraremos, al estudiar el espín, que esta restricción no existe en ese caso.

Tomemos coordenadas cilíndricas, escribiendo

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad .$$

En estas coordenadas,  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$  y, dado que la función de onda debe ser periódica, con período  $2\pi$ , los valores admisibles de  $L_z$  resultan discretos. En efecto, la ecuación que satisfacen los autovectores es:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \varphi(\rho, \phi, z) = m \varphi(\rho, \phi, z). \quad (20)$$

Debido a la independencia de la ecuación de  $\rho$  y  $z$ , las autofunciones sólo dependen de  $\phi$ , y tienen la forma

$$\varphi(\phi) = A e^{im\phi}.$$

La constante  $A$  puede determinarse por normalización. Pero lo importante es que los valores de  $m$  admisibles, dado que las autofunciones deben ser univaluadas,  $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ , son  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Hasta aquí, hemos representado el momento angular como un operador diferencial, que actúa sobre la función de onda, derivándola y multiplicándola. Pero también existen representaciones del operador momento angular en términos de matrices: son las representaciones matriciales del grupo  $SU(2)$ .

En Física Subatómica son particularmente importantes los llamados grupos de Lie: se trata de grupos "suaves", tales que todos sus elementos pueden construirse componiendo elementos próximos a la identidad. En estas condiciones, si buscamos representaciones del grupo, bastará con encontrar matrices que representen a los elementos del grupo próximos a la identidad. La representación de un elemento cualquiera de un grupo de Lie se obtendrá por exponenciación de matrices próximas a la identidad, que representen, a su vez, a los elementos del grupo próximos a  $I$ . Así, para un elemento  $A$  arbitrario del grupo, la matriz  $D(A)$  que lo representa estará dada por

$$D(A) = e^{-i \sum_a t_a T_a},$$

donde  $T_a$  son las matrices que representan una base para los elementos cercanos a la identidad y los  $t_a$  son parámetros reales. Estas últimas matrices tienen una estructura llamada álgebra de Lie con la operación de conmutación. Para que  $D(A)$  sea unitaria, las matrices  $T$  deben ser autoadjuntas. Además, si  $D(A)$  debe ser unimodular, las matrices  $T$  deben tener traza nula.

Como ya hemos dicho, el estudio del momento angular orbital y el del espín está basado en la búsqueda de las representaciones irreducibles del álgebra de Lie del grupo de

simetría asociado. Se trata de las representaciones del álgebra de  $SU(2)$ , que resultan ser las mismas que las del álgebra de  $SO(3)$  (grupo de rotaciones en tres dimensiones).

De la construcción de las representaciones para el momento angular intrínseco, o espín, que es idéntica a la que realizamos para el momento angular orbital, también resulta que las representaciones irreducibles pueden caracterizarse por los autovalores de  $\vec{S}^2$ , que tienen la forma  $s(s+1)$  y los autovalores de  $S_z$ , que anotaremos  $m_s$ . Para un dado valor de  $s$ , los valores de  $m_s$  pueden variar entre  $-s$  y  $s$ , de a uno, de modo que, para cada  $s$ , el correspondiente multiplete tiene  $2s+1$  componentes pero, a diferencia de lo que ocurría con el impulso angular orbital, aquí los valores de  $s$  pueden ser tanto enteros como semienteros, porque la parte de espín de la función de onda no tiene dependencia con las coordenadas y, en particular, no depende del ángulo.

Ejemplo: partícula cuántica no relativista de espín  $1/2$ . La representación caracterizada por  $s = 1/2$  admite valores del autovalor de  $S_z$  dados por  $m_s = -1/2, 1/2$ . Se trata de una representación de dimensión 2 (la representación fundamental de  $SU(2)$ ), en la cual las tres componentes del espín pueden representarse por las matrices:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Las tres matrices de  $2 \times 2$  que aparecen en la representación fundamental de las tres componentes del espín se conocen como matrices de Pauli y se anotan, respectivamente  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Las partículas cuyas funciones de onda se transforman frente a rotaciones como vectores de esta representación se llaman **espinores de Pauli** o espinores no relativistas de espín  $1/2$ . Dichas funciones de onda se escriben como combinaciones lineales de los dos espinores base:

$$|s = 1/2; m_s = 1/2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s = 1/2; m_s = -1/2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, para un espinor de Pauli general se tiene:

$$\psi(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta(\vec{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las funciones de onda pueden normalizarse imponiendo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Luego de eso,  $|\alpha|^2$  representará la probabilidad de encontrar al espinor con espín  $+1/2$ . Del mismo modo,  $|\beta|^2$  será la probabilidad de encontrarlo con proyección de espín  $-1/2$  a lo largo del eje  $z$ .

Los vectores de la representación trivial se denominan singuletes de  $SU(2)$  y son invariantes frente a la acción del grupo. Los vectores de espín 1 son vectores de 3 componentes, que se transforman con matrices de la representación  $s = 1$ , de  $3 \times 3$  ya que, aquí,  $2s+1 = 3$ . Similarmente, los vectores de la representación  $s = 3/2$  (partículas cuánticas no relativistas de espín  $3/2$ ), son vectores de 4 componentes y las matrices de esta representación son matrices de  $4 \times 4$ .

El momento angular total de un espinor estará dado por la suma de su momento angular orbital más su momento angular de espín:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

El espín es un ejemplo importante de cómo se construyen representaciones irreducibles para las transformaciones del álgebra de un grupo de Lie. Aquí, se trata del álgebra de  $SU(2)$ , que es el grupo unitario asociado con la simetría de rotación en el espacio de tres dimensiones. En la siguiente Parte de los apuntes veremos cómo la construcción que acabamos de realizar se repite, exactamente, para explicar, en Física Nuclear, la similitud entre protón y neutrón, postulando que se trata de dos componentes de un mismo múltiplete de la representación fundamental del llamado grupo  $SU(2)$  de isospín, entre las cuales las interacciones fuertes no distinguen. La principal diferencia entre espín e isospín es que el último no está asociado con una simetría del tiempo ni del espacio (como las rotaciones espaciales, en el caso del espín) sino que se interpreta como una simetría interna. Cuando estudiemos las teorías de las interacciones fundamentales, en la parte V, veremos que las simetrías internas, en general basadas en grupos distintos de  $SU(2)$  y entendidas como simetrías locales o de gauge constituyen la base de todas esas teorías.



**Parte IV**  
**Física nuclear**



Las referencias [12, 13] son muy útiles para el estudio de los temas de esta sección.

## IV.1. Fenomenología de los núcleos

Como ya hemos visto, el experimento de Rutheford mostró que cada átomo posee una región central, con carga eléctrica positiva igual a la de los electrones circundantes y donde reside casi de la mel total de la masa del átomo. También explicamos que la necesidad de asegurar la consistencia entre la carga y la masa medidas en núcleos distintos del núcleo de hidrógeno y, sobre todo, en los núcleos más pesados, condujo a admitir, dentro del núcleo, no sólo la existencia de protones, sino también de neutrones. Ambos tipos de partículas se conocen como nucleones. Mientras cada protón tiene una carga positiva igual, en valor absoluto, a la carga del electrón  $e$ , los neutrones son, como su nombre lo indica, partículas neutras. Las masas de ambos nucleones son muy similares, aunque el neutrón es levemente más pesado:  $m_p c^2 = 938,27231(28) MeV$  y  $m_n c^2 = 939,56563(28) MeV$ . El tamaño de los núcleos es extremadamente pequeño: del orden de  $1 fm$ , o sea,  $10^5$  veces menor que el tamaño típico de los átomos.

En virtud de los hechos que acabamos de recordar, cada núcleo puede caracterizarse en forma unívoca por su carga eléctrica y su masa. Dar su carga eléctrica es equivalente a dar el número de protones que lo integran. A este número entero se lo conoce como número atómico y se lo anota  $Z$ . En cuanto a la masa del núcleo, la misma queda determinada si se da, además, el número total de nucleones, llamado número másico o de masa y anotado con  $A$ . Notar que, equivalentemente, puede darse, en lugar de  $A$ , el número de neutrones, llamado número neutrónico, y anotado  $N$ . Por ejemplo, un átomo que se anota  ${}^A X^Z$  (o, a veces,  ${}^A_Z X$ ) representa el núcleo del elemento  $X$ , con número atómico  $Z$  y número másico  $A$ , es decir, un núcleo formado por  $Z$  protones y  $A - Z$  neutrones.

Así, en primera aproximación y en el marco de la mecánica no relativista, diríamos que

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n .$$

En realidad, los valores medidos para las masas nucleares indican que la masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de sus constituyentes. En lugar de la igualdad anterior vale, entonces, la desigualdad:

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n .$$

Esto explica por qué un núcleo aislado no puede simplemente partirse en sus nucleones constituyentes: tal proceso violaría la conservación de la energía. El déficit de masa se define como la cantidad negativa

$$\Delta M = M(A, Z) - (Zm_p + (A - Z)m_n) < 0$$

y se lo asocia con una energía de ligadura negativa, cuyo valor absoluto,  $B_{A,Z}$ , se define como sigue:

$$B_{A,Z} = -\Delta M c^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n)c^2 - M(A, Z)c^2 > 0 .$$

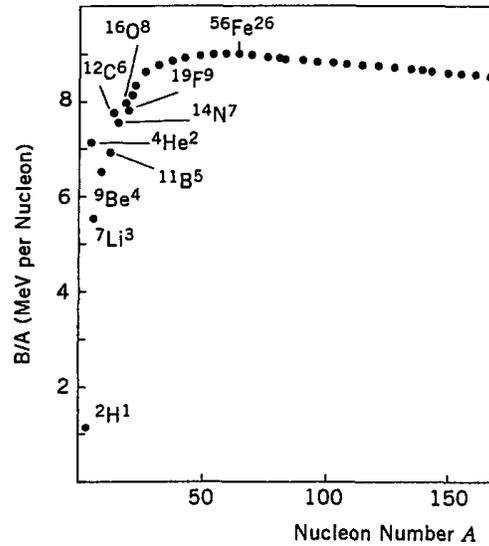


Figura 26: Dependencia con  $A$  de la energía de ligadura por nucleón

Cuanto mayor sea  $B$ , más negativa será la energía de ligadura y, por lo tanto, el núcleo será más estable.

También resulta útil definir el valor absoluto de la energía de ligadura por nucleón, que es la energía promedio necesaria para liberar un nucleón del núcleo:

$$\frac{B_{A,Z}}{A} = -\frac{\Delta M}{A} = \frac{(Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z))c^2}{A} > 0. \quad (22)$$

Esta última cantidad ha sido medida para una gran número de núcleos estables y, aparte de ciertos detalles finos, que discutiremos más adelante, se ha encontrado que

1. Para núcleos no muy masivos ( $A \leq 20$ ),  $\frac{B}{A}$  oscila un poco, y crece rápidamente con  $A$ , para saturar después en unos  $9\text{MeV}$  por nucleón alrededor de  $A = 60$ ; para valores mayores de  $A$  la energía de ligadura por nucleón decae muy lentamente. Por lo tanto, para un gran rango de núcleos, puede aceptarse un valor promedio de  $\frac{B}{A} \sim 8\text{MeV}$  por nucleón (ver figura 26).

Esto indica que, si pudiéramos darle, a un nucleón que está dentro del núcleo, una energía aproximada de  $8\text{MeV}$  podríamos, en principio, extraerlo del núcleo que integra. Teniendo en cuenta el principio de incerteza, podemos estimar la longitud de onda de tal nucleón, considerado como una partícula no relativista (dado que el nucleón es muy masivo, esta no es una mala aproximación). Así, considerando

$\lambda \sim 2\pi R$  y  $\frac{p^2}{2m} = \frac{B}{A}$ , junto con el principio de incerteza, resulta:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \hbar \sqrt{\frac{A}{2mB}}.$$

Usando  $\frac{B}{A} \simeq 8MeV$  se obtiene, para  $\frac{\lambda}{2\pi}$  un valor de  $1,6 fm$ . Entonces, la longitud de onda del nucleón es compatible con su existencia dentro del núcleo. Dicho de otro modo: es razonable pensar que partículas con esa longitud de onda existan en el núcleo. Un análisis similar sugiere que no puede haber electrones dentro del núcleo. En primer lugar, si estuvieran dentro del núcleo, debido a su masa mucho menor que la de los nucleones, una energía del orden de  $8GeV$  obligaría a tratarlos como relativistas, de modo que, con  $p = \frac{B}{cA}$ , se tendría,

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{B}.$$

Esta cuenta da por resultado un radio típico del orden de  $2,5 \times 10^{-14}m$ . En estas condiciones, sería poco natural pensar que el electrón pueda encontrarse dentro del núcleo (de dimensión típica  $1fm$ ). Para que pudiera estar confinado dentro de un radio del orden de  $1fm$ , la energía de ligadura de un electrón debería ser del orden de  $120MeV$ , muy por encima de la energía de ligadura típica de los núcleos. Este argumento es muy cualitativo, pero las observaciones nucleares más directas demuestran que, en efecto, no hay electrones dentro de los núcleos atómicos.

2. Otro hecho fenomenológico notable es el siguiente: si se considera a los núcleos como esféricos, el radio  $R_A$  de todos los núcleos resulta proporcional a la potencia  $1/3$  del número másico:

$$R_A = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 \sim 1,2 fm.$$

Eso significa que si, además, se los considera homogéneos, el núcleo resulta tener una gran densidad,  $\rho = \frac{3m_p A}{4\pi R_0^3 A} \sim 10^{14} \frac{g}{cm^3}$ , independiente del número másico.

## IV.2. Modelos para la estructura nuclear

Para estudiar esta sección, se aconseja recurrir a las referencias [12, 13, 14].

Aparte de determinar las propiedades de los núcleos de modo fenomenológico, los experimentos de dispersión proveen otra información sobre el carácter de las fuerzas nucleares. En primer lugar, es que la fuerza nuclear no puede ser de origen electromagnético dado que, por ejemplo, el núcleo del deuterón tiene sólo un protón y un neutrón, y este último, por ser neutro, no participa de las interacciones electromagnéticas. Contrariamente, la fuerza electromagnética entre protones, que es siempre repulsiva, tiende a desestabilizar los núcleos. La fuerza débil es, como la gravitatoria, demasiado pequeña para

contrarrestar esa repulsión. A partir de estos razonamientos, Yukawa postuló la existencia de un nuevo tipo de fuerza, que llamó fuerte, pero nosotros hemos llamado fuerza nuclear, para recordar que no se trata más que de una fuerza efectiva remanente a energías bajas, proveniente de la verdadera fuerza fuerte entre los quarks que constituyen los nucleones.

Sabemos que la fuerza nuclear tiene que tener un alcance extremadamente corto, no mucho mayor que el tamaño típico de un núcleo porque, de otro modo, afectaría el excelente acuerdo entre la teoría y el experimento en Física Atómica. Esto sugirió a Yukawa la introducción del potencial que lleva su nombre y que ya hemos estudiado (ver trabajo práctico II). Sin embargo, tampoco este potencial es capaz de describir todas las características de la fuerza nuclear reveladas por los experimentos.

En general, para mantener a los nucleones ligados dentro del núcleo, la fuerza nuclear debe ser atractiva. Sin embargo, en experimentos de dispersión de partículas con energías altas contra núcleos, se encontró que la fuerza nuclear es repulsiva a muy cortas distancias y sólo a distancias algo mayores se hace atractiva. Conceptualmente, este resultado es muy importante porque, si la fuerza fuese siempre atractiva, el núcleo colapsaría. Sin embargo, para energías no demasiado altas, puede ignorarse el efecto de la repulsión y considerar sólo un pozo de potencial, como veremos en los modelos efectivos que estudiaremos más adelante.

Queda claro, entonces, que una descripción de primeros principios para la fuerza nuclear, que reproduzca todas las características de la misma mostradas por el experimento, sería extremadamente complicada. Por eso, para describir la fuerza nuclear se ha recurrido, históricamente, a modelos efectivos de distintos tipos, cada uno de los cuales describe bastante bien ciertos aspectos de la fenomenología de los núcleos, pero no otros.

### IV.2.1. Independencia de carga e isospín nuclear

Se conoce como núcleos espejo a aquellos núcleos que tienen el mismo número másico, pero sus números de protones y neutrones intercambiados, es decir,  ${}^A X^Z$  y  ${}^A Y^{A-Z}$  son núcleos espejo. Una vez realizadas las correcciones que tienen en cuenta las diferencias debidas a las interacciones electromagnéticas (que son distintas para ambos núcleos y que son correcciones pequeñas), resulta que la fuerza entre dos protones coincide con la fuerza entre dos neutrones y también con la fuerza entre un protón y un neutrón. A esta propiedad de la fuerza nuclear se la conoce como **independencia de carga**. Para explicarla, Heisenberg propuso la existencia de la simetría interna conocida como simetría de isospín nuclear.

En este contexto, el protón y el neutrón no son otra cosa que dos estados diferentes de una misma partícula, el nucleón. La diferencia entre estos dos estados radica en el valor que toma la tercera componente del vector  $\vec{I}$ . A diferencia del vector de espín,  $\vec{I}$  no es un vector en el espacio de coordenadas, sino en un espacio abstracto o interno. El nucleón se transforma, frente a rotaciones en este espacio de isospín, como vector de la representación fundamental de  $SU(2)$ , que corresponde a  $\vec{I}^2|N\rangle = i(i+1)|N\rangle$ , con  $i = 1/2$ . (Notar la analogía con el número cuántico  $s$ , que caracteriza a las representaciones irreducibles del álgebra de  $SU(2)$  para el espín). Por otra parte, se identifica al protón

con el vector de esta representación caracterizado por proyección en dirección  $z$  igual a  $m_i = +\frac{1}{2}$ ,  $|p\rangle = |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$ , es decir,  $I_z|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$  (estado de isospín up) y al neutrón, con el estado de isospín down ( $m_i = -\frac{1}{2}$ ),  $|n\rangle = |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle$ , que satisface  $I_z|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$ . Si se elige representar la componente  $z$  del vector de isospín mediante la matriz de Pauli  $\sigma_3$ , se tendrá

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y un nucleón general podrá escribirse como combinación lineal de ambos, es decir,

$$N = \begin{pmatrix} \alpha(\vec{r}) \\ \beta(\vec{r}) \end{pmatrix}, \text{ con } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Los restantes hadrones pueden, en este mismo modelo, identificarse con multipletes de otras dimensiones del grupo  $SU(2)$ . Por ejemplo, los piones  $\pi^-, \pi^0, \pi^+$  constituyen el triplete de la representación  $i = 1$ , que es una representación de dimensión 2,

$$\pi^- = |1; -1\rangle, \quad \pi^0 = |1; 0\rangle, \quad \pi^+ = |1; 1\rangle,$$

y la partícula  $\Lambda = |0; 0\rangle$  es un singulete (se transforma con la representación trivial,  $i = 0$ ).

Por supuesto, esta simetría no es exacta. Sólo lo es si tenemos en cuenta exclusivamente la interacción nuclear. Si fuera exacta, las partículas en cada multiplete deberían tener exactamente la misma masa. Sabemos que este no es el caso. Por ejemplo, aunque el protón y el neutrón tienen masas muy próximas, las mismas no son exactamente iguales, debido a que esta invariancia de la fuerza nuclear se rompe explícitamente al tener en cuenta otras interacciones, en particular, la interacción electromagnética, que distingue entre ambos miembros del multiplete. En efecto, es un hecho fenomenológico que, en un modelo con tres quarks ( $SU(3)$  de sabor) se cumple la relación (conocida como fórmula de Gell-Mann, Nakano y Nishijima)

$$Q = I_z + \frac{B + S}{2},$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica,  $S$  es la extrañeza (nula tanto para el protón como para el neutrón) y  $B$  (igual a 1 para ambos) es el número bariónico. De esta fórmula, igualmente válida en el modelo de quarks cuando sólo se consideran dos sabores ( $u$  y  $d$ ) muestra que cualquier término que represente interacción electromagnética y, por lo tanto, contenga la carga eléctrica en su expresión valdrá distinto para el protón y el neutrón, al distinguir entre distintos valores de  $I_z$ . La simetría de isospín estará, entonces, rota explícitamente (a la manera de Wigner-Weyl) por los términos de interacción electromagnética. Por supuesto, el orden de magnitud de tales términos será mucho menor que el correspondiente a los efectos nucleares.

Finalmente, señalemos que, al agregar otros tipos de quarks (charm, top y bottom) al modelo estándar esta fórmula se corrige, transformándose en

$$Q = I_z + \frac{B + S + C + B' + T}{2},$$

donde  $C$ ,  $B'$  y  $T$  son los nuevos números cuánticos que caracterizan a dichos quarks.

## IV.2.2. Modelos efectivos

### Modelo de la gota líquida

Se trata de un modelo puramente fenomenológico, cuyos parámetros libres pueden ajustarse con las medidas experimentales. Aunque no es cuántico ni relativista, permite reproducir los aspectos más notables de la fenomenología nuclear que hemos detallado en la sección IV.1. El modelo trata al núcleo como un todo, ignorando las propiedades individuales de los nucleones, que se piensan como “moléculas” que forman una gota macroscópica e intenta dar una expresión para la energía de ligadura.

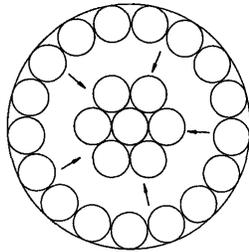


Figura 27: Modelo de la gota líquida

Recordemos que

$$M(A, Z)c^2 = (Z m_p + N m_n) c^2 - B_{A,Z}.$$

Como en una gota, se supone que el núcleo tiene una zona central, donde los nucleones están fuertemente ligados y otra superficial, menos estable, ya que los nucleones de superficie no tienen vecinos en el exterior (ver figura 27). Para reproducir estos hechos cualitativos en primera aproximación, y recordando que  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ , se escribe el valor absoluto de la energía de ligadura como suma de un término de volumen más uno, desestabilizante, de superficie y un tercer término, que tiene en cuenta la repulsión coulombiana (también desestabilizante) entre protones:

$$B_{A,Z} = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}.$$

Estos tres términos no bastan, sin embargo, para reproducir otros hechos experimentales: los núcleos livianos con  $N = Z$  son más estables que el resto. Además, los núcleos

par-par son más estables y los impar-impar son muy escasos. Para tener en cuenta todos estos hechos, se agregan dos términos más a la expresión fenomenológica del valor absoluto de la energía de ligadura, que ahora se escribe:

$$B_{A,Z} = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \mp a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

donde el último término se toma con signo positivo para los núcleos par-par (más estables) y signo negativo para los impar-impar (más inestables). Para los restantes núcleos,  $a_5$  se toma igual a cero.

