

# Seminario de Mecánica Cuántica

## Práctica VII (Curso 2012)

I. Hallar las energías y autoestados exactos del Hamiltoniano

$$H = \sum_i [bc_i^\dagger c_i - v(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i)]$$

en los casos fermiónico y bosónico, para  $i = 1, \dots, n$  y  $n+1 \equiv 1$  (condición cíclica). Hallar también la energía fundamental si el número de partículas es  $N = n/2$  (con  $n$  par) e interpretar  $H$ . (Sugerencia: aplicar la transformada de Fourier discreta).

II. Consideremos el Hamiltoniano fermiónico

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_p (c_{p+}^\dagger c_{p+} - c_{p-}^\dagger c_{p-}) - \frac{1}{2}V \sum_{p \neq q} (c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger c_{q-} c_{p-} + c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p+}) - G \sum_{p \neq q} c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p-}$$

donde  $V > 0$ ,  $G > 0$  y  $p, q = 1 \dots, \Omega$ . Plantear las ecuaciones de Hartree-Fock para el caso de  $N = \Omega$  fermiones, hallando la solución de energía mínima para  $G > 0$ ,  $V > 0$ . Identificar el umbral para ruptura de simetría (cual?) en la aproximación. Hallar también la energía mínima en esta aproximación, y las energías de partícula independiente.

III. Consideremos el Hamiltoniano de un sistema de  $n$  espines  $1/2$  en una cadena con interacción de primeros vecinos tipo  $XY$  y en un campo magnético transversal  $\propto B$ :

$$H = \sum_i [B\sigma_{iz} - J_x \sigma_{ix} \sigma_{i+1,x} - J_y \sigma_{iy} \sigma_{i+1,y}]$$

donde  $i = 1, \dots, n$  es un índice de sitio y  $\sigma_{i\mu}$  matrices de Pauli, con  $n+1 = 1$  (condición cíclica). Hallar el estado separable de mínima energía en el caso  $J_x > 0$ ,  $|J_y| < J_x$ , e identificar el umbral de  $J_x$  para ruptura de simetría (cual?) de la aproximación. Comparar con el resultado exacto para el caso particular  $n = 2$ .

IV. Sea

$$H = \varepsilon \sum_p (c_{p+}^\dagger c_{p+} + c_{p-}^\dagger c_{p-}) - G \sum_{p,q} c_{p+}^\dagger c_{p-}^\dagger c_{q-} c_{q+}$$

donde  $G > 0$  y  $p, q = 1 \dots, \Omega$ .

a) Plantear las ecuaciones de BCS para el presente sistema y hallar la solución de energía mínima para el caso  $G > 0$  y  $N = \Omega$ . Identificar el umbral de  $G$  para ruptura de simetría en la aproximación (umbral de solución superconductora), y determinar, en función de  $G$ , el gap  $\Delta$ , el potencial químico  $\mu$ , la energía del estado fundamental en la aproximación BCS y las energías de cuasipartícula. Determinar también el estado fundamental en esta aproximación y la fluctuación  $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$  del número de partículas.

b) Hallar los niveles de energía exactos del sistema y comparar con los resultados anteriores.