Matemáticas Especiales de Física Médica (Curso 2007)

Transformada de Fourier

Consideremos nuevamente la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier de una función $f:[-L,L]\rightarrow\Re$:

$$f(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}\,,\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx \tag{0.1}$$

donde la suma indica el valor principal $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}=\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=-m}^{m}$. Podemos reescribir la serie como

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k F(k)e^{ikx}\Delta k, \tag{0.2}$$

donde $k=\frac{n\pi}{L}$, $\Delta k=\frac{\pi}{L}$ y

$$F(k)=\sqrt{2\pi}c_n\frac{L}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{ikx}dx \tag{0.3}$$

Consideremos ahora el límite $L\rightarrow\infty$. En tal caso, $\Delta k\rightarrow 0$ y las ec. (0.2)–(0.3) tienden a

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \tag{0.4}$$

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \tag{0.5}$$

asumiendo que ambas integrales convergen, con $\int_{-\infty}^{\infty}=\lim\limits_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}$ el valor principal.

La función $F:\Re\rightarrow\Re$ definida por (0.5) se denomina **Transformada de Fourier** (TF) de la función f ($f:\Re\rightarrow\Re$) y la expresión (0.4), que recupera f a partir de F, es la "antitransformada" de F. Constituyen la generalización de la serie de Fourier para funciones f definidas en $(-\infty,\infty)$ (y de módulo integrable). Debido a la simetría de las ec. (0.4)-(0.5), son posibles también otras convenciones para definir la TF (puede por ej. omitirse el factor $1/\sqrt{2\pi}$ en (0.4) y reemplazar el de (0.5) por $1/(2\pi)$ o viceversa, y también reemplazar $e^{\pm ikx}$ por $e^{\mp ikx}$). Las ec. (0.4)–(0.5) son válidas para cualquier función $f:\Re\rightarrow\Re$ continua que satisfaga $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ y que posea un número finito de máximos y mínimos. Si f posee una discontinuidad aislada finita en un punto x_0, la integral en (0.4) converge al punto medio, como ocurre en la serie de Fourier.

Desde el punto de vista físico, las expresión (0.4) se entiende como la expansión de la función $f(x)$ en términos de funciones armónicas puras $e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx)$, de frecuencia angular k (y período $2\pi/k$), siendo $F(k)$ el peso (amplitud) de la frecuencia k en la expansión de f.

Demostraremos ahora explícitamente la validez de las ec. (0.4)–(0.5) para funciones f continuas y derivables lateralmente en cualquier punto, que satisfagan $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. La dem. es muy similar a la efectuada para la serie de Fourier. Las ec. (0.4)–(0.5) implican

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk]f(x')dx'$$

de modo que lo que debe demostrarse es que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk \;=\; \delta(x-x') \tag{0.6}$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty}dk=\lim\limits_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}dk$. En efecto, $\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{ikt}dk=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{irt}-e^{-irt}}{it}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(rt)}{t}$, con

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(rt)}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=1$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{ik(x-x')}dk]f(x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[r(x-x')]}{\pi(x-x')}f(x')dx'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(rt)}{\pi t}[f(x+t)-f(x)+f(x)]dt = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\sin(rt)\frac{f(x+t)-f(x)}{\pi t}dt \quad (0.7)$$

Para $r \to \infty$, el segundo término en (0.7) se anula por el Lema de Riemann (véase clase 10) si f es una función derivable al menos lateralmente en x (ya que en tal caso $(f(x+t)-f(x))/t$ permanece acotado para $t \to 0$) e integrable en $(-\infty, \infty)$. Queda así demostrada la ec. (0.6).

La ec. (0.6) implica también

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{k'}^{*}(x)\phi_k(x)dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix(k-k')}dx = \delta(k-k') \quad (0.8)$$

indicando que las funciones $\phi_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ son *ortogonales* respecto del producto interno $(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}u^*(x)v(x)dx$ y están "normalizadas" respecto de la variable k, si interpretamos por esto último precisamente la condición (0.8). Nótese que la convergencia de las integrales (0.6)–(0.8) debe entenderse como distribución (convergencia débil).