Los cinco coeficientes se determinan ajustando las masas de algunos núcleos, ya que

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p - \frac{a_1}{c^2} A + \frac{a_2}{c^2} A^{\frac{2}{3}} + \frac{a_3}{c^2} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2} A^{-\frac{3}{4}}.$$

Esta última expresión se conoce como fórmula semiempírica de masa de Bethe-Weizsäcker. Del ajuste de la misma resultan:  $a_1 \sim 15,6 \text{ MeV}$ ,  $a_2 \sim 16,8 \text{ MeV}$ ,  $a_3 \sim 0,72 \text{ MeV}$ ,  $a_4 = 23,3 \text{ MeV}$  y  $a_5 = 34 \text{ MeV}$ .

Utilizándola, por ejemplo, para núcleos par-impar, se predice que los núcleos más estables son aquéllos que tienen menos protones que neutrones. (ver ejercicio 1. del trabajo práctico 3).

Pero, una vez ajustados los parámetros con algunos núcleos, las masas medidas para todos los restantes deberían ajustarse de modo adecuado, cosa que no sucede. Ese desacuerdo se atribuye a efectos cuánticos, que no han sido tenidos en cuenta hasta aquí.

### Modelo del gas de Fermi

El modelo del gas de Fermi fue uno de los primeros intentos de realizar una descripción de la estructura nuclear en el marco de la Mecánica Cuántica (no relativista). En general, si se estudia la ecuación de Schrödinger para un nucleón, en presencia de cierto potencial, los niveles de energía accesibles al nucleón serán discretos, en forma similar al modo en que los electrones pueden ocupar ciertos niveles discretos de energía, debido a la existencia del potencial central coulombiano. La gran diferencia entre ambos casos es que, para electrones ligados en el interior de átomos sabemos cuál es la forma del potencial electromagnético. La forma exacta del potencial nuclear no se conoce. En realidad, deberíamos ser capaces de hacer un cálculo autoconsistente, en un potencial creado por los propios nucleones. Pero obsérvese que tal potencial, para núcleos formados por tres o más nucleones, no sería simplemente un potencial de interacción entre dos partículas, como el coulombiano o el gravitatorio, sino uno extremadamente complicado.

En el modelo del gas de Fermi, se describe al núcleo como un gas de nucleones **no relativistas**, confinados en una pequeña región del espacio: el volumen nuclear. El potencial considerado es el de un pozo infinito. Las condiciones de anulación (condiciones de contorno de Dirichlet) que deben satisfacer las funciones de onda en el borde del pozo harán que los niveles de energía accesibles a los neutrones sean niveles discretos.

Ahora bien: como los nucleones son fermiones (partículas de espín 1/2, en cada estado discreto de energía podrán coexistir, a lo sumo, dos de ellos, con proyecciones opuestas de espín. Así, se irán llenando los estados accesibles hasta agotar el número total de nucleones que integran el núcleo. El último estado lleno se conoce como nivel de energía de Fermi ( $E_F$ ). El correspondiente impulso se llama impulso de Fermi, y viene dado por  $p_F^2 = 2mE_F$ , donde  $m$  es la masa del nucleón. El siguiente nivel puede estar completamente vacío o semilleno.

Tomaremos un potencial infinito de lado  $L$  y resolveremos la ecuación en coordenadas cartesianas, exigiendo que la función de onda se anule en  $x = 0$  y  $x = L$  y las mismas condiciones en las direcciones  $y$  y  $z$ . Tendremos, entonces, que resolver:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{-\hbar^2 \Delta \varphi(x, y, z)}{2m} = E \varphi(x, y, z),$$

con las condiciones  $\varphi(0, y, z) = \varphi(L, y, z) = 0$ ,  $\varphi(x, 0, z) = \varphi(x, L, z) = 0$  y  $\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, L) = 0$ .

Todavía más simple es imponer condiciones periódicas:  $\varphi(0, y, z) = \varphi(L, y, z)$ ,  $\varphi(x, 0, z) = \varphi(x, L, z)$  y  $\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, L)$  y las predicciones del modelo no cambian de manera sustancial al hacerlo. La solución general de esta ecuación puede encontrarse proponiendo que la función de onda se escribe como superposición de funciones que son producto de una función que depende sólo de  $x$ , por otra que sólo depende de  $y$ , por una tercera que sólo depende de  $z$  (separación de variables). Reemplazando tal propuesta en la ecuación diferencial resulta que

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} A_{n_1 n_2 n_3} \exp \frac{ip_x x}{L} \exp \frac{ip_y y}{L} \exp \frac{ip_z z}{L},$$

donde  $p_x = \frac{2n_1 \pi x}{L}$ ,  $p_y = \frac{2n_2 \pi x}{L}$  y  $p_z = \frac{2n_3 \pi x}{L}$ , con  $n_1, n_2, n_3 = -\infty, \dots, \infty$ .

Tomando la aproximación de gran volumen, es posible encontrar una relación entre el impulso de Fermi de, por ejemplo, los protones y la densidad de protones en el núcleo. En dicho límite, los impulsos accesibles tienden al continuo, las sumas sobre impulsos se transforman en integrales y el número de estados entre  $\vec{p}$  y  $\vec{p} + \vec{d}p$  es  $\frac{2L^3}{(2\hbar\pi)^3}$  (el factor 2 es debido a las dos proyecciones de espín), de modo que el número total de estados, igual al número total de protones, debe ser tal que  $Z = \int_0^{p_F} d^3p \frac{2V}{(2\hbar\pi)^3}$ . Por lo tanto, se tiene:

$$\rho_P = \frac{Z}{V} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (23)$$

donde  $V$  es el volumen nuclear. Invertiendo esa expresión, se tiene  $p_F = (3\pi^2 \hbar^3 \rho_P)^{\frac{1}{3}}$  para protones y una expresión equivalente para los neutrones.

La energía de ligadura total del núcleo en su estado fundamental será la suma de las energías de todos sus protones y neutrones, tomadas hasta los respectivos niveles de Fermi:

$$E_{A,Z} = \frac{4\pi V}{(2\pi \hbar)^3} \int_0^{(3\pi^2 \rho_P)^{\frac{1}{3}} \hbar} \frac{p^4}{2m} dp + \frac{4\pi V}{(2\pi \hbar)^3} \int_0^{(3\pi^2 \rho_n)^{\frac{1}{3}} \hbar} \frac{p^4}{2m} dp$$

o bien, en términos de  $Z$  y  $A$ :

$$E_{A,Z} = A \frac{3}{5} \left( \left( \frac{Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left( \frac{A-Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right) E_F.$$

Es fácil verificar (buscando el valor de  $Z$  para el cual se anula la derivada) que esta expresión tiene un mínimo para  $Z = \frac{A}{2}$ . De manera notable, pese a todas las aproximaciones, el modelo del gas de Fermi muestra que los núcleos son más estables cuando tienen igual número de protones y de neutrones y justifica, entonces, la aparición del término proporcional a  $a_4$  en la fórmula de Bethe-Weiszäcker. En el caso  $Z = N = \frac{A}{2}$ ,

$$E_{A,\frac{A}{2}} = A \frac{3}{5} 2^{-\frac{2}{3}} E_F,$$

y  $E_F$  puede calcularse volviendo a la ecuación (23), con  $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$  y  $Z = N = \frac{A}{2}$ . De allí resulta  $p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$  y, finalmente:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \sim 33 \text{ MeV}.$$

Obsérvese que, del último resultado, se puede estimar, para los nucleones,  $\left( \frac{v}{c} \right)^2 \sim 6 \times 10^{-2}$ . Esto explica por qué una descripción no relativista del problema se acerca bastante a la realidad.

### Modelo de capas

Una descripción algo mejor de la estructura la da el modelo de capas. El mismo permite explicar la existencia de los llamados “números mágicos” que corresponden a núcleos muy estables. Se trata de reemplazar el pozo infinito por otro tipo de potencial, con simetría esférica (central). Uno de los potenciales más sencillos utilizados es el potencial de un oscilador armónico,  $U(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ , donde  $r$  es la distancia al origen. En este caso, debemos resolver:

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) \varphi(x, y, z) = E \varphi(x, y, z).$$

Mediante separación de variables (ver problema 2. del trabajo práctico 4, este problema se reduce al de resolver la ecuación de un oscilador armónico en cada dirección. Así se tiene, para las energías admisibles,

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega \left( n + \frac{3}{2} \right),$$

con  $n = n_1 + n_2 + n_3$  y  $n_i = 0, 1, 2, \dots$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Obsérvese que las energías sólo dependen de la suma de los tres números cuánticos (uno por cada dimensión). Por lo tanto, para un valor dado de la energía, hay distintas

combinaciones de esos números y, en consecuencia, distintas funciones de onda, que conducen a un mismo autovalor. Al número de tales posibles combinaciones se lo conoce como la **degeneración**,  $g_n$ , del estado. Por ejemplo,  $n = 0$  tiene  $g_0 = 1$ . En efecto, la única posibilidad que conduce a este valor es  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ . Para  $n = 1$ , se tienen tres posibles funciones de onda, correspondientes a  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$ ,  $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 0$  o bien  $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$ . Por lo tanto, este estado tiene degeneración  $g_1 = 3$ . En forma similar,  $g_2 = 6$ . Todas estas degeneraciones se duplican al tener en cuenta las dos proyecciones posibles para el espín del nucleón.

El resultado es que, en el núcleo, aparecen capas con energías y números de ocupación determinados, como ocurre en los átomos. Si se tienen  $Z$  protones, ellos irán ocupando los niveles de energía más bajos. En el estado  $n = 0$  se ubicarán 2. En  $n = 1$ , 6. En  $n = 2$ , 12 y en  $n = 3$ , 20. Cuando alguna de las capas esté completamente ocupada (se dice que está “cerrada”), el núcleo será más estable, ya que será necesario otorgarle una cantidad finita de energía para que un nucleón se ubique en la capa siguiente. Esto conduce a una mayor estabilidad para los núcleos con  $Z = 2, 8, 20, 40$ , que se conocen como números mágicos. Es claro que un núcleo con ambos números,  $Z$  y  $N$ , correspondientes a capas cerradas será aún más estable. Tales núcleos se conocen como doblemente mágicos. Lo es, por ejemplo el núcleo de  ${}^4_2\text{He}$ , con dos protones y dos neutrones. Sin embargo, los números mágicos predichos por el modelo no coinciden con los medidos, a partir de 40. Se necesita, entonces, modificar el modelo de algún modo para explicar tales efectos.

### Acoplamiento espín-órbita

Ya en la década de 1940 estaba claro que un potencial central puro no podía justificar la totalidad de los números mágicos medidos. En 1949, María Göppert Mayer y Hans Jensen sugirieron que, en forma análoga a lo que ocurre en física atómica, el hamiltoniano que representa la dinámica de un nucleón dentro del núcleo debe existir, además de un potencial central, un término de acoplamiento espín-órbita, de modo que cada nucleón experimenta un potencial total dado por:

$$V_{Tot} = V(r) - f(r)\vec{L} \cdot \vec{S}, \quad (24)$$

donde  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  son el momento angular orbital y el de espín, respectivamente (recuérdese que el momento angular total es  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ). En física atómica, la interacción espín-órbita tiene la misma forma que (24), pero con  $f(r) = 1$ . En ambos casos, el término extra en el hamiltoniano es distinto para cada una de las dos proyecciones del impulso angular total, que corresponden a autovalores  $j = l + \frac{1}{2}$  y  $j = l - \frac{1}{2}$ . En efecto, dado que  $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$ , se tiene que  $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$ . (Obsérvese que, en las expresiones anteriores, hemos usado que  $[\vec{L}, \vec{S}] = 0$ . Por lo tanto, para un estado de una partícula caracterizado por números cuánticos  $l, s, j, m_j$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}], \end{aligned} \quad (25)$$

que toma valores  $\frac{\hbar^2 l}{2}$ , para  $j = l + \frac{1}{2}$  y  $\frac{\hbar^2(l+1)}{2}$ , para  $j = l - \frac{1}{2}$ . Así, estos dos estados que, en ausencia del acoplamiento espín-órbita serían degenerados, resultan separados en energías según

$$\Delta E_{n,l}(j = l + \frac{1}{2}) - \Delta E_{n,l}(j = l - \frac{1}{2}) = \frac{\hbar^2}{2}(l - 1) \int d^3r |\varphi_{n,l}|^2 f(r).$$

Vemos, entonces, que la separación entre niveles debida a este nuevo acoplamiento crece con el número cuántico  $l$ . El resultado es que, incluso, puede existir un cruce de niveles de energía, como muestra la figura 28. (En dicha figura, la notación es  $nLj$ ).

Este modelo, que no posee simetría esférica, permite explicar adecuadamente los momentos dipolares de los núcleos y, además, reproduce el número mágico 50, en lugar del erróneo 40 predicho por el modelo de capas simple en su versión de la sección anterior. Pero, para núcleos pesados, el acuerdo entre teoría y experimento no es del todo satisfactorio, aún incluyendo esta interacción espín-órbita. En especial, este modelo no es capaz de reproducir adecuadamente los momentos dipolares y, sobre todo, no explica los momentos cuadrupolares que caracterizan a tales núcleos.

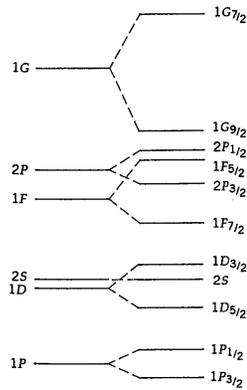


Figura 28: Efecto del acoplamiento espín-órbita

### Rotaciones y vibraciones colectivas

Para describir los momentos cuadrupolares no nulos que presentan los núcleos pesados, Aage Bohr, Ben Mottelson y James Rainwater formularon el modelo que lleva sus nombres. En dicho modelo, el núcleo consta de una zona central, formada por nucleones que se acomodan en capas cerradas y una zona externa, en que los nucleones (llamados nucleones de valencia) se comportan como las moléculas en la superficie de una gota. Los nucleones de valencia, al moverse en la superficie, deforman la zona central, que deja de ser esférica y, como consecuencia, cambian los estados accesibles para los nucleones de valencia, que dejan de ser los del modelo de capas. Este es un modelo que se conoce como “modelo colectivo” y puede ser pensado como un modelo de capas basado en un potencial que no es esféricamente simétrico, sino que produce rotaciones alrededor de ciertos ejes y vibraciones alrededor del estado de equilibrio.

Por ejemplo, puede suponerse que el núcleo es un elipsoide, de la forma  $ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$ , donde los parámetros  $a$  y  $b$  miden la deformación con respecto a la esfericidad. Puede, entonces, elegirse el potencial promedio como:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} > R^2 \end{cases} \quad (26)$$

Ciertamente, potenciales como éste requieren recurrir a métodos numéricos para encontrar las funciones de onda y los correspondientes autovalores de energía y permiten ajustar de modo correcto las transiciones cuadrupolares ( $\Delta l = 2$ ) entre niveles nucleares.

Finalmente, vale la pena recalcar que todos los modelos considerados hasta aquí consideran que la simetría de isospín es exacta, es decir, no distinguen protones de neutrones (hemos hablado siempre de nucleones y hemos supuesto un tipo único de interacción para todos ellos, independientemente de su carga eléctrica). Si se tiene en cuenta, en cambio, la interacción electromagnética, deben introducirse nuevos términos de potencial en la ecuación de Schrödinger.

### IV.3. Reacciones nucleares. Aplicaciones de la Física Nuclear

Textos sugeridos: [13, 3]

El estudio de las propiedades de los núcleos atómicos ha contribuido de modo importante a la comprensión de las leyes fundamentales de la naturaleza. Como había ocurrido antes con el estudio de diversas ramas de la Física (aplicaciones del Electromagnetismo: uso comercial de la electricidad; aplicaciones de la Física Atómica: láser), también el estudio de la Física Nuclear ha dado como subproductos numerosas aplicaciones. Sin embargo, debido al uso destructivo que se ha dado a algunas de ellas, y como consecuencia del problema del manejo de los residuos nucleares, el uso de aplicaciones de la Física Nuclear conduce siempre a controversias. A continuación, estudiaremos algunas de esas aplicaciones y los principios subyacentes.

#### IV.3.1. Desintegraciones nucleares

Videos sugeridos:

<http://www.tu.tv/videos/radioactividad-1-2-henri-becquerei-m1>

<http://www.tu.tv/videos/radioactividad-2-2-henri-becquerei-m>

[http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl\\_eA&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl_eA&feature=related)

[http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl\\_eA&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl_eA&feature=related)

Además de la bibliografía recomendada en la sección previa, para esta sección se aconseja [15].

Como hemos visto, son muchos los núcleos que resultan inestables y encuentran energéticamente favorable decaer. Tales desintegraciones nucleares se clasifican en tres

tipos:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Estudiaremos cada uno de los tres tipos a continuación. Pero, antes, señalemos un hecho experimental, primero observado por Gerhard Schmidt, y estudiado en forma cuantitativa por Rutheford: la actividad radiactiva decrece con el tiempo.

Cuantitativamente, se tiene que la cantidad  $dN$  de átomos que se desintegra en un intervalo de tiempo  $dt$ , es independiente de la cantidad de núcleos desintegrados antes y proporcional a  $dt$ , es decir,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N,$$

donde  $\lambda$ , es una constante, que es distinta para distintos núcleos. La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$N(t) = N(t=0)e^{-\lambda t}. \quad (27)$$

Si llamamos  $T_{1/2}$  al tiempo necesario para que la muestra se reduzca a la mitad, tendremos  $1/2N(0) = N(0)\exp(-\lambda T_{1/2})$  o, tomando logaritmo  $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ . A  $T_{1/2}$  se lo conoce como el tiempo de semidesintegración. Otro tiempo característico, que suele identificarse como aquel tiempo para el cual la muestra decayó, es la vida media  $\tau$ . Se trata de aquel lapso luego del cual el número de átomos en la muestra se reduce a  $\frac{N(0)}{e}$ . Por lo tanto,  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  y, como  $\lambda$ , depende de la substancia que se desintegra.

En general, Los núcleos hijos decaen, a su vez, en núcleos nietos. Pero, mientras decaen, más núcleos hijos se van creando por desintegración de los padres. Lo mismo pasa con los núcleos nietos. Así, si la vida media del núcleo original es más larga que la edad de la Tierra, se alcanza una situación de equilibrio, en que pueden tener presentes núcleos descendientes, aunque los mismos tengan vida media muy corta comparada con la edad de la Tierra. Son las llamadas series radiactivas.

Justamente, sobre la base de la existencia o no de rastros de dados materiales radiactivos, se puede establecer la edad de, por ejemplo, restos de interés histórico. Este es el fundamento de la datación de restos orgánicos a partir de su contenido de  $^{14}\text{C}$ , aplicable a restos de hasta 60,000 años.

En 1946, el químico estadounidense William Libby (1908-1980) dio a conocer los mecanismos de formación, a través de reacciones nucleares, de este isótopo de carbono, poco común en la Tierra. Más tarde (1949), desarrolló el método, que se llamó Método de Datación Radiocarbónica. este aporte le valió a Libby el Premio Nobel de Química en 1960.

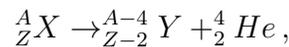
En la naturaleza, hay isótopos estables de carbono:  $^{12}\text{C}$  y  $^{13}\text{C}$ , en abundancias relativas de 98,9 por ciento, 1,11 por ciento. También existe, en una proporción de  $10^{-10}$  por ciento, el isótopo inestable o radiactivo que nos ocupa,  $^{14}\text{C}$ . El mismo habría desaparecido hace tiempo, de no ser porque, en los constantes impactos de rayos cósmicos sobre la atmósfera, siguen formando isótopos, que se esparcen uniformemente por la atmósfera.

Durante el proceso de fotosíntesis, los vegetales incorporan estos isótopos, en cantidad similar a la que existe en la atmósfera. Los animales también los incorporan al ingerir vegetales. Por lo tanto, al analizar restos orgánicos, midiendo la proporción de estos isótopos que albergan y comparando con la que tenían mientras estuvieron vivos mediante la

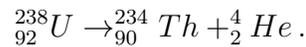
fórmula (27), puede establecerse cuánto tiempo transcurrió desde la muerte (ver trabajo práctico número 4).

### Desintegración $\alpha$

Se llama desintegración  $\alpha$  a la emisión, por parte de un núcleo de número atómico grande, de una partícula (llamada partícula  $\alpha$ ) formada por dos protones y dos neutrones, ligados igual que en el núcleo de un átomo de Helio ( ${}^4_2\text{He}$ ). Este proceso ocurre, normalmente, en núcleos de gran número atómico ( $Z > 82$ ) y es un caso particular de fisión nuclear espontánea. En general, puede representarse el proceso por



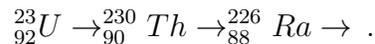
donde hemos representado con  $X$  al núcleo original (núcleo padre) y con  $Y$  al núcleo que aparece en el estado final (núcleo hijo). Un ejemplo típico de emisión  $\alpha$  es:



Vemos que, en desintegraciones de este tipo, el número atómico disminuye en 2 de padre a hijo y la masa atómica, en 4.

Esta desintegración sucede espontáneamente porque es energéticamente posible sin suministrar energía extra: la masa del núcleo padre es mayor que la del núcleo hijo sumada a la de la partícula  $\alpha$  ya que, en el núcleo se produce una disminución en la energía coulombiana a causa de la pérdida de la partícula con carga  $+2e$ . La energía disponible en el proceso es llevada, como energía cinética, por la partícula  $\alpha$  emitida. La masa de una partícula  $\alpha$  es del orden de  $3,73 \text{ GeV}$ . Su energía cinética, de unos  $5 \text{ MeV}$ . Dada su gran masa y su velocidad relativamente baja (junto con su carga distinta de cero) estas partículas tienen alta probabilidad de interactuar electromagnéticamente con la materia y van perdiendo energía hasta ser absorbidas luego de haber recorrido algunos centímetros en el aire.

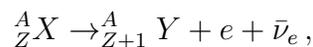
Una serie radiactiva integrada exclusivamente por desintegraciones  $\alpha$  es



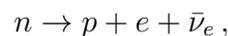
En general, las series radiactivas combinan desintegraciones  $\alpha$  y  $\beta$ .

