Seminario de Mecánica Cuántica

Práctica V (Curso 2012)

I. Transformada de Fourier (TF) Cuántica.

1) Considar la TF discreta $F_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i2\pi jk/n} f_j$, $k = 0, \ldots, n-1$.

a) Probar que si $f_{j+r} = f_j \ \forall \ j$ (f_j periódica con período r), con r divisor de n, $\Rightarrow$ $F_k \neq 0$ sólo si k es un múltiplo de n/r ($k = mn/r$, $m = 0, \ldots, r-1$), y que en tal caso, $F_k = \sqrt{\frac{n}{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} f_j e^{-i2\pi jm/r}$ si $k = mn/r$.

b) Mostrar que si $f_j = e^{i2\pi\phi j/n} \Rightarrow |F_k| = |\frac{\sin[\pi(\phi-k)]}{n \sin[\pi(\phi-k)/n]}|$

c) Probar que en b), $|F_k|$ es máximo en el entero más próximo a ϕ, y que $|F_k| \leq \frac{1}{2|\phi-k|}$ si $|\phi - k| < n/2$. Mostrar también que si $\phi \to m$, con m entero $\Rightarrow F_k \to \delta_{kj}$.

2) a) Si $\{|j\rangle, \ j = 0, \ldots, n-1\}$ es una base ortonormal, mostrar que los estados

$$|\tilde{k}\rangle = U|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi kj/n} |j\rangle$$

forman también una base ortonormal del mismo espacio.
b) Probar que si X, P y T son los operadores definidos por $X|j\rangle = j|j\rangle$, $P = UXU^\dagger$ y $T = \exp[-i2\pi P/n] \Rightarrow P|\tilde{k}\rangle = k|\tilde{k}\rangle$, $T|\tilde{k}\rangle = e^{-i2\pi k/n}|\tilde{k}\rangle$ y $T|j\rangle = |j+1\rangle$, con $|n\rangle \equiv |0\rangle$.
c) Si $|\Psi\rangle = \sum_j c_j |j\rangle = \sum_k C_k |\tilde{k}\rangle \Rightarrow C_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{-i2\pi jk/n}$.
d) Determinar $\tilde{c}_j$ tal que $P|\Psi\rangle = \sum_j \tilde{c}_j |j\rangle$.

3) Mostrar que la TF cuántica para n qubits puede ser escrita como

$$|\tilde{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk/2^n} |j\rangle = \otimes_{l=1}^{n} [|0_l\rangle + e^{2\pi ik/2^l} |1_l\rangle]$$

si $j = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}$. Escribir la TF explícitamente para el caso de uno y dos qubits y dibujar los circuitos cuánticos correspondientes.

4) Reconocer que los algoritmos cuánticos basados en la TF se basan en el esquema

$$|0\rangle|0\rangle \to c \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle|0\rangle \to c \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle|f(j)\rangle = c^2 \sum_{k=0}^{2^n-1} |\tilde{k}\rangle \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{-i2\pi kj/2^n} |f(j)\rangle \to c^2 \sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{-i2\pi kj/2^n} |f(j)\rangle$$

identificando c y los pasos señalados por $\to$.
b) En el caso de estimación de fase, $|f(j)\rangle = e^{i2\pi\phi j/N}|\Phi\rangle$, con $0 \leq \phi < N = 2^n$. Comprobar que si $\phi = m$, con m entero, el estado final será $|m\rangle|\Phi\rangle$. Discutir también cual será el estado final si ϕ no es entero.
c) En el caso de determinación del período r, $f(j) = f(j+r) \ \forall \ j$, verificar que si $N = 2^n$ es múltiplo de r, sólo aparecerán en el estado final los estados con k múltiplo de N/r.

II. Algoritmo de Búsqueda de Grover.

1) Considerar el estado buscado $|B\rangle = \sum_{f(j)=1} |j\rangle$, el estado ortogonal $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{f(j)=0} |j\rangle$, y $|\Phi\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{N}}|B\rangle + \sqrt{\frac{N-1}{N}}|A\rangle$, con $N = 2^n$.

Probar que si $O|j\rangle = (-1)^{f(j)}|j\rangle$, la iteración de Grover $G = (2|\Phi\rangle\langle\Phi| - I)O$ equivale a una rotación en sentido antihorario de ángulo 2θ, con $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{N}}$, en el subespacio generado por los estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$.

2) Si $H = \hbar\omega(|B\rangle\langle B| + |\Phi\rangle\langle\Phi|)$, mostrar que existe un tiempo t independiente de $|B\rangle$ tal que $\exp[-iHt/\hbar]|\Phi\rangle = |B\rangle$. El problema de búsqueda puede pues reducirse al problema de la simulación del Hamiltoniano H.