Propiedades básicas de la transformada de Fourier

Se resumen en la siguiente tabla:

	$f(x)$	$F(k)$
0	$f(-x)$	$F(-k)$
1	$f(ax)\ (a \neq 0)$	$F(k/a)/\|a\|$
2	$f(x+b)$	$e^{ikb}F(k)$
3	$f'(x)$	$ikF(k)$
4	$f^{(n)}(x)$	$(ik)^nF(k)$
5	$x^nf(x)\ (n \in N)$	$i^nF^{(n)}(k)$
6	$F(x)$	$f(-k)$
7	$f(x)e^{ibx}\ (b \in \Re)$	$F(k-b)$
8	$(f*g)(x)$	$\sqrt{2\pi}F(k)G(k)$
9	$f(x)g(x)$	$(F*G)(k)/\sqrt{2\pi}$

donde $(f*g)$ denota la *convolución* de f y g:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x-x')g(x')dx' = (g*f)(x)$$

y $(F*G)(k) = \int_{-\infty}^{\infty}F(k-k')G(k')dk' = (G*F)(k)$ la convolución de F y G.

Demostraciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{e^{-iku/a}}{\sqrt{2\pi}}du = \frac{F(k/a)}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x+b)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{e^{-iku}}{\sqrt{2\pi}}e^{ikb}du = e^{ikb}F(k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = f(x)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\,|_{-\infty}^{\infty} + ik\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = ikF(k)$$

donde hemos asumido que $f'(x) \to 0$ para $x \to \pm\infty$. La prop. 4 sigue por inducción (asumiendo $f^{(m)}(\pm\infty) = 0$ si $m \leq n$) y la 5 se obtiene en forma similar (asumiendo $F^{(m)}(\pm\infty) = 0$ para

$m \leq n$). La prop. 6 es consecuencia de las ec. (0.4)–(0.5). La prop. 7 se deja como ejercicio.
Prop. 8:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-x')g(x')\frac{e^{-ik(x-x'+x')}}{\sqrt{2\pi}}dx'dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iku}du\int_{-\infty}^{\infty}g(x')\frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}}dx' = \sqrt{2\pi}F(k)G(k) \tag{0.9}$$

Prop. 9: Se deja como Ejercicio.

Otras propiedades de la TF:
10) *La TF conserva el producto escalar entre funciones (producto interno complejo):*

$$\begin{aligned}(g,f) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}g^*(x)f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}F(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{ikx}dxF(k)dk\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}G^*(k)F(k)dk = (G,F)\end{aligned}$$

donde G es la TF de g. Esto implica en particular que la TF *conserva la norma*:

$$||f||^2 \equiv (f,f) = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2dk = (F,F)$$

11) Si f es real $\Rightarrow F(-k) = F(k)^*$ (para k real). Se deduce inmediatamente de la expresión

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)cos(kx)dx - i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(kx)dx] \tag{0.10}$$

12) La prop. 0 implica que si f es par ($f(-x) = f(x)$) $\Rightarrow F(k)$ es par ($F(-k) = F(k)$).
A partir de (0.10) vemos también que en tal caso, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(kx)dx = 0$ y

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(kx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos(kx)dx$$

siendo F *real* si f es real.

Si f es impar ($f(-x) = -f(x)$) $\Rightarrow F(k)$ es impar. En tal caso, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(kx)dx = 0$ y

$$F(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(kx)dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin(kx)dx$$

siendo F *imaginario* si f es real.

13) A partir de la def. (0.5) y la prop. 5, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = \sqrt{2\pi}F(0) \tag{0.11}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^ndx = \sqrt{2\pi}i^nF^{(n)}(0), \tag{0.12}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Las derivadas de $F(k)$ en el origen permiten pues evaluar en forma inmediata las integrales (0.11)–(0.12) (ver ejercicios en práctica).