### Desintegración $\beta$

Ya hemos comentado sobre la desintegración  $\beta$  al explicar las razones por las cuales se postuló la existencia del antineutrino. Vimos que dicha desintegración es de la forma



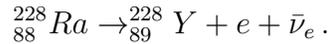
que hemos interpretado como la desintegración de un neutrón según



Esta desintegración puede ocurrir si

$$E = (m_{Z,A} - m_{Z+1,A} - m_e)c^2 > 0.$$

Un ejemplo de tal proceso es



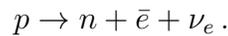
A esta desintegración se la conoce como desintegración  $\beta^-$ . En el campo del núcleo, siempre que

$$E = (m_{Z,A} - m_{Z-1,A} - m_e)c^2 > 0,$$

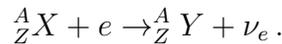
también puede ocurrir que un protón se desintegre (cosa que no es posible si el protón es libre), dando origen a la llamada desintegración  $\beta^+$ :



que se interpreta como



Un proceso relacionado con los anteriores es el conocido como captura electrónica, en el cual el átomo captura un electrón atómico y emite un neutrino:



Finalmente, señalemos que, en algunos núcleos se puede producir la llamada desintegración  $\beta$  doble, donde la carga cambia en dos unidades, en lugar de una.

En la naturaleza, las desintegraciones  $\alpha$  y  $\beta$  se combinan para dar origen a series radiactivas. Entre estas series, hay tres que ocurren naturalmente, ya que los núcleos padres tienen larga vida media (del orden de  $10^{10}$  años, comparable con la vida de la Tierra):

- Padre con  $A = 4n$ :  ${}_{232}^{90}\text{Th}$  con  $\tau = 2,01 \times 10^{10}$  años
- Padre con  $A = 4n + 2$ :  ${}_{238}^{92}\text{U}$  con  $\tau = 6,52 \times 10^9$  años
- Padre con  $A = 4n + 3$ :  ${}_{235}^{92}\text{U}$  con  $\tau = 1,02 \times 10^9$  años

La serie cuyo padre, el  ${}_{237}^{90}\text{Np}$ , tiene  $A = 4n + 1$ , puede ser producida artificialmente, porque el núcleo padre tiene vida media muy corta  $\tau \sim 3,25 \times 10^6$  años.

Parte de la serie  $4n$  puede verse en la figura 29.

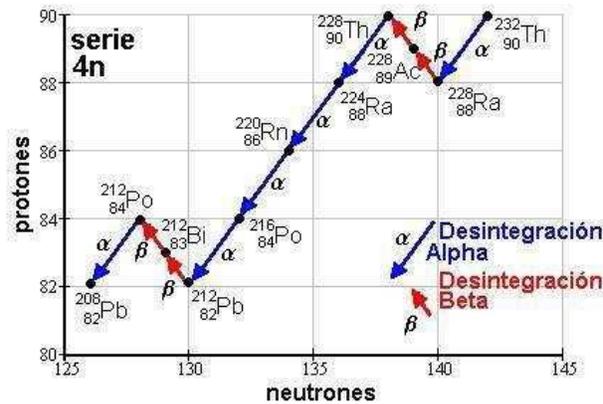


Figura 29: Series radiactivas

### Desintegración $\gamma$

Cuando un núcleo emite radiación  $\alpha$  o  $\beta$ , el núcleo hijo puede quedar en un estado excitado. Puede entonces pasar a un estado de menor energía emitiendo un rayo  $\gamma$ , en la misma forma en que un electrón atómico se desexcita pasando a un nivel de energía más baja. En el caso del electrón, la radiación emitida corresponde a fotones con longitudes de onda en el visible o ultravioleta. En el caso de los núcleos, se trata de fotones mucho más energéticos (mayor frecuencia o, equivalentemente, menor longitud de onda).

Un ejemplo típico de emisión  $\gamma$  es el que tiene lugar luego de la desintegración  $\beta^-$  del Cobalto:



donde \* indica que el Níquel está en estado excitado. A continuación, este último decae a su estado fundamental, emitiendo dos rayos  $\gamma$ , de energías  $1,17\text{ MeV}$  y  $1,33\text{ MeV}$  respectivamente, como se ve en la figura 30.

### IV.3.2. Fisión nuclear

Links útiles:

<http://www.youtube.com/watch?v=EQUp4i4Uotw&list=QL&playnext=1> (atención: por error, al inicio del video se llama elementales a protones y neutrones)

<http://www.youtube.com/watch?v=5-Unbrwqr4Q&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=JyqvBxHbyNw&NR=1>

[http://www.youtube.com/watch?v=M\\_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp](http://www.youtube.com/watch?v=M_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp)

Se conoce como fisión nuclear a un proceso en el cual un núcleo padre sufre una reacción que da origen a dos núcleos hijos, acompañados o no por otras partículas. Aparece representado esquemáticamente en la figura 31.

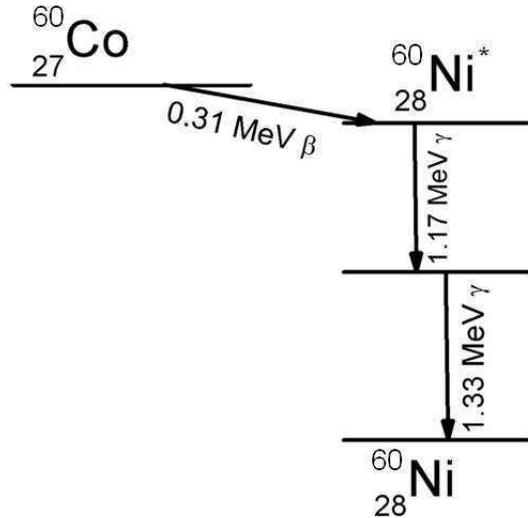


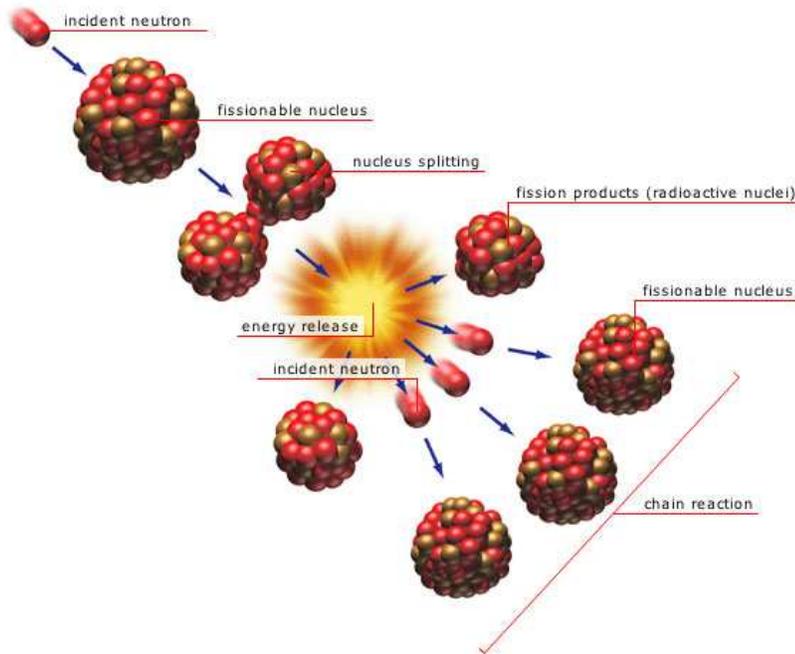
Figura 30: Ejemplo de desintegración  $\gamma$

Tal fisión se llama espontánea si no es necesario entregar energía al núcleo padre para que se transforme. De lo contrario, se la denomina fisión inducida.

Con esta definición, el proceso de desintegración  $\alpha$ , que ya hemos tratado,  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$ , puede interpretarse como un proceso de fisión espontánea. En el transcurso de dicho proceso, algunos nucleones dentro del núcleo padre se aglutinan y les resulta energéticamente más favorable separarse del resto de los nucleones que mantenerse en un estado ligado dentro del núcleo original. La probabilidad de que ocurra tal aglutinamiento sólo es considerable para núcleos con unos pocos nucleones y disminuye muy rápidamente con  $A$ . En la práctica, entre los núcleos con valores bajos de  $A$ , dicha probabilidad sólo es considerable para las llamadas partículas  $\alpha$ , es decir, núcleos de  $He$ , con  $A = 4$ . Contrariamente a lo que ocurre en el caso de dos o tres nucleones, el valor absoluto de la energía de ligadura por nucleón es extremadamente grande para los núcleos de  $He$  ( $\sim 7MeV$ ) (ver figura 26). Como consecuencia, el núcleo padre prefiere transformarse en un núcleo hijo con  $A - 4$  y  $Z - 2$  más una partícula  $\alpha$ .

Ahora bien, analizando la misma figura, se advierte que los núcleos con valores intermedios de  $A$  también tienen valor absoluto de la energía de ligadura muy grande en comparación con los núcleos muy pesados. Podría ocurrir que, de manera espontánea, los núcleos muy pesados se "partiesen al medio", dando origen a dos núcleos hijos con número másico aproximadamente igual a la mitad?

El proceso, de ocurrir, debería ser así: debido a la repulsión coulombiana, el núcleo padre se deformaría a un elipsoide en lugar de conservar su forma esférica. En tal elipsoide, la repulsión de Coulomb contribuiría a aumentar la deformación. Finalmente, el núcleo padre terminaría por romperse en dos "mitades". Para que todo esto pudiera ocu-



© 2004 QA International. All rights reserved.

Figura 31: Fisión nuclear

rrir, la energía por nucleón  $B/A$  del núcleo al adquirir forma elipsoidal debería ser mayor en valor absoluto que en la esfera. Usaremos el modelo de la gota líquida, aproximado con sus tres primeros términos, para mostrar que este no es el caso.

Para la esfera ( $R \sim A^{1/3}$ ) se tiene:

$$B_{esf} = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} . \quad (28)$$

En esta última expresión, el primer término es un término de volumen, el segundo representa una energía desestabilizante de superficie y el tercero es debido a la repulsión Coulombiana. Al deformar la esfera en un elipsoide, el volumen no cambia (suponemos que la gota es incompresible), así que la diferencia de energías entre ambas geometrías sólo es debida a los cambios en las energías de superficie y de Coulomb. Puede mostrarse que, para el elipsoide:

$$B_{elip} = a_1 A - a_2 A^{2/3} (1 + 2/5\epsilon^2) - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 1/5\epsilon^2) , \quad (29)$$

donde el parámetro  $\epsilon$  está relacionado con los semiejes mayor ( $a$ ) y menor ( $b$ ) del elipsoide por las expresiones:

$$\begin{aligned} a &= R(1 + \epsilon) \\ b &= \frac{R}{(1+\epsilon)^{1/2}} , \end{aligned} \quad (30)$$

y  $R$  es el radio de la esfera del mismo volumen ( $V = \frac{4}{3}a b$ ). Resumiendo, se tiene

$$\Delta B = B_{elip} - B_{esf} = -\frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left( 2 a_2 - a_3 \frac{Z^2}{A} \right). \quad (31)$$

Toda vez que esta última expresión resulte ser positiva, el núcleo elegirá la forma elipsoidal. De lo contrario, preferirá la forma esférica. Usando para los coeficientes los valores fenomenológicos dados al estudiar el modelo de la gota, se encuentra que  $\Delta B$  es positiva sólo cuando  $Z^2 > 47 A$ . Tal relación sólo se cumple para elementos que no existen en la naturaleza (transuránicos con  $A > 270$  y  $Z > 114$ ).

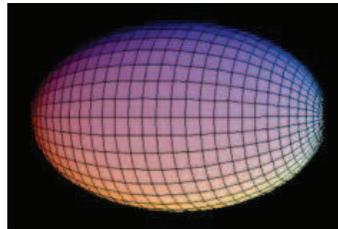


Figura 32: Elipsoide prolado

Los núcleos que ocurren en forma natural corresponden a  $\Delta B \sim -6MeV$  y no se fisionan espontáneamente. Para lograrlo, hay que proporcionarles una energía de ese orden de magnitud. Cómo hacerlo? Ya en los inicios de la Física Nuclear, los científicos intentaban producir elementos transuránicos usando la captura de neutrones ( $n$ ) por núcleos para aumentar el número másico. Pero, en dichos experimentos se observaba, en realidad, que los neutrones térmicos (así llamados por tener una energía del orden de  $\frac{1}{40}eV$ , correspondiente a la temperatura de  $300K$ ), al ser dispersados por núcleos con  $A$  impar (como el  $^{235}U$ ) no producían núcleos más pesados, sino que el núcleo padre se fisionaba en dos núcleos de masa intermedia, además de otras partículas en el estado final. A este proceso se lo conoce como fisión inducida. Un ejemplo típico es la reacción:



También se observó que, en cambio, la dispersión de neutrones térmicos por núcleos con  $A$  par no produce fisión; en este caso, la fisión requiere energías mucho más altas (del orden de  $2MeV$ ).

La fisión nuclear resulta de utilidad ya que, al producirse, se libera gran cantidad de energía. Una estimación del orden de magnitud de la energía liberada puede obtenerse usando los valores mostrados en la figura 26. Allí se ve que el valor absoluto de la energía

de ligadura por nucleón es mucho menor para  $A$  muy grande que para  $A$  medio, con una diferencia entre ambas  $\Delta(B/A) \sim 0,9MeV$ . por lo tanto, la diferencia de energías de ligadura entre el estado final y el inicial es de  $\Delta E_{ligadura} = -0,9MeV \times A = -200MeV$ . (Hemos usado aquí que  $A = 235$  para  $^{235}U$ . Recordar que la energía de ligadura por nucleón es  $-\frac{B}{A}$ ). Por lo tanto, en cada proceso de fisión se libera una gran cantidad de energía.

Analicemos el proceso de fisión con más detalle (ver figura ??). Durante la fisión nuclear, los neutrones, al ser capturados, forman un núcleo con número másico  $A + 1$ , en un estado excitado. Al desexcitarse, este último átomo puede elegir uno de dos caminos: decaer por emisión  $\gamma$ , conservando su número másico y demás características o, si es más favorable, fisionarse en dos núcleos hijos. Veamos ahora, entonces, bajo qué circunstancias resulta más favorable la fisión. Dicho de otro modo: cuándo es el valor absoluto de la energía de ligadura mayor para dos núcleos hijos que para un único núcleo esférico? Volviendo al modelo de la gota tenemos, para un núcleo par-par:

$$\begin{aligned} \Delta B &= 2B\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - B(A, Z) = -2a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 2a_3\left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{Z}{2}\right)^2 \\ &+ a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + a_3\left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}Z^2 \sim (A)^{\frac{2}{3}}\left(-0,27a_2 + 0,38\frac{Z^2}{A}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

La última expresión resulta positiva para  $Z^2 > 17A$ . Por lo tanto, los núcleos que satisfacen  $17A < Z^2 < 47A$  pueden, si se les proporciona, mediante neutrones incidentes, cierta energía de activación que les permita superar una barrera de potencial, partirse en dos núcleos más o menos iguales, conocidos como núcleos hijos y, en el proceso, se liberará energía.

La figura 33 muestra tal barrera de potencial como función de la deformación del núcleo. Para  $Z \sim 92$ , dicha barrera es de sólo algunos  $MeV$ . Este es el caso para los isótopos (igual  $Z$ , pero distinto  $N$  o  $A$ ) del uranio (también para  $^{233}Th$  y  $^{239}Pu$ ), que tienen una considerable probabilidad de fisión. De los isótopos de uranio, los más fácilmente fisionables corresponden al  $^{235}U$  ( $Z = 92$ ,  $N = 143$ ), que se fisionan al incidir sobre ellos neutrones térmicos. Para fisionar  $^{238}U$  ( $Z = 92$ ,  $N = 146$ ), en cambio, hacen falta neutrones más energéticos. En efecto, dado que los núcleos par-par son los más estables, el  $^{235}U$  prefiere absorber neutrones para formar  $^{236}U$ , que es par-par y luego fisionarse. El  $^{238}U$ , en cambio, sólo puede absorber neutrones muy energéticos, porque el  $^{239}U$  es par-impar y, entonces, energéticamente desfavorable. Pero, en la naturaleza, los más abundantes son los últimos, como discutiremos en breve. Por eso se realiza el proceso de enriquecimiento de uranio.

Como hemos dicho, ambos productos en un proceso de fisión tienen números másicos aproximadamente iguales. Sin embargo, la naturaleza prefiere fisiones no del todo simétricas. Típicamente se tiene, para los núcleos hijos,  $A_1 \sim 95$  y  $A_2 \sim 140$ . este hecho no ha encontrado explicación hasta el presente.

Una vez producida la fisión, los núcleos hijos quedan en un estado excitado y decaen emitiendo nuevos neutrones (evaporación de neutrones). Esos neutrones, aproxima-

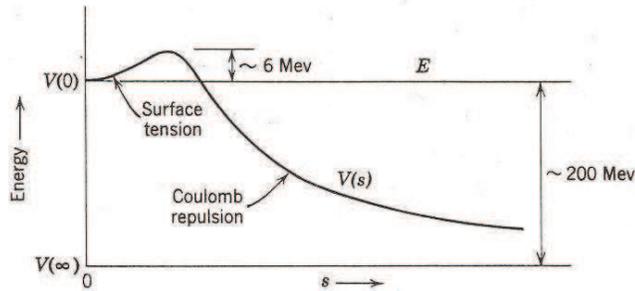


Figura 33: Barrera de potencial en la fisión

damente 2, 5 de ellos por fisión) pueden, a su vez, iniciar nuevas fisiones, dando origen a las llamadas cadenas de fisión. Para caracterizar la persistencia de tal cadena de fisiones se define el coeficiente  $k$ , dado por  $k = \text{Nro. de neutrones en la } n + 1\text{-ésima fisión} / \text{Nro. de neutrones en la } n\text{-ésima fisión}$ . Si  $k < 1$  la fisión se llama subcrítica y, finalmente, se detiene. Si, en cambio,  $k > 1$ , se descontrola y conduce a una explosión.

Justamente, en los reactores nucleares ver figura 34, la reacción en cadena es controlada: después de una etapa inicial con  $k > 1$ , destinada a alcanzar la energía requerida, se mantiene  $k = 1$ . Este control se consigue introduciendo o quitando del reactor las llamadas barras de control, hechas de Cd.

Como combustible para los reactores puede usarse uranio natural. Pero el mismo es mezcla de  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  en proporción 1 : 138, porque la vida media del  $^{235}\text{U}$  es mucho más corta ( $7 \times 10^8$  años) que la del  $^{238}\text{U}$  ( $5 \times 10^9$  años). Si se usara uranio natural, entonces, la mayor parte de los neutrones térmicos sería absorbida por el  $^{238}\text{U}$ , y no se produciría fisión. Por eso se usa uranio enriquecido, con mayor proporción de  $^{235}\text{U}$ .

Las piezas mencionadas hasta aquí constituyen el núcleo del reactor. El mismo está rodeado por plomo, para impedir la salida de radiación y por un moderador, que detiene a los neutrones excesivamente rápidos, para que puedan inducir nuevas fisiones. En general, se usa como moderador agua pesada ( $D_2O$ ). Además, todo el mecanismo está rodeado por agua, que elimina el calor producido en el núcleo y el vapor resultante se utiliza para generar electricidad al mover turbinas.

Calculemos la energía generada por un gramo de uranio que se fisiona. Como ya vimos, cada núcleo de  $^{235}\text{U}$  origina, aproximadamente,  $200\text{MeV} \sim 3,2 \times 10^{-11}$  Joules. Cada gramo de material contiene  $\frac{A_0}{A}$  átomos, donde  $A_0$  es el número de Avogadro. En el caso particular del  $^{235}\text{U}$ , cada gramo contiene, entonces  $\frac{6 \times 10^{23}}{235} \sim 3 \times 10^{21}$  átomos. Por lo tanto, un gramo de  $^{235}\text{U}$  produce una energía de  $3 \times 10^{21} \times 3,2 \times 10^{-11} \sim 10^{11}$  Joules, que equivale a  $1\text{MW}$  por día, del orden de  $10^6$  veces la energía producida por un gramo de carbón.

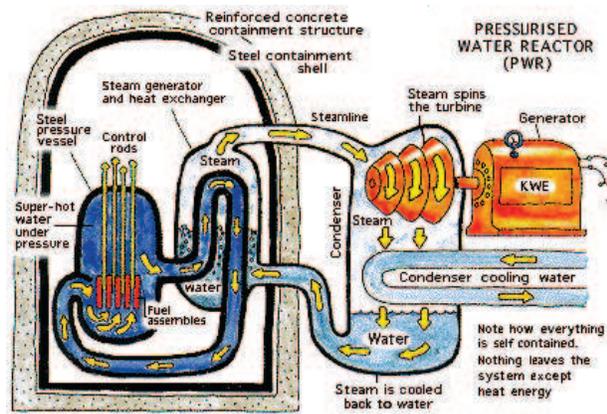


Figura 34: Reactor nuclear

### IV.3.3. Fusión nuclear

Links útiles:

[http://www.youtube.com/watch?v=M\\_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp](http://www.youtube.com/watch?v=M_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp)

Volvamos a la figura 26. Allí se ve que los núcleos con número másico intermedio son los más ligados. Para números másicos menores,  $B/A$  disminuye muy rápidamente. Entonces, podemos imaginar procesos, llamados de fusión, opuestos a los procesos de fisión: poniendo en contacto dos núcleos livianos puede obtenerse un núcleo intermedio, más ligado. La diferencia de energías de ligadura por unidad de nucleón liberada resulta comparable con la generada en la fisión. Sin embargo, dado que los núcleos más livianos contienen menos nucleones, la energía total generada por fusión resulta ser menor que la obtenida por fisión. La ventaja de la fusión radica en que los núcleos livianos e intermedios son mucho más abundantes en la naturaleza y hay, por lo tanto, más materia prima disponible. En efecto, este es el mecanismo responsable de la generación de energía en el interior del Sol y en el de otras estrellas.

