Métodos de variable compleja para la ecuación de Laplace bidimensional

En el caso de dos dimensiones, toda función $u(x,y)$ armónica en una región R, es decir, que satisface en ella la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

es la parte real o imaginaria de una función analítica en R:

$$u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)], \quad z = x + iy \tag{1}$$

Recordemos que $f(z)$ es analítica si $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ es independiente de la dirección de Δz. En tal caso, $f_x(z) = f'(z)$, $f_y(z) = f'(z)i$. lo que implica $\Delta f = f_{xx}(z) + f_{yy}(z) = f''(z) - f''(z) = 0$. Escribiendo

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

con u y v reales, tanto u como v son entonces armónicas. La identidad $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z)$ conduce a las condiciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ de las que se desprende nuevamente que $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Si por ej. $u(x,y)$ representa una temperatura, las curvas $u(x,y) = c$ son las isotermas mientras que las curvas $v(x,y) = c'$ son las correspondientes líneas de flujo, ya que los gradientes de u y v son perpendiculares: $(u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = (u_x, u_y) \cdot (-u_y, u_x) = 0$.

Por ejemplo, la parte real e imaginaria de $z^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$ y $\ln z = \ln r + i\theta$ son los armónicos circulares, mientras que las de $e^{kz} = e^{kx}(\cos ky + i \sin ky)$, $e^{ikz} = e^{-ky}(\cos kx + i \sin kx)$, son armónicos rectangulares. Por ejemplo, en el caso del rectángulo,

$$\sin(kx)\sinh(ky) = -\mathrm{Im}[\cos(kz)] = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{ikz} + e^{-ikz})$$

Sabemos que si f es analítica en una región R y C es una curva cerrada contenida en R,

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Además, $f(z)$ puede escribirse como la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z}dz' \tag{2}$$

donde C es cualquier curva cerrada que circunda a z, dentro de la región R donde f es analítica. De esta forma, para $z \in R$, $f(z)$ queda completamente determinada por los valores que toma f en C.

Solución de Poisson para el interior del círculo:

Consideremos el problema (llamado de Poisson) de resolver la ecuación (1) en el interior de un círculo de radio a, con la condición de contorno $u(a,\theta) = g(\theta)$. Si C es un círculo de radio $a \Rightarrow z' = ae^{i\theta'}$, con $dz' = iz'd\theta'$ y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z')z'}{z'-z}d\theta', \qquad z' = ae^{i\theta'},\ |z| < a \tag{3}$$

Para obtener $Re[f(z)]$ a partir de $g(\theta)$ es necesario sin embargo expresar la parte real de $f(z)$ en términos de la parte real de $f(z')$. Definiendo $z_1 = a^2/z^* = z'z'^*/z^*$, tenemos $|z_1| > a$ si $|z| < a$ y entonces, para el mismo círculo C,

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z_1}dz' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z')z^*}{z^*-z'^*}d\theta' \tag{4}$$

Restando (4) de (3) obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z')\frac{|z'|^2-|z|^2}{|z'-z|^2}d\theta' = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(ae^{i\theta'})d\theta'}{d^2(a,r,\theta-\theta')}$$

donde $z = re^{i\theta}$ y

$$d^2(a,r,\theta-\theta') = |z'-z|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\theta').$$

La parte real de esta expresión nos da la fórmula de Poisson,

$$u(r,\theta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\theta')d\theta'}{d^2(a,r,\theta-\theta')}$$

Notemos que

$$\frac{a^2-r^2}{d^2(a,r,\theta-\theta')} = \frac{|z'|^2-|z|^2}{|z'-z|^2} = \mathrm{Re}[\frac{z'+z}{z'-z}] \tag{5}$$

Transformaciones conformes

Recordemos que la transformación

$$w = f(z) = u + iv, \qquad f'(z) \neq 0$$

con $f(z)$ analítica, mapea una región R del plano z en una región S del plano w. La transformación se dice que es conforme pues conserva los ángulos entre curvas: para una curva $z(t)$, que se transforma en la curva $w(t) = f(z(t))$, tenemos

$$\frac{dw}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt}$$

y por lo tanto, $\arg\frac{dw}{dt} = \arg[f'(z)] + \arg[\frac{dz}{dt}]$, lo que representa una traslación de los argumentos en $\arg[f'(z)]$ (asumiendo que $f'(z) \neq 0$). No obstante, como $|dw| = |f'(z)||dz|$, las distancias se dilatan localmente en $|f'(z)|$.

Si $g(w)$ es analítica en $S \Rightarrow g(f(z))$ será analítica en R. Por lo tanto, $\mathrm{Re}[g(f(z))]$ será una función armónica en R. Esto indica que una vez conocida la solución armónica $\mathrm{Re}[g(w)]$ en S, podemos hallar la solución en R mediante una transformación conforme.

Por ejemplo, la transformación

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

mapea el rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ en el sector circular $1 \leq r \leq e^a$, $0 \leq \theta \leq b$. En esta región hemos visto que los armónicos son de la forma $w^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$ para $k \neq 0$. Los armónicos rectangulares son pues la parte real e imaginaria de

$$(e^z)^k = e^{kz} = e^{kx}(\cos ky + i \sin ky),$$

donde k puede ser real o complejo, resultado que hemos obtenido por separación de variables (además, $\ln w = \ln r + i\theta$ y $\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\ln w)^2 = \theta \ln r$ (armónicos circulares para $k = 0$) se transforman en $\ln e^z = z = x + iy$, y $\frac{1}{2}\mathrm{Im}[z^2] = xy$, que son los armónicos rectangulares para $k = 0$).

Como ejemplo específico, la transformación

$$w = e^{-\alpha z/b} = e^{-\alpha x/b}[\cos(\alpha y/b) - i \sin(\alpha y/b)]$$

mapea la franja semi-infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$ en el sector circular $0 \leq r \leq 1$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$. La solución en la franja se obtiene pues reemplazando

$$r = |e^{-\alpha z/b}| = e^{-\alpha x/b}, \quad \theta = \arg(e^{-\alpha z/b}) = \alpha y/b$$

en la solución $u(r, \theta)$ obtenida en la región circular.

Recordar también el ejemplo dado en la última teoría: La solución en el semicírculo $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, para $u(r, 0) = 0$, $u(r, \pi) = T_1$ y $u_r(a, \theta) = 0$, puede obtenerse a partir de la solución $\mathrm{Im}[T_1 w/\pi]$ para la franja $0 \leq v \leq \pi$, $u \leq 0$ mediante la transformación conforme $f(z) = \ln(z/a)$. Se obtiene entonces

$$u(r, \theta) = \mathrm{Im}[\frac{T_1}{\pi} \ln(z/a)] = \frac{T_1}{\pi}\theta$$

o sea $u(x, y) = \frac{T_1}{\pi} \arctan(y/x)$.