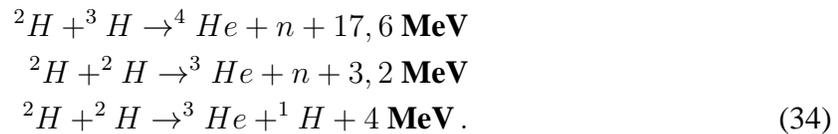
Sin embargo, conseguir que dos núcleos se aproximen lo suficiente para fundirse en uno solo requiere sobrepasar la barrera coulombiana en la figura 33. Cuando los núcleos se tocan, la barrera alcanza un máximo, dado por:

$$V_{\text{coul}} = \frac{Z Z' e^2}{R + R'} = \frac{Z Z' e^2}{1,2 \text{ fm} (A^{1/3} + A'^{1/3})} \sim \frac{197 \text{ MeV}}{137 \times 1,2} \frac{Z Z' e^2}{(A^{1/3} + A'^{1/3})}$$

Para núcleos con igual número de protones y neutrones  $A \sim A' \Rightarrow 2Z \sim 2Z'$ . Calculando para  $A \sim 8$  se obtiene  $V_{\text{coul}} \sim 4 \text{ MeV}$ . Esa es la energía cinética que debemos dar a los núcleos originales (acelerándolos o calentándolos). Pero en los procesos de colisión

predomina la dispersión elástica. Por lo tanto, debe calentárselos hasta temperaturas del orden de  $10^{10}\text{K}$ , una temperatura comparable con la del interior del Sol.

Hay, a nivel mundial, numerosos intentos de lograr procesos controlados de fusión. Pero el principal problema es que resulta difícil mantener confinados a los núcleos tan calientes por lapsos suficientemente largos para que la fusión se produzca. Con diversas técnicas (confinamiento magnético, confinamiento inercial, inyección láser de energía electromagnética) se han obtenido algunas reacciones en laboratorio, típicamente:



Un esquema del primero de estos procesos se reproduce en la figura 35.

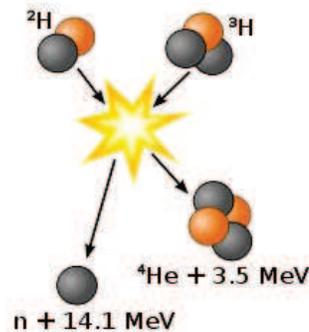


Figura 35: Fusión nuclear

Monografía propuesta Nro. 3: Reacciones nucleares y sus aplicaciones. Bibliografía: [13, 14]



## **Parte V**

# **Teoría de las Interacciones Fundamentales. El Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales**



---

Principales referencias: [2, 16]

Lectura extra sugerida: [17, 18]

Videos útiles: El Universo Elegante, BBC

Está claro que una buena teoría de las interacciones fundamentales entre partículas elementales, debido a las distancias y energías típicas en juego, debe ser una teoría, aun tiempo, cuántica y relativista. Sin embargo, la tarea de conciliar ambos requerimientos no resultó, en absoluto, trivial. De resultas de ese esfuerzo, se abandonó, en física de las interacciones fundamentales, la idea de mecánica cuántica como teoría de una partícula, donde la función de onda describe la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula individual en un cierto estado. En lugar de eso, las teorías que integran el modelo estándar de las interacciones fundamentales son teorías cuánticas de campos, en las cuales los campos de la teoría actúan como operadores que crean y destruyen partículas a partir de un estado de vacío. Tales teorías cuánticas de campos han mostrado ser útiles para describir las interacciones electrodébiles y fuertes y están basadas en la invarianza de los fenómenos físicos ante dos tipos de simetrías: simetrías espacio-temporales, particularmente frente a transformaciones del grupo de Lorentz inhomogéneo o de Poincaré y simetrías internas de gauge o locales, en las cuales los puntos del espacio-tiempo permanecen inalterados, pero cambia la forma de los campos de manera diferente en cada punto.

A continuación, empezaremos por esbozar los primeros intentos de conciliar relatividad especial y mecánica cuántica, señalando los problemas de interpretación que surgen en tal intento. Luego, estudiaremos las propiedades de las acciones clásicas correspondientes a campos libres con distintos valores de espín y daremos una noción del procedimiento de cuantización en el caso de un campo escalar libre. Finalmente, estudiaremos teorías de campos en interacción, empezando por la Electrodinámica Cuántica y sus correspondientes reglas de Feynman. Discutiremos brevemente el efecto de considerar grupos de gauge no abelianos, particularizando a la Cromodinámica cuántica, que describe la interacción fuerte entre quarks. Finalmente, realizaremos una breve presentación de la teoría de Glashow, Salam y Weinberg para las interacciones electrodébiles, la ruptura espontánea de simetría y el mecanismo de Higgs para dar masa a las partículas del modelo estándar.

A menos que se indique lo contrario, en las secciones siguientes se utilizarán unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ). Recuérdese que, obtenido un resultado cualquiera, puede recuperarse su verdadero valor numérico multiplicando por las potencias adecuadas de  $\hbar$  y de  $c$ . Adoptaremos para el espacio-tiempo de Minkowski la métrica  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Una breve introducción a la noción de tensor, utilizada a menudo en este capítulo de los apuntes, se presenta en VII.

## V.1. Intentos de construir una Mecánica Cuántica Relativista. Problemas de interpretación

### V.1.1. Partícula sin espín. Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que, en Mecánica Cuántica no relativista, identificamos coordenadas e impulsos con operadores (en el primer caso, simplemente multiplicativos; en el segundo, diferenciales):

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} / \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}. \quad (35)$$

Reemplazando las cantidades clásicas por estos operadores en la expresión de la energía, obtenemos la ecuación de Schrödinger:

$$i\partial_t\Phi(t, x) = \hat{H}\Phi(t, x).$$

La función  $\Phi(t, x)$  es llamada la función de onda y caracteriza a *una partícula*, que es el objeto de nuestro estudio.

En el caso de sistemas conservativos, podemos ir más lejos, separando la variable temporal en la ecuación mediante  $\Phi(t, x) = e^{-iEt}\phi_E(\vec{x})$  y pasar a la llamada ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$E\phi(\vec{x}) = \hat{H}\phi_E(\vec{x})$$

La probabilidad de encontrar a tal partícula en el estado caracterizado por  $\phi_E(t, x)$  está dada por

$$P = \int d^3x \phi_E^*(\vec{x})\phi_E(\vec{x}).$$

Nótese que, dada su interpretación como probabilidad, se tiene  $P \geq 0$ . Además,  $P$  es independiente del tiempo.

Por ejemplo, en el estudio de una partícula libre clásica se tiene  $E = \frac{p^2}{2m}$ , donde  $\vec{p}$  es el vector cantidad de movimiento,  $m$  es la masa y  $E$  es la energía de la partícula. Al elevar coordenadas e impulsos al rango de operadores, la ecuación de Schrödinger estacionaria resulta, en este caso,

$$E\phi_E(\vec{x}) = \hat{H}\phi_E(\vec{x}) = -\frac{\Delta\phi_E(\vec{x})}{2m},$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano que, en coordenadas cartesianas, está dado por  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Los valores admisibles de la energía (notar que son siempre positivos o nulos, nunca negativos) son los autovalores del operador  $\hat{H}$ . Las correspondientes autofunciones permiten calcular la probabilidad de encontrar a la partícula con ese valor de energía. En este caso, existe un continuo de autovalores admisibles, porque la partícula es libre. En presencia de algunos potenciales, sólo ciertos valores discretos de energía son posibles.

Oskar Klein (1894-1977) y Walter Gordon (1893-1939) hicieron el primer intento de extender estas nociones al dominio relativista. Ahora bien, en el caso de una partícula

libre relativista de masa  $m$ , la ecuación clásica que vincula energía y componentes del impulso es

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (36)$$

Aparece así el primer problema en la interpretación de una eventual Mecánica Cuántica Relativista: por cada energía positiva, la ecuación anterior predice la existencia de otra energía de igual módulo, pero signo contrario. En efecto, despejando los posibles valores de energía compatibles con la ecuación (36) se tiene:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

La mínima energía positiva ( $m$ , en unidades naturales) y la máxima energía negativa ( $-m$  en las mismas unidades) están separadas por el llamado "gap de energía", cuyo valor es  $2m$ . A diferencia de lo que ocurría en el caso no relativista, las energías negativas no tienen cota inferior. Por lo tanto, dada una partícula en un estado de energía  $E = m$ , bastaría quitarle una energía igual a  $2m$ , llevándola al estado de energía  $E = -m$ . Una vez en ese estado, la partícula elegiría decaer sin límite, ocupando estados de energías cada vez menores, emitiendo infinita energía en el proceso. Como veremos, este es un obstáculo irresoluble en la construcción de una mecánica cuántica relativista para una partícula única. Ya hemos visto que la existencia de energías negativas condujo a la introducción del concepto de antipartícula.

Olvidemos por un momento la dificultad antes discutida y continuemos en nuestro intento de extender al campo de la relatividad especial las nociones de la Mecánica Cuántica no relativista. Tomando, para una partícula libre, la función compleja  $\varphi(t, \vec{x})$ , la correspondencia  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$  conduce, usando la ecuación (36), a:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Usando el tetravector covariante  $\partial$  de componentes  $\partial_\mu : (\partial_0, \vec{\nabla})$ , la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = 0$$

Esta ecuación, conocida como la ecuación de Klein-Gordon tiene una diferencia fundamental con la ecuación de Schrödinger no relativista: presenta una derivada de segundo orden con respecto al tiempo (la covarianza relativista exige que la ecuación tenga el mismo orden en derivadas temporales y espaciales). Como consecuencia, para determinar su solución a un tiempo arbitrario, es necesario dar dos datos iniciales. Dicho de otro modo: no basta con conocer  $\varphi(t = 0, \vec{x})$ . Debe conocerse también el valor de  $\partial_t \varphi(t, \vec{x})$  en  $t = 0$ .

Nos preguntamos: es posible definir una cantidad real, independiente del tiempo (conservada durante la evolución del sistema) y definida no negativa, que pueda interpretarse como la probabilidad de que UNA partícula se encuentre en el estado caracterizado por cierta función de onda, como ocurre en Mecánica Cuántica no relativista?

Como mostraremos a continuación, es posible definir una cantidad real e independiente del tiempo (que llamaremos la carga, por razones que se aclararán al estudiar Teoría de

campos). Pero también veremos, con un contraejemplo, que tal cantidad no siempre es no negativa, como corresponde a una legítima probabilidad. Tal cantidad está dada por:

$$J^0 = \int d^3x \frac{i}{2m} (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi). \quad (37)$$

Es evidente que se trata de una cantidad real. Que es conservada, puede verse a partir de la ecuación de movimiento, como sigue:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0. \quad (38)$$

Conjugando la ecuación anterior:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi^*(t, \vec{x}) = 0. \quad (39)$$

Multiplicando (38) por  $\varphi^*$ , (39) por  $\varphi$  y restando, se tiene:

$$\varphi^*(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi - \varphi(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi^* = 0,$$

que puede integrarse sobre el espacio-tiempo, para obtener:

$$\int dt d^3x \left[ \varphi^*(\partial_t \partial_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi - \varphi(\partial_t \partial_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi^* = 0 \right]$$

o bien, integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int dt d^3x \left\{ \left[ \partial_t (\varphi^* \partial_t \varphi) - \vec{\nabla} \cdot (\varphi^* \vec{\nabla} \varphi) \right] \right. \\ \left. - \left[ \partial_t (\varphi \partial_t \varphi^*) - \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi^*) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

De la última ecuación se ve que, si definimos  $j^0 = \frac{i}{2m} (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi)$  y  $\vec{j} = \frac{-i}{2m} (\varphi^* \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi^*)$ , tendremos

$$\partial_t j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (41)$$

La ecuación (41) es una ecuación de continuidad como la que satisfacen, por ejemplo, la densidad de carga y la densidad de corriente en electromagnetismo. Nótese que dicha ecuación puede escribirse, en forma manifiestamente covariante de Lorentz, como  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Definiendo la carga como  $J^0 = \int d^3x j^0$  e integrando (41) sobre todo el espacio y entre dos tiempos arbitrarios,  $T_1$  y  $T_2$ , tendremos:

$$\int_{T_1}^{T_2} dt \partial_t J^0 = - \int dt d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

El teorema de Gauss nos permite reemplazar la integral de la divergencia sobre el volumen espacial (infinito) por una integral, sobre el borde, de la derivada normal de la

densidad de corriente. Si se consideran campos que se anulan en el infinito el miembro derecho de la última ecuación se anula y, realizando explícitamente la integral del miembro izquierdo, resulta:

$$J^0(T_2) = J^0(T_1),$$

con lo cual queda demostrado que la carga, tal como la definimos en (37) es una cantidad conservada. Sin embargo, no es siempre no negativa. Basta un contraejemplo para ver que no lo es.

En efecto, para una partícula libre, la solución de la ecuación de Klein-Gordon para una dada energía  $E$  puede escribirse como  $\varphi(t, \vec{x}) = N \int d^3k e^{-iEt+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , donde  $N$  es un factor de normalización (verifique que, reemplazada en la ecuación, la satisface, con  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ ). En este caso, es muy simple calcular explícitamente el valor de la densidad de carga, que resulta  $j^0 = E|N|^2$ , independiente del tiempo. Es, obviamente, positiva, cuando  $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  (soluciones de energía positiva, pero resulta negativa para las soluciones de energía negativa, es decir,  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ). Ciertamente, no puede interpretarse a la densidad de carga como una densidad de probabilidad. Como consecuencia, no puede entenderse la ecuación de Klein-Gordon como la ecuación que satisface UNA partícula cuántica relativista. Puede dársele otra interpretación? Como veremos, la respuesta se encuentra en la Teoría Cuántica de Campos, donde la ecuación de Klein-Gordon será la ecuación clásica satisfecha por un campo escalar (de espín nulo). Pero, en este contexto, el campo se elevará, a posteriori, a la jerarquía de un operador, que crea y destruye partículas a partir de un estado de vacío, como veremos más adelante.

### V.1.2. La ecuación de Dirac

Visto que la ecuación de Klein-Gordon resultaba insatisfactoria desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica Relativista de una partícula, Paul Dirac (1902-1984) se preguntó si era posible construir una ecuación relativista para un objeto de cuatro componentes, que sólo contuviera derivadas temporales de primer orden, como ocurre en la ecuación de Schrödinger no relativista, sin perder la covarianza de Lorentz. Este último requisito conduce, como veremos, a una ecuación que es también diferencial de primer orden en las coordenadas espaciales. Como veremos, tal ecuación conduce a una densidad de carga no negativa, pero no resuelve el problema de interpretación de las energías negativas. Sin embargo, como veremos, se trata de una ecuación que describe, a nivel clásico en Teoría Cuántica de Campos, partículas de espín 1/2 y resulta ser la adecuada para tratar todas las partículas materiales medidas hasta el presente (sólo la partícula de Higgs, aún no detectada, corresponde, en el modelo estándar de las interacciones fundamentales, a una partícula de espín nulo, cuya ecuación clásica de movimiento es la de Klein-Gordon).

En la deducción de su famosa ecuación, Dirac partió de

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{42}$$

donde  $\hat{H}$  es un operador en derivadas primeras con respecto a las coordenadas espaciales y  $\psi$  es un objeto de cuatro componentes complejas, es decir,  $\psi^t = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ . Propuso,

entonces,

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m)\psi = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi. \quad (43)$$

Dado que  $\psi$  tiene cuatro componentes, los cuatro coeficientes ( $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  y  $\beta$ ) son matrices de  $4 \times 4$ . Ahora, por tratarse de una partícula libre, que satisface  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , debe cumplirse que  $\hat{H}^2\psi = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + m^2)I\psi$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ . Esta condición se escribe:

$$\left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta m \right) \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j \hat{p}_j + \beta m \right) \psi = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + m^2) I\psi$$

o, equivalentemente,

$$\left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \hat{p}_i^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \alpha_i \alpha_j \hat{p}_i \hat{p}_j + m \sum_{j=1}^3 (\beta \alpha_j + \alpha_j \beta) + \beta^2 m^2 \right) \psi \quad (44)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^3 \hat{p}_i^2 + m^2 \right) I\psi. \quad (45)$$

De la ecuación anterior resultan condiciones para las cuatro matrices, a saber,

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= I \quad i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \alpha_j &= -\alpha_j \alpha_i \quad \forall i \neq j \\ \beta \alpha_j &= -\alpha_j \beta \quad j = 1, 2, 3 \\ \beta^2 &= I. \end{aligned} \quad (46)$$

Volviendo a la ecuación (43) y multiplicando ambos miembros por  $\beta$ , se tiene:

$$\left( \beta i \partial_t + \beta \vec{\alpha} \cdot i \vec{\nabla} - m I \right) \psi = 0.$$

Si se definen nuevas matrices de  $4 \times 4$  según  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^i = \beta \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la ecuación de Dirac puede reescribirse

$$\left( \gamma^0 i \partial_t + \vec{\gamma} \cdot i \vec{\nabla} - m I \right) \psi = 0.$$

En notación covariante de Lorentz, la ecuación se escribe

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m I) \psi = 0 = (i\rlap{/}\partial - m I) \psi, \quad (47)$$

donde se ha introducido la notación usual  $\rlap{/}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ .

Las matrices gamma recién definidas se conocen como matrices de Dirac y es fácil ver, usando su definición y las propiedades (46), que las mismas satisfacen

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\gamma^i)^2 = -I \quad i = 1, 2, 3 \quad \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Dichas propiedades pueden escribirse en forma resumida como

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} I, \quad (48)$$

donde  $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  es la matriz inversa de la métrica del espacio de Minkowski.

Las relaciones (48) no determinan unívocamente el conjunto de cuatro matrices a usar en la ecuación. Dado un conjunto de matrices que satisfacen esas condiciones, cualquier otro conjunto de cuatro matrices, relacionadas con las originales mediante una transformación de semejanza, satisface las mismas relaciones de anticonmutación. En efecto, si definimos  $\tilde{\gamma}^\alpha = S^{-1}\gamma^\alpha S$ , con  $S$  una matriz invertible de  $4 \times 4$ , se tendrá:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\alpha, \tilde{\gamma}^\beta\} &= S^{-1}\gamma^\alpha S S^{-1}\gamma^\beta S - S^{-1}\gamma^\beta S S^{-1}\gamma^\alpha S \\ &= S^{-1}\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} S = 2g^{\alpha\beta} S^{-1} I S = 2g^{\alpha\beta} I. \end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación de Dirac original (47) puede reescribirse:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI) S S^{-1} \psi = 0$$

o, multiplicando a izquierda por  $S^{-1}$ ,

$$(iS^{-1}\gamma^\mu S \partial_\mu - mI) S^{-1} \psi = 0.$$

Si definimos espinores transformados  $\tilde{\psi} = S^{-1}\psi$ , esta última ecuación adopta la forma

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu - mI) \tilde{\psi} = 0,$$

que es la ecuación de Dirac (47), escrita con el nuevo conjunto de matrices gamma y queda claro que ambas versiones de la ecuación son equivalentes. A estos posibles conjuntos de matrices gamma se los conoce como distintas representaciones de las matrices de Dirac. Entre las posibles representaciones, las más usuales son la representación de Dirac-Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\sigma^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli ya introducidas en capítulos anteriores, y la representación quiral o de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pero, ciertamente, estas no son las únicas posibilidades. Según vimos, cualquier transformación de semejanza conducirá a otra representación igualmente válida.

A partir de un dado conjunto de cuatro matrices de Dirac puede definirse una quinta matriz, dada por  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Es fácil ver que  $(\gamma^5)^2 = I$  y que  $\gamma^5$  anticonmuta

con cada una de las cuatro matrices de Dirac. Su expresión depende, ciertamente, de la representación elegida. Por ejemplo, en la representación quiral,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Hemos dicho que la ecuación de Dirac describe la dinámica de una partícula de espín 1/2. Justificaremos esta afirmación en lo que sigue.

Para verlo, volvamos a escribir el hamiltoniano de Dirac en la forma

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m) = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m).$$

Dado que  $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ , el operador momento angular orbital  $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}}$  no conmuta con el hamiltoniano y no es, por lo tanto, una cantidad conservada. El operador que debe sumársele vectorialmente a  $\hat{\vec{L}}$  para conseguir un operador que sí conmute con  $\hat{H}$  será el espín de la partícula de Dirac. Veamos qué ocurre con la componente  $\hat{L}_z$ . En este caso, es fácil verificar que

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = [\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = i(\alpha_2\hat{p}_x - \alpha_1\hat{p}_y).$$

Si definimos  $\hat{S}_z = -\frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2 = \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2]$ , se muestra que

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = -\frac{i}{2}[\alpha_1\hat{p}_x + \alpha_2\hat{p}_y, \alpha_1\alpha_2] = -i(\alpha_2\hat{p}_x - \alpha_1\hat{p}_y).$$

Por lo tanto,  $[\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = 0$ . Lo mismo ocurre con las dos componentes restantes, con  $\hat{S}_x = \frac{i}{4}[\gamma^2, \gamma^3]$  y  $\hat{S}_y = \frac{i}{4}[\gamma^3, \gamma^1]$ . Resumiendo,  $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ , suma vectorial del impulso angular orbital y el espín, es el impulso angular conservado.

Ahora bien, puede verse (por ejemplo, en la representación quiral de las matrices de Dirac) que  $\hat{S}^2 = \frac{3}{4}I = s(s+1)I$ , con  $s = \frac{1}{2}$ , lo cual muestra que el espín de la partícula es  $s = \frac{1}{2}$ .

A diferencia de lo que ocurre con la ecuación de Klein-Gordon, para la ecuación de Dirac es posible definir una cantidad conservada (carga) siempre no negativa. En efecto, si se definen densidades de carga y de corriente como sigue:

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi, \quad j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi, \quad (49)$$

donde hemos definido el llamado espinor conjugado de Dirac,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ , puede demostrarse (lo veremos como un ejemplo de aplicación del Teorema de Noether, cuando estudiemos Teoría de Campos a nivel clásico) que se satisface la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

De esa ecuación de continuidad, integrada sobre todo el espacio-tiempo se deduce, igual que lo hicimos para la ecuación de Klein-Gordon, que  $J^0 = \int d^x j^0$  es una cantidad

conservada. Además, de la expresión  $j^0 = \psi^\dagger \psi = (\psi^\dagger)^* \psi$  es evidente que la densidad de carga es siempre positiva. Por lo tanto, la ecuación de Dirac ha resuelto uno de los obstáculos para conciliar la teoría de la Relatividad Especial con la Mecánica Cuántica de una partícula. Sin embargo, persiste el problema de la existencia de infinitos estados con energías tan negativas como se quiera. En esas condiciones, una partícula de Dirac elegiría decaer a estados de energía tan negativa como tiene disponible y la teoría no resultaría estable. La solución a este problema, como ya hemos anticipado, se encuentra en la Teoría de Campos, que estudiaremos a continuación.

## V.2. Teoría Cuántica de Campos

### V.2.1. Construcción de acciones clásicas. Ecuaciones clásicas de movimiento y cargas conservadas. Cuantización

Como ya se adelantó, en este contexto supondremos que un dado sistema está caracterizado por un campo (función de los puntos del espacio-tiempo de Minkowski), que ya no se entenderá como una función de onda y escribiremos la acción clásica correspondiente. A partir de dicha acción, determinaremos las ecuaciones clásicas de movimiento, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y buscaremos soluciones generales de las mismas. Luego, reemplazaremos los coeficientes en dichas soluciones generales por operadores de creación y aniquilación de partículas a partir del vacío, para pasar a la Teoría Cuántica de Campos.

Al construir la acción clásica, impondremos ciertos requisitos:

1) Que sean locales, es decir, que todos los campos y las derivadas de los campos que aparezcan en ellas estén evaluados en un mismo punto del espacio-tiempo.

2) Que involucren, a lo sumo, dos derivadas de los campos en cada término. Este requisito garantiza que las ecuaciones clásicas de movimiento presenten, a lo sumo, derivadas segundas de los campos. Puede mostrarse que ecuaciones de orden superior violan la causalidad.

3) Que las acciones sean invariantes frente a transformaciones del grupo propio de Lorentz-Poincaré (ver apéndice sobre este grupo de transformaciones). Este requisito garantiza la obtención de teorías consistentes con la Teoría de la Relatividad Especial. La invarianza frente a transformaciones discretas del grupo de Lorentz (paridad e inversión temporal) no necesariamente debe ser respetada. Por ejemplo, la teoría de Glashow-Salam-Weinberg para las interacciones electrodébiles no presenta invarianza frente a paridad (Presupone la existencia de neutrinos izquierdos y no derechos).

4) En los casos en que, además de las simetrías espacio-temporales de Lorentz existan simetrías internas (por ejemplo, simetrías de gauge), exigiremos que las acciones sean invariantes frente a las correspondientes transformaciones.

La acción clásica será de la forma:

$$S = \int d^4x \sum_a \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu) \Phi_a, \quad a = 1, \dots, n,$$

donde el índice discreto  $a$  distingue los distintos tipos de campos independientes de la teoría ( $n$  en total). La funcional de los campos  $\mathcal{L}$  se conoce como densidad lagrangiana y es construida respetando los requisitos anteriormente enumerados.

En forma similar a lo que se hace en la formulación lagrangiana de la Mecánica Clásica, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se obtienen exigiendo que la variación de la acción se anule cuando se realizan variaciones de los campos nulas en los bordes del espacio-tiempo. Tales ecuaciones resultan:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (50)$$

En estas condiciones, vale el teorema debido a la matemática Emmy Noether (1882-1935), que enunciaremos sin demostración:

*Si la acción clásica resulta invariante frente a una dada transformación de campos y/o coordenadas cuando se satisfacen las ecuaciones clásicas de movimiento, existe una tetra densidad de corriente que satisface la ecuación de continuidad y, por lo tanto, existe una carga conservada.*

Más explícitamente:

Dadas transformaciones de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \delta \Phi,$$

si puede mostrarse usando las ecuaciones clásicas de movimiento que, frente a las mismas, la acción permanece invariante, es decir  $\delta S = 0$ , entonces el tetravector densidad de corriente, cuyas componentes están dadas por:

$$j^\mu = \sum_a \left\{ \left[ -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta x^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (51)$$

satisface la ecuación de continuidad  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Por supuesto,  $j^\mu$  multiplicada por un factor constante arbitrario seguirá satisfaciendo la ecuación de continuidad.

Como consecuencia de esta última ecuación,  $J^0 = \int d^3x j^0$  es una carga conservada. Como ejemplos de cargas conservadas asociadas con las simetrías espacio temporales de Lorentz-Poincaré se tienen: energía, impulso e impulso angular. En estos casos, ambos términos contribuyen a la densidad de corriente. Si se trata de simetrías internas, en que sólo se transforman los campos, mientras los puntos del espacio tiempo no sufren transformaciones, sólo el segundo término en (51) contribuye a la densidad de corriente. El ejemplo más notorio de este caso es la densidad de corriente eléctrica, asociada con la invarianza frente a transformaciones locales (de gauge) del grupo  $U(1)$  de la acción de la Electrodinámica.

Conocida la acción clásica, la cuantización se realiza en analogía con la cuantización de la mecánica de una partícula. En primer lugar, se determina la cantidad canónicamente

conjugada con cada uno de los campos (similares a los impulsos canónicamente conjugados de cada coordenada en el caso de una partícula):

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi_a)} (\Phi_a, \partial_\mu \Phi_b) .$$

De esta última ecuación, se despejan las derivadas de los campos,  $\partial_\mu \Phi_a (\Phi_a, \Pi_a)$  y se construye la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} (\Phi_a, \Pi_a) = \sum_a \Pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} (\Phi_a, \Pi_a) .$$

Finalmente, se pasa a la teoría cuántica transformando los campos y sus cantidades conjugadas canónicas en operadores e imponiendo, a tiempos iguales, las relaciones de conmutación (o, como veremos, de anticonmutación para campos de espín semientero):

$$\left[ \hat{\Phi}_a(t, \vec{x}), \hat{\Pi}_b(t, \vec{x}') \right] = i\mathcal{J} \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') ,$$

donde  $\mathcal{J}$  es el operador identidad,  $\delta_{ab}$  es la función delta de Kronecker ( $\delta_{ab} = 1$  si  $a = b$  y  $\delta_{ab} = 0$  si  $a \neq b$ ). Por otra parte,  $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$  es la distribución delta de Dirac. La misma puede definirse, aunque de modo poco riguroso, por sus dos propiedades principales:

$$\int_c^d dx' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = 1, \quad \int_c^d dx' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') f(x') = f(x), \quad \text{para } c < x < d ,$$

donde  $f(x)$  es cualquier función que sólo sea no nula en un intervalo finito.

Estudiaremos, a continuación, las acciones clásicas correspondientes a campos de espín cero (escalar), 1/2 (de Dirac) y 1 (electromagnético) libres, sus correspondientes ecuaciones clásicas de movimiento, simetrías internas y correspondientes cargas conservadas. En el caso del campo escalar, veremos cómo se pasa a la teoría cuántica. En los casos restantes, nos limitaremos a mencionar las principales diferencias del proceso de cuantización con el correspondiente a un campo escalar.

## V.2.2. Teorías de campos libres

### Teoría clásica para el campo escalar complejo libre con masa

La densidad lagrangiana para un campo escalar (espín cero) libre, con masa  $m$  está dada por:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi , \quad (52)$$

donde  $\varphi$  y  $\varphi^*$  serán tratados como campos independientes. Nótese que, según los requerimientos generales, esta densidad lagrangiana es invariante frente a transformaciones del grupo propio de Lorentz- Poincaré. En efecto, si  $\varphi$  y  $\varphi^*$  son escalares (permanecen invariantes ante tales transformaciones),  $\partial^\mu \varphi^*$  se transforma como un vector contravariante y

$\partial_\mu \varphi$  lo hace como un vector covariante. Por lo tanto la contracción de ambos (recordar que hay una suma implícita sobre  $\mu$ ) resulta invariante. El término de masa también lo es, de modo evidente.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (50) se escriben, en este caso:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = 0$$

y conducen, teniendo en cuenta la forma explícita de  $\mathcal{L}$ , a:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi^* = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0.$$

Se ve, entonces, que tanto  $\varphi$  como  $\varphi^*$  satisfacen, como ecuación clásica de movimiento, la ecuación de Klein-Gordon, estudiada en la sección V.1.1.

Aparte de la invarianza frente a transformaciones del espacio-tiempo, la teoría es invariante frente a las siguientes transformaciones de campos, que no afectan a las coordenadas:

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha} \varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi^*, \quad (53)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , cualquier número real, el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo.

Es muy fácil verificar que tal invarianza existe. En efecto, frente a dicha transformación de los campos se tiene:

$$\mathcal{L} \rightarrow \partial^\mu (e^{-i\alpha} \varphi^*) \partial_\mu (e^{i\alpha} \varphi) - m^2 e^{-i\alpha} \varphi^* e^{i\alpha} \varphi. \quad (54)$$

Dado que  $\alpha$  no depende del punto, las exponenciales pasan a través de las derivadas y se cancelan, resultando que el lagrangiano transformado coincide con el original. Nótese que estas transformaciones de los campos corresponden a multiplicarlos por una "matriz" unitaria de  $1 \times 1$  (si  $U = e^{i\alpha}$ ,  $U^\dagger = e^{-i\alpha}$  y se satisface la condición de unitariedad  $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ ). Se dice que la teoría tiene una invarianza  $U(1)$ , o que  $U(1)$  es una simetría interna de la teoría de un campo escalar.

Como se recordará, el teorema de Noether predice, entonces, la existencia de una densidad de corriente que satisface la ecuación de continuidad. Tal corriente, está dada por la expresión (51) que, en este caso, se reduce a:

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \delta \varphi^*.$$

Si consideramos variaciones infinitesimales de los campos, para las cuales  $e^{i\alpha} \sim 1 + i\alpha$  y  $e^{-i\alpha} \sim 1 - i\alpha$ , y derivamos la densidad lagrangiana (52), encontramos:

$$j^\mu = i\alpha (\varphi^* \partial^\mu - \varphi \partial^\mu \varphi^*). \quad (55)$$

Como vemos, esta densidad de corriente, salvo por el factor multiplicativo constante, que es siempre arbitrario, coincide exactamente con la densidad de corriente encontrada al estudiar la ecuación de Klein-Gordon.

Veremos aparecer el lagrangiano de un campo escalar (aunque no libre, sino acoplado a un potencial que permite realizar la ruptura de simetría) cuando estudiemos el término de Higgs en el lagrangiano de la teoría de Glashow-Salam-Weinberg para las interacciones electrodébiles.

### Cuantización del campo escalar complejo libre

La densidad lagrangiana (52) puede reescribirse haciendo explícita la suma sobre  $\mu$ , para obtener:

$$\mathcal{L} = \partial_0 \varphi^* \partial_0 \varphi - \sum_{i=1}^3 \partial_i \varphi^* \partial_i \varphi - m^2 \varphi^* \varphi .$$

Las cantidades canónicamente conjugadas de ambos campos son, entonces:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi} = \dot{\varphi}^* , \quad \Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi^*} = \dot{\varphi} . \quad (56)$$

La densidad Hamiltoniana, escrita en términos de  $\Pi$ ,  $\Pi^*$  y las derivadas de los campos resulta, entonces,

$$\Pi^* \Pi + \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi . \quad (57)$$

Ahora bien, dado que ambos campos satisfacen la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir las soluciones clásicas más generales para ambos en la forma:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \omega_k} \left( a_k e^{-i\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x}} + c_k e^{i\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \\ \varphi^* &= \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \omega_k} \left( b_k e^{-i\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x}} + d_k e^{i\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \right) , \end{aligned} \quad (58)$$

con  $\omega_k = +\sqrt{k^2 + m^2}$ . Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  multiplican soluciones de energía positiva ( $E = +\omega_k$ ). Los coeficientes  $c_k$  y  $d_k$ , en cambio, acompañan a las soluciones de energía negativa ( $E = -\omega_k$ ). Pero estos coeficientes indeterminados en ambas soluciones generales no son independientes, dado que los campos deben ser uno conjugado del otro. Por lo tanto,  $c_k = b_k^*$  y  $d_k = a_k^*$ , de modo que tenemos, para los campos clásicos:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \omega_k} \left( a_k e^{-i\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x}} + b_k^* e^{i\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \\ \varphi^* &= \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \omega_k} \left( b_k e^{-i\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x}} + a_k^* e^{i\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \right) . \end{aligned} \quad (59)$$

Ahora reemplazaremos los coeficientes indeterminados por operadores que actúan sobre un espacio vectorial abstracto, conocido como espacio de Hilbert. Reemplazaremos  $a_k$  y  $b_k$ , por sendos operadores  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_k$ . Los primeros, cada vez que actúan sobre un vector del espacio de Hilbert, destruyen una partícula de tipo  $a$ . Los segundos, destruyen partículas de tipo  $b$ . A ambos se los denomina operadores de destrucción. A su vez, los coeficientes numéricos  $a_k^*$  y  $b_k^*$  serán reemplazados por sendos operadores,  $\hat{a}_k^\dagger$  y  $\hat{b}_k^\dagger$ , adjuntos de los anteriores. Los primeros, actuando sobre el espacio de Hilbert, crean partículas de tipo  $a$  y los segundos, crean partículas de tipo  $b$ . A ambos se los denomina operadores de creación. Todos los vectores del espacio de Hilbert pueden obtenerse aplicando operadores de creación sobre uno, llamado el estado de vacío y anotado  $|0\rangle$ , que satisface:

$$\hat{a}_k |0\rangle = \hat{b}_k |0\rangle = 0, \forall k .$$

Así, por ejemplo,  $\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$  representa un estado en que existe una partícula de tipo  $a$ , con impulso  $k$ . A su vez,  $\hat{b}_{k'}^\dagger\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$  es un estado que contiene una partícula de tipo  $a$ , con impulso  $k$  y una de tipo  $b$ , con impulso  $k'$ .

Nótese que, en este paso, hemos reinterpretado la destrucción de partículas de energía negativa de un dado tipo ( $a$  o  $b$ ) con la creación de partículas, de energía positiva e impulso espacial invertido, del otro tipo ( $b$  o  $a$ , respectivamente). Veremos, más adelante, que las partículas de un dado tipo son antipartículas de las del otro tipo (contribuyen con signos opuestos a la carga  $U(1)$ ).

Ahora, nuestros campos se han transformado en operadores:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \left( \hat{a}_k e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \\ \hat{\varphi}^\dagger &= \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \left( \hat{b}_k e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \right).\end{aligned}\quad (60)$$

El campo  $\hat{\varphi}$  destruye partículas de tipo  $a$  y crea partículas de tipo  $b$ , mientras  $\hat{\varphi}^\dagger$  destruye partículas de tipo  $b$  y crea partículas de tipo  $a$ .

También  $\hat{\Pi}$  y  $\hat{\Pi}^*$  son ahora operadores sobre el espacio de Hilbert y, a partir de sus expresiones en (56) se ve que adoptan la forma:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= \partial_t \hat{\varphi}^\dagger = - \int d^3k \frac{i\omega_k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \left( \hat{b}_k e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \\ \hat{\Pi}^\dagger &= \partial_t \hat{\varphi} = - \int d^3k \frac{i\omega_k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \left( \hat{a}_k e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \right).\end{aligned}\quad (61)$$

Es sobre estos operadores y sobre los operadores de campo que debemos imponer las relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\left[ \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \left[ \hat{\varphi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\dagger(t, \vec{x}') \right] = i\mathcal{J}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

y los restantes conmutadores nulos. De imponer estas condiciones, resultan relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción:

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2\omega_k \mathcal{J} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (62)$$

El hamiltoniano, obtenido integrando (57) sobre toda la región espacial, también se ha transformado en un operador, y está dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger \right).$$

Utilizando las relaciones de conmutación (62), la última expresión puede reescribirse:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \mathcal{J} \delta^3(0) \right).$$

La delta de Dirac en el último término ha sido encomillada porque carece de sentido. En efecto, dicha distribución diverge cuando su argumento se anula. Para evitar esta verdadera catástrofe en la teoría, se impone, sobre todos los operadores de la teoría, la llamada prescripción de orden normal, que consiste en usar las reglas de conmutación para escribir todos los operadores de destrucción a la derecha de los operadores de destrucción, y eliminar los términos proporcionales al operador identidad. Adoptando esta prescripción tenemos, para el hamiltoniano de la teoría:

$$: \hat{H} := \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right) ,$$

donde el símbolo  $::$  indica que hemos tomado los operadores en orden normal.

Procediendo del mismo modo con la carga obtenida al integrar sobre todo el espacio  $j^0$ , dada en (55), se obtiene

$$: J^0 := \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\omega_k} \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right) .$$

Esta expresión justifica nuestra afirmación anterior. En efecto, las partículas de tipos  $a$  y  $b$  contribuyen a la carga cuántica con signos opuestos. Como consecuencia, unas son las antipartículas de las otras.

### Teoría de campos de Dirac (espín 1/2) libre con masa

En este caso, la densidad lagrangiana de la teoría clásica se escribe:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi , \quad (63)$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  es el espinor conjugado de Dirac ya definido.

A partir de este lagrangiano es fácil, tratando a  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  como campos independientes, determinar las ecuaciones clásicas de movimiento usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0,$$

que dan por resultado:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu - m) = 0,$$

donde  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  indica que las derivadas actúan sobre el espinor que está a su izquierda.

Obsérvese que  $\psi$  satisface la ecuación de Dirac. Nótese también que, si se reemplazan estas ecuaciones de movimiento en la densidad lagrangiano, la misma se anula, lo cual indica que se tiene una teoría clásica que es trivial. Sin embargo, la teoría cuántica que se deriva de ella no lo es.

Además de ser invariante frente a transformaciones espacio temporales del grupo de Lorentz-Poincaré, la acción respeta la simetría interna  $U(1)$  correspondiente a las transformaciones:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha},$$

con  $\alpha$  un número real arbitrario (el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo).

La densidad de corriente de Noether asociada con esta invarianza puede obtenerse a partir del teorema de Noether (51):

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi - \delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}.$$

Una vez calculadas las derivadas de (63) necesarias, y considerando transformaciones infinitesimales, para las cuales  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$ , se obtiene:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{64}$$

que coincide, salvo una eventual constante multiplicativa, con el tetravector discutido en la sección V.1.2. La integral de su componente cero es una carga conservada que, como veremos al estudiar la Electrodinámica Cuántica, donde la simetría  $U(1)$  se transforma en local (de gauge), no es otra cosa que la carga eléctrica de las partículas de materia masivas, representadas por espinores de Dirac.

En el caso particular de campos de Dirac sin masa existe, como puede demostrarse fácilmente recordando que  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ , otra simetría interna, conocida como  $U(1)$  quiral. En efecto, el lagrangiano resulta invariante frente a  $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha\gamma^5}$ . La correspondiente densidad de corriente de Noether es:

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi.$$

La cuantización de campos de Dirac se realiza de modo análogo a como lo hemos hecho en el caso escalar, salvo por una diferencia crucial: en lugar de las relaciones de conmutación (62), los operadores de creación y aniquilación (caracterizados ahora por un segundo subíndice, que rotula los posibles valores de la proyección del espín) satisfacen relaciones de anticonmutación:

$$\left\{ \hat{a}_{k,s}, a_{k',s'}^\dagger \right\} = \left\{ \hat{b}_{k,s}, b_{k',s'}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 2\omega_k \mathcal{J} \delta_{s,s'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Esta diferencia tiene una consecuencia de la mayor importancia: implica que, a diferencia de las partículas escalares, de las cuales un número ilimitado puede convivir en un mismo estado (tienen, por lo tanto, la estadística de Bose Einstein) las partículas de Dirac satisfacen la estadística de Fermi-Dirac y respetan, en consecuencia, el principio de exclusión. Este es un hecho general: las partículas de espín entero son bosones, las de espín semienteros son fermiones. Es interesante destacar aquí que sólo en el marco de la Teoría Cuántica de Campos Relativista puede demostrarse formalmente la relación espín-estadística.

**Teoría clásica para el campo vectorial (espín 1) sin masa: El Electromagnetismo sin fuentes en notación covariante de Lorentz**

La dinámica clásica del sistema se obtendrá escribiendo la densidad lagrangiana para el campo  $A$ , llamado potencial vector, de componentes  $A^0(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x})$ ,  $\vec{A} = \vec{A}_{nc}(t, \vec{x})$ , donde  $\phi(t, \vec{x})$  es el potencial escalar de la formulación no covariante de Lorentz y  $\vec{A}_{nc}(t, \vec{x})$  es el potencial vector de la misma formulación. (Recuerde que los campos electromagnéticos están dados por  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_0\vec{A}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ).

A partir del campo  $A$ , cuyas componentes se transforman ante transformaciones de Lorentz como corresponde a un tetravector contravariante (ver apéndice), puede definirse un tensor de segundo orden, dos veces covariante, conocido como tensor de campos, de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}, \quad (65)$$

donde hemos puesto de manifiesto que se trata de un tensor antisimétrico ante el intercambio de sus dos índices. La densidad lagrangiana de la teoría clásica se escribe de modo muy sencillo en términos del tensor de campos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Dado que los índices espacio-temporales están contraídos, se trata, evidentemente de un invariante de Lorentz. En términos del potencial vector, se tiene:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu).$$

Utilizando la fórmula de Euler-Lagrange para cada componente del campo se obtienen las ecuaciones clásicas de movimiento. Escritas en términos del tensor de campos, adoptan la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_j F^{j\nu} = 0.$$

Es directo verificar que, reescritas en términos de los campos eléctrico y magnético las mismas no son otra cosa que la ecuaciones de Maxwell llamadas inhomogéneas, en ausencia de cargas. En efecto, para  $\nu = 0$ , resulta  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , mientras los índices  $\nu$  espaciales conducen a  $-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$ .

Notemos que las dos restantes ecuaciones de Maxwell (homogéneas, incluso, en presencia de cargas) no aparecen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, son una consecuencia inmediata del carácter antisimétrico del tensor de campos, que satisface las llamadas identidades de Bianchi:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0.$$

Reescritas en términos de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , estas ecuaciones son  $\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Particularmente importante (como se verá cuando estudiemos la Electrodinámica cuántica) es la invarianza de la densidad lagrangiana ante transformaciones de los campos:

$$A_\mu(t, \vec{x}) \rightarrow A_\mu(t, \vec{x}) + \partial_\mu \alpha(t, \vec{x}),$$

donde la función  $\alpha(t, \vec{x})$  es invariante ante transformaciones de Lorentz.

A esta simetría interna se la conoce como invarianza de gauge del electromagnetismo, en ausencia de cargas. Veremos, en nuestro estudio de la Electrodinámica, donde el campo vectorial se acopla con la corriente  $U(1)$  de los campos de Dirac de materia, la invarianza de la teoría requiere la transformación simultánea de ambos tipos de campos.

Siempre de acuerdo con el teorema de Noether, La densidad de corriente que, en el presente caso, satisface la ecuación de continuidad es:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu A_\nu} \delta A_\nu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \alpha,$$

donde hemos usaddo la expresión explícita de  $\mathcal{L}$  y  $\delta A_\nu(t, \vec{x}) = \partial_\nu \alpha(t, \vec{x})$ .

Es interesante notar, aquí, que la carga conservada asociada con esta densidad de corriente es  $J^0 = \int d^3x j^0 = \int d^3x \partial_i (F^{0i} \alpha)$ . Dado que se trata de la integral sobre el volumen especial de una divergencia, se reduce a una integral sobre el borde de la región (en el infinito) que se anula si los campos, como ocurre en este caso, se anulan en el infinito.

La cuantización del campo electromagnético libre se realiza en forma muy similar a como lo hicimos para el campo escalar, salvo por algunas dificultades provenientes del carácter transversal del campo electromagnético, que obliga a imponer la anulación de sus componentes longitudinales durante el proceso de cuantización y conduce al llamado método de Gupta-Bleuler.

Es importante destacar que, como en el caso del campo escalar, se obtienen en ese proceso, relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación. Las partículas de la teoría resultan, como consecuencia, bosones. Tales partículas no son otra cosa que fotones, que satisfacen la estadística de Bose-Einstein. Además, como consecuencia de nuestra reciente discusión sobre la anulación de su carga, resulta que los fotones no se acoplan consigo mismos.

### V.2.3. Teorías de campos interactuantes

#### La Electrodinámica Cuántica (QED) y las reglas de Feynman

En Mecánica Clásica, el lagrangiano de una partícula en presencia de un campo electromagnético se obtiene reemplazando, en el lagrangiano libre:

$$E = p^0 \rightarrow p^0 - q A^0, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}$$

o, escrito en forma covariante de Lorentz,  $p^\mu \rightarrow p^\mu - q A^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , donde  $q$  es la carga eléctrica de la partícula ( $-|e|$  en el caso de electrones).

Teniendo en cuenta que, al pasar a la teoría de campos, se reemplaza  $p_\mu$  por  $-i\partial_\mu$ , resulta natural, para un campo de Dirac en interacción con el campo electromagnético, realizar en la acción libre el reemplazo  $-i\partial_\mu \rightarrow -i\partial_\mu - q A_\mu$  o, de manera equivalente,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iq A_\mu$ . La derivada así modificada se conoce como derivada covariante de gauge, por razones que resultarán claras más adelante. Se conoce a este modo de acoplar ambos campos en interacción se le da el nombre de acoplamiento mínimo.

Al realizar esta sustitución tendremos para la porción del lagrangiano correspondiente al campo de materia en interacción:

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi} (\gamma^\mu i D_\mu - m) \psi = \bar{\psi} [\gamma^\mu (i \partial_\mu + q A_\mu) - m] \psi. \quad (66)$$

Sumando a esta densidad lagrangiana la correspondiente al campo electromagnético libre, tendremos la densidad lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica (QED), dada por:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} [\gamma^\mu (i \partial_\mu + q A_\mu) - m] \psi. \quad (67)$$

Nótese que esta densidad lagrangiana contiene un término  $(\bar{\psi} [\gamma^\mu (i \partial_\mu) - m] \psi)$  correspondiente a partículas de materia libres, usualmente llamado término cinético del campo de materia, otro correspondiente al campo electromagnético libre, o término cinético del campo electromagnético  $(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$  y, finalmente, un término de interacción,  $q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ .

Aplicando la fórmula de Euler-Lagrange a todos los campos independientes de la teoría se obtienen, para el campo electromagnético, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

con  $j^\nu = q \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$  o, más explícitamente, en términos de los campos eléctrico y magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0 = q \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad -\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} = q \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi.$$

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas que, como ya comentamos, son consecuencia del carácter antisimétrico de  $F^{\mu\nu}$ , no cambian con respecto al caso libre.

Por su parte, los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  satisfacen:

$$(i \gamma^\mu D_\mu + m) \psi = 0, \quad \bar{\psi} (i \gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu - m) = 0,$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante de gauge antes definida. La primera de estas ecuaciones es la ecuación de Dirac correspondiente a un campo de materia en interacción con el campo electromagnético.

Es evidente, a partir de la expresión de la densidad lagrangiana (67) que la simetría  $U(1)$  característica del campo de Dirac libre,

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha},$$

con  $\alpha$  un número real arbitrario (el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo), también es una invarianza de QED.

Pero QED resulta también invariante frente a la transformación simultánea de todos los campos de la teoría:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha(t, \vec{x})}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(t, \vec{x}). \quad (68)$$

En efecto, es inmediato verificar (ver trabajo práctico 6) que, ante tal transformación, la derivada covariante satisface:

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(t, \vec{x})} D_\mu \psi.$$

Es, precisamente, debido a este hecho que la derivada así modificada recibe el nombre de derivada covariante (se transforma COMO el campo de materia). Esta ley de transformación, junto con la del campo  $\bar{\psi}$  y la invarianza de  $F^{\mu\nu}$  ante la transformación del campo electromagnético que conoce a la invarianza de nuestra densidad lagrangiana total de QED. A esta simetría interna se la conoce como invarianza  $U(1)$  (porque los campos de materia siguen siendo multiplicados por una fase escalar, que es una matriz unitaria de  $1 \times 1$ ) local (porque, ahora la fase cambia punto a punto del espacio-tiempo) o invarianza  $U(1)$  de gauge.

Es fácil verificar que los campos de materia contribuyen a la densidad de corriente de Noether correspondiente con  $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Es justamente ésta la densidad de corriente que aparece en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas para el campo electromagnético y actúa, por lo tanto, como fuente del mismo. Nótese, además, que el término de interacción en la densidad lagrangiana es, precisamente,  $j^\mu A_\mu$ .

La cuantización de los campos  $A_\mu$ ,  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  se realiza imponiendo condiciones de conmutación sobre los primeros y de anticonmutación sobre los dos últimos, según se explicó en el contexto de las correspondientes teorías libres. Este proceso conduce a una teoría de perturbaciones alrededor de la teoría libre, en la cual los órdenes sucesivos tienen números crecientes de lazos cerrados (loops) y, como consecuencia, potencias cada vez mayores de  $\hbar$ , cuando se recuperan las unidades físicas. Este desarrollo permite calcular, al orden deseado, las amplitudes de probabilidad de los diversos procesos de desintegración y dispersión predichos por QED.

Por ejemplo, si una partícula en reposo se desintegra en dos partículas finales, la probabilidad diferencial de desintegración se escribe:

$$d\Gamma = \frac{d}{2\hbar m_1} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) |M|^2 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_3},$$

donde  $d$  es un producto de factores  $\frac{1}{j!}$  por cada grupo de  $j$  partículas idénticas en el estado final,  $p_1$  es el tetraimpulso de la partícula inicial,  $p_2$  y  $p_3$  son los tetraimpulsos de las partículas en el estado final y la distribución delta de Dirac impone la conservación del tetraimpulso entre los estados inicial y final.

Similarmente, si se produce un choque entre dos partículas, que da origen a otras dos en el estado final,  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , la correspondiente probabilidad diferencial de ocurrencia del proceso, también conocida como sección eficaz del mismo, estará dada por

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 d}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1 m_2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |M|^2 \frac{c d^3 p_3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_3} \frac{c d^3 p_4}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_4},$$

y expresiones similares para procesos que involucran mayor número de partículas iniciales y/o finales. Toda la dinámica del proceso estudiado está contenida en  $M$  y es esta la

cantidad que se calcula en forma perturbativa en cada caso. Su valor puede representarse esquemáticamente usando los llamados diagramas de Feynman y las correspondientes reglas para obtener  $M$ , que se describen a continuación, en el espacio de impulsos.

El diagrama más simple es el de la figura 36

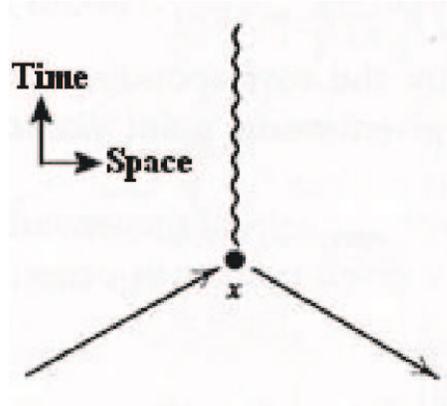


Figura 36: Diagrama correspondiente a un vértice

a) El punto  $x$  se denomina vértice. Por cada vértice debe incluirse un factor  $-i|e|\gamma^\mu$  (hemos supuesto que las partículas de materia son electrones y positrones, el valor absoluto de cuyas cargas es  $|e|$ ). Además, por cada vértice, debe escribirse un factor que imponga la conservación del tetraimpulso, dado por  $(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)$ , donde los tetraimpulsos entrantes aparezcan con signo positivo y los salientes, con signo negativo.

Las líneas que, como en este caso, están unidas a un único vértice y no forman lazos se denominan patas externas. Para ellas, las reglas de Feynman son las siguientes:

b) Las líneas rectas pueden representar electrones o positrones. Si tienen flechas entrantes al vértice, pueden representar electrones entrantes o positrones salientes, según el proceso que estemos estudiando. En el primer caso, debe incluirse en el cálculo una solución de la ecuación de Dirac (espinor) de energía positiva (factor  $u(s, p)$ ); en el segundo, una solución de la misma ecuación con energía negativa (factor  $v(p, s)$ ). Si, en cambio, se trata de líneas salientes del vértice, pueden representar un electrón saliente o un positrón entrante. En el primer caso debe incluirse en el cálculo un espinor conjugado de Dirac de energía positiva (factor  $\bar{u}(s, p) = u(s, p)\gamma^0$ ). En el segundo, un espinor conjugado de Dirac de energía negativa (factor  $\bar{v}(s, p) = v(s, p)\gamma^0$ ).

c) Las líneas onduladas representan fotones (cuantos del campo electromagnético). Si tienen una flecha entrante, debe incluirse un factor  $\epsilon^\mu$ , donde  $\epsilon$  es el vector de polarización del campo electromagnético. Si se trata de líneas salientes, el factor será, en cambio,  $(\epsilon)^*$ .

d) Los diagramas sin lazos, llamados diagramas de orden árbol, pueden presentar, además, líneas internas (que unen dos vértices), tanto rectas como onduladas. En el caso de las primeras, como la que aparece en el diagrama árbol para la aniquilación de un par electrón-positrón, para dar origen a dos fotones de la figura 37, debe incluirse en el cálculo un propagador de electrón o, equivalentemente, un factor  $i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$ . Si se trata de líneas

internas de fotón, como en el diagrama de dispersión electrón-electrón con intercambio de un fotón virtual de la figura 38, debe incluirse un propagador de fotón (factor  $-i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$ ).

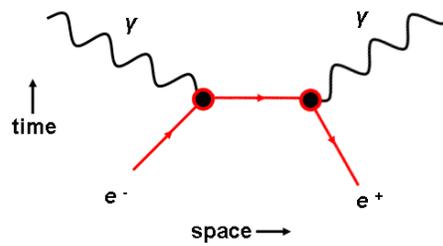


Figura 37: Diagrama árbol para la aniquilación de un par electrón-positrón

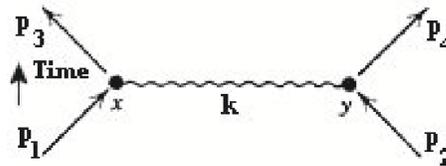


Figura 38: Diagrama árbol para la dispersión electrón-electrón

A órdenes superiores al orden árbol, aparecen las auténticas contribuciones cuánticas, en forma de diagramas con loops fermiónicos y/o fotónicos. Un ejemplo es el diagrama de la figura 39, que muestra la creación y posterior aniquilación de un par electrón-positrón virtual (no medible en forma directa). Atención: en esta figura, el tiempo corresponde al eje horizontal.



Figura 39: Creación y aniquilación de un par virtual

e) Para cada loop debe integrarse, además, sobre todos los impulsos de las líneas que lo recorren. Si se trata de un loop fermiónico, como el de la figura 39, debe agregarse, además, un factor  $-1$  y tomarse la traza de todas las matrices de Dirac que hayan aparecido.

Las reglas de Feynman a)-e) darán por resultado una delta de Dirac de conservación del tetraimpulso total, acompañada del factor  $iM$ . Es el módulo al cuadrado de este último factor el que permite calcular probabilidades de desintegración y secciones eficaces de dispersión, como ya dijimos.

Ahora bien, la integración sobre tetraimpulsos internos en los diagramas con loop conduce, en general, a la aparición de divergencias. Por ejemplo, el diagrama de la figura 40, conocido como autoenergía de electrón, requiere integrar sobre el impulso interno  $q$  un factor  $\frac{1}{q^2}$  proveniente del propagador del fotón, multiplicado por otro factor  $\frac{p'-q}{(p-q)^2} \sim \frac{1}{q}$ , proveniente del propagador del electrón. Aparte de factores numéricos se tiene, para impulsos grandes, una integral del tipo

$$\int d^4q \frac{1}{|q|^3},$$

que presenta una divergencia logarítmica para impulsos  $|q| \rightarrow \infty$ .



Figura 40: Autoenergía del electrón

Estas divergencias y otras, en potencias del impulso, aparecen a todos los órdenes al calcular diagramas con loops. Para dar sentido, aún así, a la Electrodinámica Cuántica, deben aplicarse los procedimientos de regularización y renormalización. El primero consiste en aislar las partes divergentes de las partes finitas. La renormalización, consiste en agregar, en el lagrangiano clásico, los llamados contratérminos, que tengan la misma dependencia de las constantes físicas que aparece en las divergencias aisladas. Como consecuencia, las constantes físicas renormalizadas no pueden predecirse, y deben ser determinadas mediante medidas experimentales. Para poder concretar este proceso de renormalización es necesario que la cantidad de divergencias de distintos tipos no supere el número de constantes físicas en el lagrangiano clásico, en cuyo caso se dice que la teoría es renormalizable. Este es el caso para QED, gracias a que la misma es invariante de gauge. Notar que tal invarianza está presente, porque los fotones no tienen masa. En efecto, la misma estaría rota de modo explícito si el campo mediador  $A_\mu$  tuviese un término de masa, que adoptaría la forma  $m_A^2 A^\mu A_\mu$  (verifique que este término no es invariante frente a las transformaciones (68)). Este es el problema que aparece al formular una teoría de campos cuántica para interacciones de corto alcance, como las interacciones débiles, en las cuales el campo mediador debe resultar efectivamente masivo, según veremos en breve.

### Teoría de Yang y Mills $SU(3)$ : la Cromodinámica Cuántica (QCD)

Como hemos visto, la invarianza de la acción de QED frente a transformaciones  $U(1)$  de gauge está asegurada por la elección de un acoplamiento mínimo entre campos de materia (masivos o no) y campos de gauge  $A^\mu$  sin masa. Tal simetría garantiza la obtención de una teoría cuántica de campos renormalizable y, por lo tanto, con sentido físico. Esta construcción de teorías invariantes de gauge puede extenderse a casos en que las transformaciones de campos de materia se realicen multiplicando por fases que no sean meros números reales (matrices de  $1 \times 1$ ), sino matrices unitarias de dimensiones mayores con determinante  $+1$ . Dado que tales matrices, en general, no conmutan entre sí, el grupo de transformaciones que dejan la acción invariante será un grupo no conmutativo, también llamado no abeliano. La idea de representar las restantes interacciones fundamentales con tales teorías fue introducida, en 1954, por Chen-Ning Yang (1922-) y Robert Mills (1927-1999).

Entre estas teorías de gauge, aquella basada en el grupo  $SU(3)$  se conoce como Cromodinámica Cuántica (QCD) y describe la interacción fuerte entre quarks. Esta teoría se construye de modo muy similar a como se construye QED, pero exigiendo ahora la invarianza frente a transformaciones de los campos fermiónicos frente a transformaciones de fase locales caracterizadas por matrices del grupo  $SU(3)$  (de  $3 \times 3$ , unitarias, con determinante  $+1$ ). Tales matrices pueden escribirse como:

$$U(\theta_1, \dots, \theta_8; x) = e^{i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)} .$$

En esta expresión,  $T_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$  son los llamados generadores del grupo, matrices de  $3 \times 3$  autoadjuntas, de traza nula,  $\theta_a(x)$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$  son ocho funciones arbitrarias de los puntos del espacio-tiempo, que hemos denominado  $x$ . En estas condiciones, es fácil verificar que las matrices  $U(\theta_1, \dots, \theta_8; x)$  resulta, en efecto, ser unitarias y tener determinante  $+1$ .

Deseamos construir una densidad lagrangiana que resulte invariante frente a las transformaciones de fase de los campos de materia fermiónicos

$$\psi(x) \rightarrow e^{i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)}, \quad (69)$$

combinadas con adecuadas transformaciones de los campos de gauge. Dado que  $U(\theta_1, \dots, \theta_8; x)$  es una matriz de  $3 \times 3$ , los campos fermiónicos serán, ahora, vectores de tres componentes (tripletes), caracterizadas por un índice llamado color:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)_r \\ \psi(x)_g \\ \psi(x)_b \end{pmatrix} .$$

Aquí,  $r, g, b$  representan los tres posibles valores de dicho índice, llamados colores rojo, verde y azul (de ahí el nombre de Cromodinámica). Por supuesto, cada una de las tres componentes será, además un espinor de Dirac de cuatro componentes.

Los campos de gauge  $G_\mu$  de la teoría son, como los de QED no masivos. Pero, a diferencia del caso  $U(1)$ ,  $G_\mu$  es una matriz de  $3 \times 3$ , que puede escribirse como

$$G_\mu = \sum_{a=1}^8 G_\mu^a(x) T_a .$$

Aparecen, entonces, ocho campos de gauge  $G_\mu^a(x)$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$ , mediadores de la interacción fuerte, conocidos como gluones. Las transformaciones de los quarks dadas por la ecuación (69) dejarán invariante la acción si, al mismo tiempo, los campos de gluones se transforman según

$$G_\mu \rightarrow U(x) G_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x) , \quad (70)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento de las interacciones fuertes, que aparecerá en el acoplamiento mínimo entre campos de materia y campos de gauge. Tal acoplamiento invariante de gauge se logra mediante la derivada covariante de gauge:

$$D_\mu \psi_a = \sum_{b=1}^3 (\partial_\mu I_{3 \times 3} - i g_s G_\mu)_{ab} \psi_b .$$

Con estas definiciones, la porción de la densidad lagrangiana correspondiente a los términos cinético y de masa para quarks de un dado sabor (up, down, charm, strange, top, bottom), más el término de interacción quarks-gluones, se escribe:

$$\mathcal{L}_1 = i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi ,$$

donde  $m$  es la masa de los quarks del sabor que estamos tratando y toma el mismo valor para las tres posibles componentes de color del mismo.

Es fácil demostrar que, ante las transformaciones simultáneas (69) y (70),  $D_\mu \psi \rightarrow U(x) D_\mu \psi$  y, por lo tanto,  $\mathcal{L}_1$  permanece invariante.

Para completar la densidad lagrangiana de QCD falta, aún, determinar el término cinético para los gluones. Con tal finalidad, definiremos un tensor de campos (notar el término extra con respecto a  $F_{\mu\nu}$  de QED, debido al carácter no conmutativo de QCD):

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + i g_s (G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu) .$$

El término cinético para los gluones en la densidad lagrangiana de QCD se escribe:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} \text{tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] ,$$

donde  $\text{tr}$  significa que debe tomarse la traza sobre las matrices de  $SU(3)$  que aparecen. Este término también resulta invariante ante transformaciones de gauge y, por lo tanto, toda la densidad lagrangiana lo es.

La densidad de corriente de Noether asociada con la simetría de gauge  $SU(3)$  puede calcularse del modo habitual y sus componentes resultan:

$$j_a^\mu = g_s \left[ \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi + \sum_{b,c=1}^8 f_{abc} G_{\nu b} G_c^{\nu\mu} \right], \quad (71)$$

donde las constantes  $f_{abc}$  se conocen como constantes de estructura del grupo  $SU(3)$  y están dadas por  $[T_a, T_b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} T_c$ .

Obsérvese que hay una contribución no trivial a esta corriente debida a los campos mediadores (gluones). A diferencia de lo que ocurre en QED, la correspondiente contribución a la carga de color no se anula. Esto ocurre como consecuencia del carácter no abeliano de QCD. Por lo tanto, los gluones tienen carga y, en consecuencia, sufren la interacción fuerte o, lo que es equivalente, son autointeractuantes. Esto se ve también escribiendo las ecuaciones clásicas de movimiento de QCD, que son:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi &= 0 \\ \partial_\mu G_a^{\mu\nu} &= j_a^\nu, \end{aligned}$$

donde  $j_a^\nu$  está dada por la ecuación (71).

Esta autointeracción de los gluones conduce, al cuantizar la teoría, a la aparición de nuevos tipos de vértices, como los de las figuras 41 y 42, en los diagramas de Feynman.

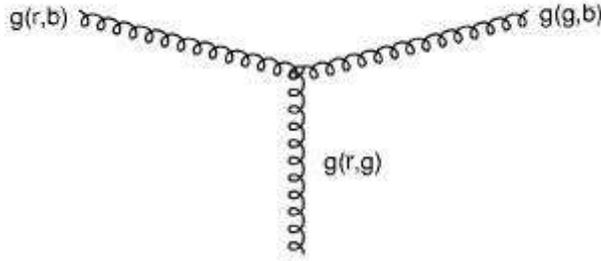


Figura 41: Vértice de tres gluones debido a la autointeracción

La existencia de estos nuevos vértices tiene consecuencias notables, que se manifiestan al calcular la constante de acoplamiento renormalizada de la teoría. En efecto, ellos conducen a una constante de acoplamiento que tiende a cero a grandes energías (ultravioleta). Este régimen, en que los quarks se comportan como partículas prácticamente libres, se conoce como el régimen de libertad asintótica y las predicciones de la teoría de perturbaciones han sido confirmadas en los experimentos de altas energías, donde se encuentra que los resultados experimentales coinciden con las predicciones de QCD perturbativa.

En cambio, también debido a la autointeracción de los gluones, la constante de acoplamiento renormalizada de QCD crece sin límite al disminuir la energía (infrarrojo). Este régimen se conoce como de esclavitud infrarroja y, para bajas energías (equivalentes a

grandes distancias), la teoría de perturbaciones deja de tener sentido. Es, justamente, para grandes distancias, que QCD debería ser capaz de predecir el confinamiento de los quarks y dar origen a una teoría efectiva para la fuerza nuclear entre protones y neutrones. Pero una solución exacta, no perturbativa, de QCD no existe hasta el presente.

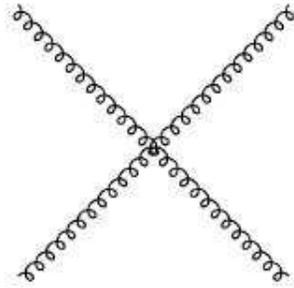


Figura 42: Vértice de cuatro gluones debido a la autointeracción

### Teoría de Glashow-Salam-Weinberg de las interacciones Electrodébiles. Mecanismo de Higgs

Como ya hemos comentado, durante muchos años se intentó, sin éxito, formular una teoría de campos de gauge para las interacciones débiles. El principal problema a resolver fue cómo dar masa a los campos mediadores (requisito para obtener una teoría de corto alcance) sin romper explícitamente la invarianza de gauge, crucial para mantener la renormalizabilidad de la teoría. La respuesta a este dilema consistió en incluir, en el lagrangiano, además de los campos de Dirac y los mediadores necesarios, un campo escalar adicional, con su término cinético más un potencial elegido de manera adecuada, a fin de aplicar el mecanismo debido a Peter Higgs (1929-), basado en la ruptura espontánea de la simetría de gauge. Utilizando este mecanismo, Sheldon Glashow (1932-), Abdus Salam (1926-1996) y Steven Weinberg (1933-) consiguieron elaborar una teoría renormalizable unificada para las interacciones débiles y electromagnéticas. Dicha teoría cuántica de campos, que respeta la invarianza  $SU(2) \times U(1)$  de gauge, no sólo reprodujo todos los hechos experimentales ya conocidos acerca de las interacciones débiles, sino que realizó predicciones (como las masas de los mediadores y la existencia de nuevos procesos de dispersión debidos a la interacción débil, conocidos como procesos de corriente neutra) que fueron verificadas a posteriori. Describiremos, a continuación, las principales características del lagrangiano clásico de este modelo, incluyendo una presentación del mecanismo de Higgs. Al final de la sección comentaremos sobre los aciertos y las deficiencias de la teoría cuántica resultante.

#### a) Sector de Higgs

Para empezar, construiremos un lagrangiano invariante frente a transformaciones locales (de gauge) de  $SU(2) \times U(1)$ , para un campo escalar de Lorentz de dos componentes

complejas,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $e^{i\alpha_0}T_0$ , con  $\alpha_0$  real y constante y  $T_0$  la matriz identidad de  $2 \times 2$  es un elemento arbitrario del grupo  $U(1)$  y  $U = \sum_{k=1}^3 e^{i\alpha_k T_k}$ , con  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  parámetros reales constantes arbitrarios) y

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

los generadores de  $SU(2)$  en la representación fundamental, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \quad (72)$$

con  $V$  un potencial arbitrario, pero dependiente sólo de  $\phi^\dagger \phi = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ , resulta invariante frente a:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha_0} T_0 \sum_{k=1}^3 e^{i\alpha_k T_k} \phi,$$

que es una transformación general de  $SU(2) \times U(1)$ .

Para transformar esta simetría en local, deben introducirse cuatro campos vectoriales: uno que escribiremos como  $B_\mu(x)T_0$ , asociado con  $U(1)$ , que es un grupo abeliano, como en QED, y otros tres asociados con  $SU(2)$ , escritos como  $W_\mu = \sum_{k=1}^3 W_{\mu,k} T_k$ , que se transformen según

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{g_1} \partial_\mu \alpha_0(x), \quad W_{\mu,k} \rightarrow W_{\mu,k} + \frac{1}{g_2} \partial_\mu \alpha_k(x), \quad k = 1, 2, 3,$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son las constantes de acoplamiento asociadas con  $U(1)$  y  $SU(2)$  respectivamente.

A continuación, deben reemplazarse las derivadas parciales en (73) por derivadas covariantes de gauge:

$$D_\mu \phi = [\partial_\mu I_{2 \times 2} - ig_1 B_\mu T_0 - ig_2 W_\mu] \phi$$

para obtener

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \quad (73)$$

que es la densidad lagrangiana invariante para el campo escalar. Volveremos, en el punto c), sobre la cuestión de cómo elegir el potencial  $V$  para llevar a cabo el mecanismo de Higgs y dar, así, masa a los campos mediadores.

b) Sector de gauge

Para los campos mediadores, definiremos tensores de campos dados por:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad W_{\mu\nu} = [\partial_\mu + ig_2 W_\mu] W_\nu - [\partial_\nu + ig_2 W_\nu] W_\mu$$

y escribiremos densidades lagrangianas, también invariantes de gauge,

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^3 W_k^{\mu\nu}W_{\mu\nu,k}.$$

Resulta más conveniente definir nuevos campos de gauge, combinaciones lineales de los anteriores, dados por:

$$W_\mu^+ = \frac{W_{\mu,1} + iW_{\mu,2}}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^- = \frac{W_{\mu,1} - iW_{\mu,2}}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^3 = W_{\mu,3}$$

y sus respectivos tensores de campos, con lo cual la densidad lagrangiana de los campos de gauge se escribe como:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\mu\nu,3}W_{\mu\nu}^3 - \frac{1}{2}W^{\mu\nu,+}W_{\mu\nu}^- . \quad (74)$$

### c) Mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs comienza por elegir, para  $V$  de la ecuación (73) la forma particular  $V(\phi^\dagger\phi) = \frac{m^2}{2v^2}(\phi^\dagger\phi - v^2)^2$ , con  $v$  una constante real. A partir de la misma ecuación, puede mostrarse que la energía alcanza un mínimo cuando los campos de gauge se anulan y  $\phi(x)$  toma un valor constante que minimiza este potencial. La figura 43 muestra la forma que adopta  $V(\phi^\dagger\phi)$ .

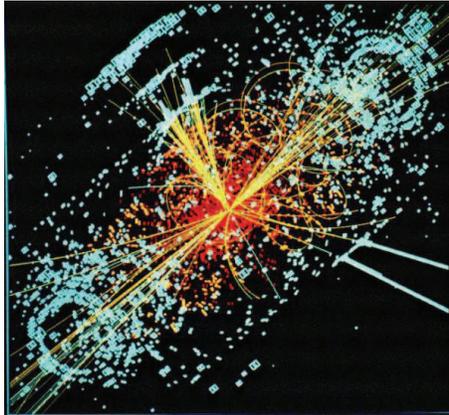


Figura 43: Potencial de Higgs

Es claro que el valor mínimo (nulo) se alcanza para cualquier  $\phi$  constante tal que  $\phi^\dagger\phi = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = v^2$ . Hay, por lo tanto, infinitos estados fundamentales posibles. Dado uno cualquiera de ellos,  $\phi$ , tal que  $\phi^\dagger\phi = v^2$ , todos los  $\phi'$  obtenidos mediante transformaciones de gauge también minimizarán la energía y serán, por lo tanto, posibles estados fundamentales de nuestra teoría. En efecto, si  $\phi' = \sum_{k=0}^4 e^{i\alpha_k T_k} \phi$ , se tiene que

$\phi^\dagger \phi' = \phi^\dagger \phi = v^2$ . El mecanismo de Higgs consiste en realizar una ruptura espontánea de la simetría de gauge, eligiendo uno de estos infinitos posibles estados fundamentales.

Elegiremos, en particular,  $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ . La cantidad  $v$  se conoce como el valor medio de vacío del campo  $\phi$ .

Escribiremos todos los estados posibles como un desarrollo alrededor del estado fundamental:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Reemplazando esta expresión en  $V$ , se obtiene:

$$V(h) = m^2(h(x))^2 + m^2 \frac{(h(x))^3}{\sqrt{2}v} + m^2 \frac{(h(x))^4}{8v^2}.$$

En este punto, puede hacerse una última redefinición de los campos de gauge, llamando

$$A_\mu = W_{\mu,3} \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W, \quad Z_\mu = W_{\mu,3} \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W$$

donde  $\theta_W$  es el llamado ángulo de Weinberg, definido por:

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

y conservando  $W_\mu^+$  y  $W_\mu^-$ .

Al hacer esta redefinición, la densidad lagrangiana total de los sectores de Higgs y de gauge resulta ser la suma de los dos términos,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ . De ellos, sólo escribiremos el primero, que nos permitirá interpretar los campos remanentes y discutir la determinación experimental de los parámetros introducidos hasta aquí. Este primer término está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \\ &- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} v^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \\ &- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2} [(D_\mu W_\nu^+)^* - (D_\nu W_\mu^+)^*] [(D^\mu W^{+,\nu} - (D^\nu W^{+,\mu})] \\ &+ \frac{1}{2} g_2^2 v^2 W_\mu^- W^{+,\mu}, \end{aligned} \tag{75}$$

donde  $D_\mu = \partial_\mu + i g_2 \sin \theta_W A_\mu$ .

Identificamos aquí cinco campos: un campo escalar  $h$ , de masa  $m$ . Este es el famoso campo escalar de Higgs, cuya búsqueda es uno de los objetivos más importantes de los actuales experimentos del CERN, realizados usando en LHC (Large Hadron Collider).

Los restantes son identificados con el mediador de las interacciones electromagnéticas,  $A_\mu$ , de masa nula, y con los mediadores de las interacciones débiles cargadas,  $W_\mu^+$  y  $W_\mu^-$ , y de las interacciones débiles neutras,  $Z_\mu$ . Repetimos a qué que, cuando se formuló el modelo de Glashow-Salam-Weinberg, este último tipo de procesos no había sido aún medido. Su posterior detección fue una de las grandes confirmaciones del modelo teórico. De la misma contribución a la densidad lagrangiana puede verse que

$$M_W = \frac{v g_2}{\sqrt{2}}, \quad M_Z = \frac{v}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

La medida experimental de estas masas, dadas por  $M_W = 80,425 \pm 0,038$  GeV y  $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021$  GeV permite determinar  $\cos \theta_W = 0,8810 \pm 0,0016$ .

El último término determina, vía la derivada covariante, la interacción de  $W_\mu^+$  y  $W_\mu^-$  con el mediador de las interacciones electromagnéticas,  $A_\mu$ . De allí se ve que  $W^\pm$  son cargados, con cargas  $\pm e = \pm g_2 \sin \theta_W = \pm g_1 \cos \theta_W$ .

Por otra parte, de  $v = \frac{\sqrt{2}M_W}{g_2} = \frac{\sqrt{2}M_W \sin \theta_W}{e}$ , resulta para el valor esperado de vacío el valor  $v = 180$  GeV.

Así, el único parámetro indeterminado en estos sectores del modelo es la masa  $m$  del bosón de Higgs.

En cuanto a  $\mathcal{L}_2$ , esta parte de la densidad lagrangiana determina los restantes tipos de vértices de interacción entre los cinco campos ya mencionados.

#### d) El sector leptónico

Para completar el modelo, debemos discutir cómo se incluyen, en la densidad lagrangiana los campos de materia, que incluyen tanto leptones como quarks. Comenzaremos por los primeros.

El modelo supone que existen tres sectores leptónicos idénticos, salvo por los diferentes valores de sus masas, también llamados familias o generaciones. Se trata de las familias del electrón, del muón y de la partícula  $\tau$ . Describiremos la inclusión de la familia leptónica en el modelo. Las densidades lagrangianas para las otras dos familias se obtienen por la simple sustitución de  $m_e$  por  $m_\mu$  o  $m_\tau$ , según el caso.

Para construir el lagrangiano de este sector, se considera que las componentes izquierdas del electrón y de su correspondiente neutrino constituyen un doblete de  $SU(2)$ , mientras que el neutrino no tiene componente derecha (para reproducir el resultado experimental, según el cual no existen neutrinos derechos) y la componente derecha del electrón es un singulete de  $SU(2)$ . Es decir, si  $e_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi_e$  y  $e_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi_e$ , donde  $\psi_e$  es un espinor de Dirac, se tiene:

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad R_e = e_R.$$

Aparte de su acoplamiento con los campos de gauge, estos campos tienen un término de masa:

$$\mathcal{L}_e^{masa} = -c_e \left[ (L^\dagger \phi) e_R + e_R^\dagger (\phi^\dagger L) \right],$$

donde  $c_e$  es una constante, hasta aquí indeterminada.

Luego de aplicar el mecanismo de Higgs, este término se escribe:

$$\mathcal{L}_e^{masa} = -c_e v (e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L) - \frac{c_e h(x)}{\sqrt{2}} (e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L). \quad (76)$$

Como vimos antes, el mecanismo de Higgs da masa a los mediadores de las interacciones débiles. Ahora vemos que también da masas a los electrones. En efecto, se ve de la última ecuación que  $c_e v = m_e$ . Introduciendo los valores numéricos de la masa del electrón y del valor medio de vacío del campo  $\phi$ , la constante  $c_e$  queda determinada. Su valor es  $c_e = 2\sqrt{2} \times 10^{-6}$ . Nótese que el mecanismo no ha generado masa para el neutrino, resultado que es consistente con las cotas experimentales existentes.

Además (76) predice un acoplamiento del electrón con el bosón de Higgs, proporcional a  $c_e$  y, por lo tanto a la masa del electrón. Está claro, entonces, que el bosón de Higgs tendrá interacciones mayores con los leptones de las otras dos familias, que son más pesados que el electrón. El neutrino no se acopla al bosón de Higgs.

Los términos de la densidad lagrangiana que no hemos escrito aquí, debidos al acoplamiento mínimo del electrón con los campos de gauge mediante la derivada covariante de gauge serán de distintos tipos: los usuales electromagnéticos, debidos al acoplamiento con  $A_\mu$ , en los cuales el neutrino no participa, los correspondientes a procesos débiles cargados (debidos al acoplamiento con  $W^\pm$ , y los correspondientes a procesos débiles neutros, mediados por  $Z_\mu$ . Términos de interacción de los dos últimos tipos aparecen tanto para el electrón como para el correspondiente neutrino.

#### e) El sector de quarks

Sabemos que los quarks, además de sentir la interacción fuerte, descrita por la Cromodinámica Cuántica, sufren interacciones electromagnéticas y débiles. Para incluirlos en el modelo de Glashow-Salam-Weinberg, se procede en forma análoga a lo hecho para leptones, aunque con algunas diferencias menores. Existen tres familias de quarks, la familia del quark up, la del quark charm y la del quark top. También en este caso, la primera familia es la más liviana y la última, la más pesada. Pero, en cada familia, la segunda componente del doblete izquierdo es una combinación lineal de todos los quarks restantes, realizada mediante una matriz unitaria de  $3 \times 3$ , llamada matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa,  $K$ . Así, se tiene, para cada una las tres familias, un doblete y dos singletes de  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} L_u &= \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, & u_R, & d'_R, \\ L_c &= \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, & c_R, & s'_R, \\ L_t &= \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, & t_R, & b'_R, \end{aligned} \quad (77)$$

donde

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} .$$

La matriz  $K$ , dado que es una matriz unitaria de  $3 \times 3$  implica la introducción, en el modelo, de nuevos parámetros (sus elementos independientes).

Como en el caso de los leptones, el acoplamiento de estos campos con el campo  $\phi$  otorga masas a los quarks una vez aplicado el mecanismo de Higgs y predice sus acoplamientos con el bosón de Higgs. A diferencia del neutrino, todos los quarks se acoplan con  $h$  y con todos los campos de gauge.

La figura 44 muestra algunos de los diagramas predichos por el modelo de Glashow-Salam Weinberg que involucran campos de materia.

Figura 44: Algunos procesos que involucran campos de materia

Por otra parte, en la figura 45 se muestra un esquema de todas las partículas (tanto de materia como mediadoras) que intervienen en el modelo estándar de las interacciones fundamentales.

Figura 45: Partículas del modelo estándar

#### V.2.4. Virtudes y defectos del modelo estándar de las interacciones fundamentales

Hemos realizado, a lo largo de esta última parte de los apuntes, una presentación del llamado modelo estándar de las interacciones fundamentales, basado en teorías Cuánticas de gauge. De estas teorías, la Cromodinámica Cuántica (QCD), con simetría de gauge  $SU(3)$  describe la interacción fuerte entre quarks, mientras que el Modelo de Glashow-Salam-Weinberg (GSW), basado en la simetría  $SU(2) \times U(1)$  y en el mecanismo de Higgs,

da una descripción unificada de las interacciones electromagnéticas (que sufren todas las partículas con carga eléctrica) y débiles (de las cuales participan todas las partículas elementales).

Ya hemos comentado que QCD predice muy exitosamente el comportamiento de los quarks a altas energías o, equivalentemente, cortas distancias, testado experimentalmente. Sin embargo, su comportamiento no perturbativo a bajas energías (grandes distancias) impide explicar el origen del confinamiento de los quarks en el interior de los hadrones y deducir, de primeros principios, una teoría efectiva para la fuerza nuclear entre dichos hadrones.

Los éxitos del modelo de GSW han sido aún más impresionantes: predijo, antes de su medida, la existencia de  $W^\pm$  y de los quarks top y bottom, luego detectados. Anticipó, también, la existencia de procesos débiles de corriente neutra, efectivamente medidos después. Sin embargo, hasta el presente, el bosón de Higgs no se ha detectado en los experimentos. Un resultado positivo de los experimentos que se realizan en el LHC del CERN sería la confirmación definitiva de la validez del modelo.

Aún en este caso, hay cuestiones u objeciones más profundas que pueden hacerse al modelo de GSW: qué dicta la forma tan particular del potencial de Higgs, que permite aplicar el mecanismo de Higgs y dar masa tanto a los mediadores de la interacción débil como a los campos de materia? Por qué es necesario introducir tantos parámetros arbitrarios en el lagrangiano inicial de la teoría?

En general, hay muchas preguntas esperando respuesta: si las interacciones electromagnéticas y débiles admiten una descripción unificada, por qué no puede unificarse con ellas la interacción fuerte? Aún pero: hay una fuerza fundamental, la gravitatoria, que ni siquiera admite una formulación como teoría cuántica. Tal teoría, tal como se formularía siguiendo el modelo de las restantes, resultaría no renormalizables.

Los intentos de resolver estas incógnitas son numerosos en la actualidad y van desde el estudio de eventuales teorías de campos de gauge unificadas, basadas en grupos de simetría mayores, hasta las teorías de cuerdas y branas supersimétricas.

**Parte VI**  
**Agradecimientos**



---

Agradezco las numerosas sugerencias y aportes al contenido de estos apuntes realizados por los Profesores José Luis Alessandrini, Huner Fanchiotti y Fidel Schaposnik. Reservo un reconocimiento especial para el Profesor Carlos García Canal por su detallada, paciente y crítica lectura del material, que se tradujo en numerosas correcciones y sugerencias, utilísimas a la hora de conseguir una presentación tan clara clara y consistente como estuvo a mi alcance realizar.



## **Parte VII**

### **Apéndice 1: Breve repaso de espacios vectoriales, cambios de coordenadas y tensores.**



## VII.1. Espacio vectorial

La definición general de espacio vectorial es la generalización abstracta del espacio de vectores físicos en el espacio tridimensional. Estos vectores están unívocamente caracterizados por su módulo, dirección y sentido (aceptando que todos los trasladados de uno dado son equivalentes al original). Llamaremos  $\mathcal{V}$  al conjunto formado por todos los vectores Físicos.

Para tales vectores se definen dos operaciones:

A) Suma de vectores (dada por la regla del paralelogramo), que satisface las siguientes propiedades

1. Dados  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ , su suma  $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{z}$  da por resultado otro vector físico  $\vec{z} \in \mathcal{V}$ . Dicho de otro modo: la suma de vectores es una operación cerrada.
2.  $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$ . La suma de vectores es una operación conmutativa.
3. Existe un elemento neutro para esa suma, llamado el vector nulo y anotado  $\vec{0}$ , caracterizado por ser el único vector de módulo cero, tal que  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$ .
4.  $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$  existe  $-\vec{x} \in \mathcal{V}$ , llamado el vector opuesto de  $\vec{x}$ , tal que  $\vec{x} + -\vec{x} = -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}$ .

Dado que se satisfacen las propiedades A), se dice que la estructura integrada por el conjunto  $\mathcal{V}$  y la operación  $\oplus$  (anotada  $\{\mathcal{V}, \oplus\}$ ) es un grupo abeliano.

B) Producto de un vector por un escalar perteneciente al cuerpo de los números reales,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , también cerrada, tal que da origen a otro vector  $\vec{t} = \lambda \otimes \vec{x}$ , con módulo  $|\vec{t}| = |\lambda| |\vec{x}|$  ( $|\lambda|$  es el valor absoluto del número real), la misma dirección que  $\vec{x}$  y el mismo sentido si  $\lambda > 0$ , sentido opuesto si  $\lambda < 0$ . (observar que  $0\vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x}$ ). Esta segunda operación satisface las propiedades (las letras griegas representan números reales, las romanas representan vectores):

1. Es cerrada, es decir  $\vec{t} = \lambda \otimes \vec{x} \in \mathcal{V}$ .
2.  $\alpha \otimes (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \otimes \vec{x} + \alpha \otimes \vec{y}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ . El producto por escalar es distributivo con respecto a la suma de vectores.
3.  $(\alpha + \beta) \otimes \vec{x} = \alpha \otimes \vec{x} \oplus \beta \otimes \vec{x}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$  (+ representa la suma usual de números reales).
4.  $(\alpha \cdot \beta) \otimes \vec{x} = \alpha \otimes (\beta \otimes \vec{x}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$  (. representa el producto usual entre elementos del cuerpo de los números reales).
5.  $1 \otimes \vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$  (1 es el número 1 real).

Todo lo dicho para los vectores físicos puede generalizarse a un conjunto  $\mathcal{V}$  arbitrario, a cuyos elementos, anotados con letras romanas (nos ahorraremos las flechas), llamaremos vectores, a un cuerpo arbitrario  $K$ , no necesariamente numérico, con ciertas operaciones  $\oplus, \otimes, +, \cdot$  debidamente definidas, cuyos elementos anotaremos con letras griegas. Se dirá, entonces, que la estructura  $\{\mathcal{V}, K, \oplus, \otimes, +, \cdot\}$  es un espacio vectorial si se cumplen todas las propiedades A) y B).

Por ejemplo: con cada punto del espacio tridimensional puede identificarse una terna ordenada de números reales. El conjunto  $\mathbb{R}^3$  de todas las ternas ordenadas de números reales:

$$\mathbb{R}^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \oplus (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2) \\ \lambda \otimes (\alpha, \beta, \gamma) &= (\lambda \cdot \alpha, \lambda \cdot \beta, \lambda \cdot \gamma), \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (78)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales.

## VII.2. Bases y cambios de base

$n$  vectores,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  se dicen linealmente independientes si la ecuación  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$  sólo puede satisfacerse para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . De lo contrario (si puede satisfacerse con alguno de los escalares distinto de cero) se dirá que los vectores son linealmente dependientes.

Un conjunto ordenado  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $n$  vectores de un espacio vectorial se llama una base de dicho espacio si:

1. Los  $n$  vectores son linealmente independientes.
2. Todo vector del mismo espacio vectorial puede ser escrito como alguna combinación lineal de esos  $n$  vectores (se dice que los  $n$  vectores generan a todo el espacio vectorial).

Por ejemplo, los vectores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  y  $e_3 = (0, 0, 1)$  constituyen una base ordenada  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , conocida como base canónica de ese espacio vectorial. Verifique que son linealmente independientes. En esa base, un vector arbitrario  $x = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  puede escribirse como  $x = (\alpha, \beta, \gamma) = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$ , con  $\xi^1 = \alpha, \xi^2 = \beta, \xi^3 = \gamma$ . Los tres números reales  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  se llaman las componentes de  $x$  en la base canónica.

Pero podríamos elegir una base distinta del mismo espacio vectorial. Por ejemplo  $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ , con  $f_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $f_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$ , con  $0 < \theta < 2\pi$  es otra posible base ordenada. En esta base, las componentes del vector  $x$  serán distintas de las que tenía en la base canónica.

Las componentes en la nueva base pueden encontrarse construyendo la llamada matriz  $S$  de cambio de base, como sigue:

Se desarrollan los vectores de  $\mathcal{B}'$  en la base  $\mathcal{B}$ , que resultan:

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 + 0e_3 \\ f_2 &= -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 + 0e_3 \\ f_3 &= 0e_1 + 0e_2 + 1e_3. \end{aligned}$$

Los coeficientes en cada línea de la expresión anterior son las columnas de la matriz  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Nótese que se satisface, para la relación entre los vectores de ambas bases:

$$f_i = \sum_{k=1}^3 S_i^k e_k \quad i = 1, 2, 3. \quad (80)$$

Las coordenadas  $\xi'$  del vector  $x$  en la base  $\mathcal{B}'$  están relacionadas con sus componentes  $\xi$  en la base canónica  $\mathcal{B}$  por  $\xi'^i = \sum_{j=1}^3 (S^{-1})_j^i \xi^j$ , donde  $S^{-1}$  es la matriz inversa de la de cambio de base, los índices superiores indican filas y los inferiores, columnas. En nuestro caso,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene  $\xi'^1 = \cos \theta \alpha + \sin \theta \beta$ ,  $\xi'^2 = -\sin \theta \alpha + \cos \theta \beta$ ,  $\xi'^3 = \xi_3$ .

Cualquier vector cuyas componentes cambien de este modo (con  $S^{-1}$ ) frente a un cambio de base se llamará un vector contravariante o un tensor una vez contravariante. Los puntos del espacio tridimensional son, entonces, vectores contravariantes ante las transformaciones de coordenadas dadas por una matriz como nuestra  $S$  (observar que hemos elegido rotar la base en el plano  $XY$ , pero podríamos haber estudiado otro cambio de base de la misma manera).

El espacio vectorial  $\mathcal{V}$  tiene asociado otro espacio vectorial, llamado su dual y anotado  $\mathcal{V}^*$ . Es el espacio de las formas lineales  $f : \mathcal{V} \rightarrow K$ . Se trata de funciones que toman vectores y dan por resultado escalares pertenecientes al cuerpo  $K$  sobre el cual está definido el espacio vectorial  $\mathcal{V}$ , de modo lineal, es decir,  $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ .

Dada una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{V}$ , en la cual  $x = \sum \xi^i e_i$ , se tiene  $f(x) = \sum \xi^i f(e_i)$ . Los coeficientes  $f_i = f(e_i) \in K$  determinan unívocamente la forma lineal. Se llaman coeficientes de la forma lineal. Frente a un cambio de base como el que hemos estudiado, caracterizado por la matriz  $S$  de (79), se transforman según  $f'_i = \sum_{j=1}^3 f_j S_j^i$ . Todo vector cuyas componentes se transformen de este modo frente al cambio de base estudiado (con  $S$ , en lugar de  $S^{-1}$ ) se llamará un vector covariante (o tensor una vez covariante).

En general, un tensor  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariante (tensor  $(p, q)$ ) es un objeto caracterizado por  $p + q$  índices, cuyas componentes se transforman  $p$  veces con  $S$  y  $q$  veces con  $S^{-1}$ . Por ejemplo, un tensor  $(1, 1)$ , una vez covariante y una vez contravariante estará caracterizado por componentes con dos índices. Frente a un cambio de base como el realizado en (79), los nueve coeficientes  $a_i^j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  que lo caracterizan se transformarán según  $a_i^j = \sum_{m,n=1}^3 S_n^j a_m^n (S^{-1})_i^m$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

### VII.3. Producto escalar y tensor métrico. Relación entre tensores covariantes y contravariantes.

Dado un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales (como  $\mathbb{R}^3$ ) pueden introducirse nociones métricas (distancia y ángulos) dotándolo de un producto escalar. Un producto escalar es una forma bilineal (lineal en ambos argumentos)  $(x, y) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$  que, a partir de cualquier par de vectores da por resultado un escalar y que es no negativa, es decir que, para todo vector  $x$ , se cumple que  $(x, x) \geq 0$ .

En el caso particular de  $\mathbb{R}^3$ , un posible producto escalar está dado por:

$$(x, y) = ((\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_3)) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \quad (81)$$

En particular,  $(x, x) = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \geq 0$  es una cantidad no negativa, llamada la norma al cuadrado del vector  $x$ , que se anota  $\|x\|^2$ . Sólo se anula si  $x$  es el vector nulo. Su raíz cuadrada positiva  $\|x\| = +\sqrt{\|x\|^2}$  se llama norma del vector y es una medida de su longitud.

Si se calculan todos los posibles productos escalares entre los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , se encuentra:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (e_1, e_1) = 1, & g_{22} &= (e_2, e_2) = 1, & g_{33} &= (e_3, e_3) = 1, \\ g_{12} &= (e_1, e_2) = 0, & g_{13} &= (e_1, e_3) = 0, & g_{21} &= (e_2, e_1) = 0, \\ g_{23} &= (e_2, e_3) = 0, & g_{31} &= (e_3, e_1) = 0, & g_{32} &= (e_3, e_2) = 0. \end{aligned}$$

A partir de los productos escalares entre vectores de la base puede definirse un tensor, llamado tensor métrico, caracterizado, en cada base, por sus componentes  $g_{ij} = (e_i, e_j)$ . Es fácil verificar que se trata de un tensor dos veces covariante. En efecto, usando (80), se tiene:

$$g'_{ij} = (f_i, f_j) = \left( \sum_{k=1}^3 S_i^k e_k, \sum_{m=1}^3 S_j^m e_m \right) = \sum_{k,m=1}^3 S_i^k S_j^m g_{km},$$

que es la ley de transformación, frente a cambio de base, de las componentes de un tensor dos veces covariante.

Las componentes del tensor métrico, en la base canónica, pueden usarse para escribir una matriz  $G$  de  $3 \times 3$ , cuyos elementos son las componentes  $g_{ij}$ . Tal matriz, puramente diagonal, puede escribirse  $G = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Conocidas las componentes del tensor

métrico en una base dada, puede definirse el tensor inverso, dos veces contravariante, cuyas componentes  $g^{ij}$  son tales que  $\sum_{k=1}^3 g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ . La matriz asociada con el tensor inverso del tensor métrico es  $G^{-1}$ . En el presente caso, es decir, para el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^3$ , con el producto escalar definido en (81),  $G$  resulta ser la matriz identidad en la base canónica y en cualquier otra base que difiera de ella en una mera rotación de todos los vectores (las rotaciones preservan el tensor métrico) y  $G^{-1}$  coincide con  $G$  en todas las bases que sólo difieran entre sí por una rotación de todos los vectores.

Haciendo uso del tensor métrico, con cada vector contravariante, de componentes  $\xi^j$ , puede asociarse un vector covariante  $x$ , de componentes  $\xi_i$ , mediante  $\xi_i = \sum_{j=1}^3 g_{ij} \xi^j$ . A la operación realizada entre el tensor métrico y el vector  $x$  se la conoce como contracción de ambos tensores. Se dice que las componentes del tensor métrico permiten "bajar índices". Podemos ahorrarnos escribir explícitamente el símbolo de suma, adoptando la convención, llamada de Einstein, de sumar sobre todos los valores posibles de cada índice repetido, una vez arriba y otra abajo. Con esta convención, la contracción anterior se anota  $\xi_i = g_{ij} \xi^j$ . Del mismo modo puede usarse el inverso del tensor métrico para "subir índices":  $\xi^i = g^{ij} \xi_j$ .

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , dotado del producto escalar (81) se conoce como espacio euclídeo de tres dimensiones, y se anota  $E^3$ . De manera similar a partir del espacio vectorial real de  $n$ -uplas de números reales, con  $n \in \mathbb{N}$  puede definirse un espacio euclídeo de  $n$  dimensiones, introduciendo un producto escalar que es generalización natural del usado para definir  $E^3$ . En la correspondiente base canónica,  $G = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = I_{n \times n} = G^{-1}$  y lo mismo en cualquier otra base, rotada con respecto a la base canónica.

## VII.4. El espacio de Minkowski $M^4$

A partir del espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$ , cuyos vectores son 4-uplas (tetravectores) de números reales,  $x = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ , puede definirse otro espacio métrico, llamado espacio de Minkowski  $M^4$ , introduciendo un "producto escalar", dado por  $(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$ , cuando el vector  $y$  es la 4-upla  $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ . Hemos escrito "producto escalar" entre comillas, porque la norma de un vector puede ser tanto cero (esto ocurre no sólo para el vector nulo), como positiva o negativa. En efecto, se tiene  $s^2 = ||x||^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ . Esta "distancia al cuadrado" entre el punto del espacio-tiempo asociado con el vector  $x$  y el origen se conoce como el intervalo.

Llamaremos base canónica de  $M^4$  a

$$\mathcal{B} = \{e_0 = (1, 0, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1)\} .$$

En esta base, las componentes del vector contravariante  $x$  coinciden con los elementos de la correspondiente 4-upla, es decir  $x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^\mu e_\mu$  (recordar la notación de Einstein y notar que hemos usado letras griegas para representar los índices, que pueden valer 0, 1, 2, 3). Las componentes del tensor métrico (dos veces covariante),

en esta misma base, pueden obtenerse usando el producto antes definido, y resultan:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= (e_0, e_0) = 1, & g_{01} &= (e_0, e_1) = 0, & g_{02} &= (e_0, e_2) = 0, & g_{03} &= (e_0, e_3) = 0 \\
 g_{10} &= (e_1, e_0) = 0, & g_{11} &= (e_1, e_1) = -1, & g_{12} &= (e_1, e_2) = 0, & g_{13} &= (e_1, e_3) = 0 \\
 g_{20} &= (e_2, e_0) = 0, & g_{21} &= (e_2, e_1) = 0, & g_{22} &= (e_2, e_2) = -1, & g_{23} &= (e_2, e_3) = 0 \\
 g_{30} &= (e_3, e_0) = 0, & g_{31} &= (e_3, e_1) = 0, & g_{32} &= (e_3, e_2) = 0, & g_{33} &= (e_3, e_3) = -1.
 \end{aligned}$$

Ordenando las componentes  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$  en una matriz de  $4 \times 4$ , se tiene  $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Como en el caso euclídeo, pueden bajarse índices:  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ . El producto de la ecuación (81) puede escribirse como  $(x, y) = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ . Obsérvese que, debido al signo negativo en las tres componentes espaciales de la métrica, las componentes espaciales de un tensor covariante tienen signo opuesto al de las componentes espaciales del correspondiente vector contravariante. El tensor inverso (dos veces contravariante) tiene componentes que, en la base canónica, conducen a la matriz  $G^{-1} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Como ya se dijo, frente a un cambio de base arbitrario, las componentes del tensor métrico se transformarán como corresponde a un tensor dos veces covariante. En particular, las componentes del tensor métrico en cualquier base relacionada con la base canónica por una transformación de Lorentz homogénea tomarán el mismo valor que en la base canónica. Dicho de otro modo: las transformaciones de Lorentz preservan la métrica del espacio de Minkowski, tal como las rotaciones preservaban la métrica del espacio euclídeo. Discutiremos estas transformaciones en el apéndice VIII.

## **Parte VIII**

### **Apéndice 2: Grupo de Lorentz-Poincaré**



Una referencia útil es [19].

Como acabamos de decir, las transformaciones del grupo de Lorentz homogéneo (a veces llamado, simplemente, grupo de Lorentz) que es un subgrupo del grupo de Lorentz inhomogéneo o grupo de Lorentz-Poincaré preservan la métrica del espacio de Minkowski  $M^4$ . En la sección I hemos considerado una de las transformaciones del grupo homogéneo: un boost o transformación propia de Lorentz, con velocidad en la dirección del eje  $x$ .

El grupo homogéneo está formado por: rotaciones alrededor de cualquier eje espacial, boosts o transformaciones con velocidad a lo largo de cualquier eje espacial, paridad e inversión temporal. Todas estas transformaciones admiten representaciones matriciales de distintas dimensiones. Aquí nos limitaremos a representarlas como matrices de  $4 \times 4$ .

Si un tetravector contravariante  $x$  tiene, por ejemplo, en la base canónica de  $M^4$ , componentes  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$  sus componentes en cualquier base que difiere de la original por una transformación del grupo homogéneo serán (recordar la convención de suma de Einstein para el índice  $\nu$ ):

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad (82)$$

y se cumplirá  $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2$ .

Esta última propiedad (preservación del intervalo, proviene de la preservación de la métrica y se cumple para:

a) Transformaciones de Lorentz propias o boosts. En el caso particular de un boost con velocidad según el eje  $x$ , la matriz asociada puede escribirse:

$$(\Lambda_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & i \sinh \beta & 0 & 0 \\ -i \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\beta = \frac{v_x}{c}$ .

b) Rotaciones espaciales. Por ejemplo, para una rotación alrededor del eje  $z$ , se tiene:

$$(\Lambda_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\theta =$  es el ángulo de rotación.

c) Inversión temporal, con matriz asociada:

$$(\Lambda_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Inversión espacial, con matriz asociada:

$$(\Lambda_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Todas estas transformaciones constituyen el grupo homogéneo. Es fácil ver que, para todas ellas,  $[\det(\Lambda)]^2 = 1$  y  $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$ . Por lo tanto, existen las siguientes cuatro posibilidades:  $\det(\Lambda) = \pm 1$  y, para cada uno de esos dos casos, hay dos posibilidades,  $\Lambda_0^0 = \geq 1$  o bien  $\Lambda_0^0 = \leq -1$ . Como consecuencia, existen cuatro hojas, no conectadas por la variación de un parámetro continuo, en el grupo de Lorentz homogéneo:

$\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ : La primera hoja corresponde a las transformaciones con  $\det(\Lambda) = +1$  y  $\Lambda_0^0 = \geq 1$ . Nótese que esta hoja es la única que contiene a la transformación idéntica, representada por la matriz identidad. Por lo tanto, las transformaciones con estas propiedades son las únicas que forman un subgrupo, conocido como el subgrupo propio (por tener  $\det(\Lambda) = +1$ ) ortócrono (por tener  $\Lambda_0^0 = \geq 1$ ) y anotado  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ . Forman este subgrupo los boosts y las rotaciones espaciales. La transformación idéntica corresponde a  $\beta = 0$  o  $\theta = 0$ , respectivamente.

$\mathcal{L}_-^{\uparrow}$ : Esta hoja contiene las transformaciones con  $\det(\Lambda) = +1$  (propias), pero  $\Lambda_0^0 = \leq -1$  (no ortócronas). En esta hoja se encuentra la inversión temporal ( $T$ ). La transformación obtenida componiendo un elemento cualquiera de  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  con una inversión temporal, también caerá en esta hoja.

$\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ : Esta hoja contiene las transformaciones con  $\det(\Lambda) = -1$  (impropias), y  $\Lambda_0^0 = \geq 1$  (ortócronas). En esta hoja se encuentra la inversión espacial ( $P$ ). La transformación obtenida componiendo un elemento cualquiera de  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  con una inversión espacial, también caerá en esta hoja.

$\mathcal{L}_-^{\downarrow}$ : Esta hoja contiene las transformaciones con  $\det(\Lambda) = -1$  (impropias), y  $\Lambda_0^0 = \leq -1$  (no ortócronas). En esta hoja se encuentra la composición de una inversión espacial con una temporal, llamada inversión total ( $PT$ ). La transformación obtenida componiendo un elemento cualquiera de  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  con una inversión total, también caerá en esta hoja.

Hasta aquí, hemos considerado transformaciones del grupo homogéneo. Si en lugar de las transformaciones (82) consideramos, también, traslaciones espacio-temporales, caracterizadas por un tetravector de componentes constantes  $a^{\mu}$ :

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

tendremos las transformaciones del grupo de Lorentz inhomogéneo, o grupo de Lorentz-Poincaré. Este grupo tiene, también, cuatro hojas no conectadas, que heredan sus nombres y características de las correspondientes hojas del grupo homogéneo.

---

Como hemos comentado en la parte V de estos apuntes, al construir lagrangianos clásicos para teorías cuánticas de campos interesa particularmente hacerlo de manera tal que los mismos resulten invariantes frente a transformaciones del grupo propio ortócrono inhomogéneo. La invarianza frente a transformaciones de Lorentz discretas (no conectadas con la identidad), como  $T$ ,  $P$  y su composición no parece ser respetada por todas las interacciones fundamentales. Por ejemplo, todas las interacciones débiles que involucran neutrinos violan la invarianza frente a inversión espacial.



# Bibliografía

- [1] Ernest M. Henley and Alejandro García, World Scientific, Singapore (2007).
- [2] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles; John Wiley VCH, Weinheim, Germany (2004).
- [3] Bogdan Povh, Klaus Rith, Christoph Scholz, Frank Zetsche; Particles and Nuclei. An Introduction to the Physical Concepts; Springer Verlag, Berlin (2008).
- [4] V.F. Weisskopf, Modern Physics from an elementary point of view, CERN (1969).  
Puede descargarse de [cdsweb.cern.ch/record/274976/files/p1.pdf](http://cdsweb.cern.ch/record/274976/files/p1.pdf)
- [5] Sheldon L. Glashow, El encanto de la física; Tusquets Editores, Barcelona (1995)
- [6] Frank Wilczek, Asimetría cósmica entre materia y antimateria, Revista Investigación y Ciencia 53, (febrero de 1981).
- [7] H.R. Quinn and M.S. Witherell, Revista Investigación y Ciencia, n42 (diciembre de 1998).
- [8] M. Gell-Mann, El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo, Ed. Tusquets, España (2007).
- [9] y. Ne'eman and Y. Kirsh, The particle hunters, University Press, Cambridge, UK (1996).
- [10] Hermann Weyl, Symmetry, Princeton University Press, USA (1983).
- [11] G.D. Coughlan and J.E. Dodd, The ideas of Particle Physics, Cambridge University Press, UK (1991).
- [12] J. Sánchez Guillén y M. Braun, Física Cuántica, Alianza Universidad, España (1993).
- [13] A. Das and T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, World Scientific, Singapore (2005).
- [14] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, An introduction to Nuclear Physics, Cambridge University Press, UK (2004).

- [15] F.A. Schaposnik, Apuntes de Física IV, <http://sites.google.com/site/schaposnik/actividadesdocentes>
- [16] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, An introduction to the Standard Model of Particle Physics, Cambridge University Press, UK (2007).
- [17] M. Veltman, Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics, World Scientific, Singapore (2003).
- [18] S. Weinberg, The Discovery of Subatomic Particles, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2003.
- [19] F.A. Schaposnik, Apuntes de Mecánica Cuántica II, <http://sites.google.com/site/schaposnik/actividadesdocentes>
- [20] L. Fermi, Atoms in the Family, University of Chicago Press, Chicago, 1954. L. Lamont, Day of Trinity, Atheneum, New York, 1965. R. Moore, Niels Bohr, A.A. Knopf, New York, 1966. V.F. Weisskopf, Physics in the Twentieth Century: Selected Essays, MIT Press, Cambridge, 1972. G. Gamow, My World Line, Viking, New York, 1970. E. Segre, Enrico Fermi, Physicist, University of Chicago Press, Chicago, 1970. M. Oliphant, Rutherford Recollections of the Cambridge Days, Elsevier, Amsterdam, 1972. W. Heisenberg, Physics and Beyond; Encounters and Conversations, Allen and Unwin, London, 1971. R. Jungk, The Big Machine, Scribner, New York, 1968. P.C.W. Davies, The Forces of Nature, Cambridge University Press, Cambridge, 1979. E. Segre, From X Rays to Quarks, Freeman, San Francisco, 1980. Y. Nambu, Quarks, World Sci., Singapore, 1981. P. Davies, Superforce, Simon & Schuster, New York, 1984. F. Close, The Cosmic Onion, American Institute of Physics, New York, 1983. R.P. Feynman, Quantum Electrodynamics, Princeton University Press, Princeton, 1985. H.R. Pagels, Perfect Symmetry, Simon & Schuster, New York, 1983. A. Zee, Fearful Symmetry, MacMillan Publishing Co., New York, 1986. R.E. Peierls, Atomic Histories, American Institute of Physics, New York, 1997. F. Close, Lucifers Legacy, Oxford University Press, Oxford, 2000. F. Close, M. Marten, and C. Sutton, A Journey to the Heart of Matter, Oxford University Press, Oxford, 2002. K.S. Thorne, Black Holes and Time Warps: Einsteins outrageous legacy, W.W. Norton, New York, 1994. Eduard Punset, Cara a cara con la vida, la mente y el Universo, Ediciones Destino, Barcelona (2007).