Ejemplos: de TF: ($H(x)$ denota la fn. de Heaviside y $a>0$, b real)

	$f(x)$	$F(k)$
1	$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}$
2	$e^{-ax}H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ik}$
3	$e^{-x^2/(2a^2)}$	$ae^{-a^2k^2/2}$
4	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-a\|k\|}$
5	$H(x+a)-H(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ak)}{k}$
6	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
7	e^{ibx}	$\sqrt{2\pi}\delta(k-b)$
8	$\cos(bx)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(k-b)+\delta(k+b)}{2}$
9	$\sin(bx)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(k-b)-\delta(k+b)}{2i}$
10	$e^{-x^2/(2a^2)}e^{ibx}$	$ae^{-a^2(k-b)^2/2}$

Demostraciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-ikx}dx \;=\; \int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)}dx+\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-ik)}dx=\frac{1}{a+ik}+\frac{1}{a-ik}=\frac{2a}{a^2+k^2},\quad a>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}H(x)e^{-ikx}dx=\int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)}dx==\frac{1}{a+ik} \tag{0.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ikx}dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik)^2/2-k^2/2}dx=e^{-k^2/2}\int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$$

donde $z=(x+ik)$. Se ha completado cuadrados en el exponente y utilizado el resultado

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$$

el cual se obtiene de

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy=2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr=2\pi\int_0^{\infty} e^{-u}du=2\pi$$

(también hemos utilizado el hecho de que $e^{-z^2/2}$ es una función analítica de z que se anula para $\mathrm{Re}[z]\to\pm\infty$, como se verá en las próximas clases). El resultado general 3 (para $a\neq 1$) se obtiene utilizando la prop. 2.

Este ejemplo demuestra que la TF de una gaussiana (de ancho a) es también una gaussiana (de ancho $1/a$). Esto posee una importancia fundamental en diversas aplicaciones. Notemos que la norma se conserva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2}dx=a^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2}dk=\sqrt{\pi}a$$

El ej. 4 se obtiene de 1 utilizando la prop. 6, mientras que el ej. 5 sigue de

$$\int_{-\infty}^{\infty}[H(x+a)-H(x-a)]e^{-ikx}dx=\int_{-a}^{a}e^{-ikx}dx=\frac{e^{-ika}-e^{ika}}{-ik}=2\frac{\sin(ka)}{k}$$

Los ej. 6 y 7, que deben entenderse como la TF de una distribución (siendo el resultado otra distribución), son consecuencia inmediata de (0.6). El resultado 6 puede también obtenerse de 5 dividiendo a f y F por $2a$ y tomando el límite $a\to 0$, de acuerdo con la relación $\delta(x)=H'(x)$. Los ej. 8-9 se derivan de lo anterior en forma inmediata, recordando que $\cos(ax)=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$,

$\sin(ax) = \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$. Implican que la TF de una función $f(x)$ periódica de período $2L$ (que puede desarrollarse en serie de Fourier) tendrá pues picos tipo δ localizados en $\pm n\omega$, con $\omega = \pi/L$ y n entero. Finalmente, 10 se deriva inmediatamente de 3 (se deja como ejercicio). De 10 se puede reobtener 7 en el límite $a \to +\infty$ (ejercicio).

Es importante destacar que cuanto más esparcida esté $f(x)$ (por ej., a grande en el ej. 3), tanto más concentrada estará $F(k)$, y viceversa. Los ej. 6-7 son casos extremos de esta propiedad, la cual esta estrechamente relacionada con el principio de incerteza de la mecánica cuántica.

Desarrollos de medio rango: Transformadas seno y coseno

Análogamente al caso finito, para un intervalo $(0, \infty)$ podemos considerar las extensiones par e impar de una cierta función f definida para $x \geq 0$. Si completamos a f en forma par para $x < 0$, obtenemos, teniendo en cuenta la prop. 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(k) \cos(kx) dk \tag{0.14}$$

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \tag{0.15}$$

La ec. (0.15) se denomina transformada coseno de $f(x)$ y coincide con la TF de f completada en forma par. La transf. inversa es en este caso idéntica.

Si se completa a f en forma impar para $x < 0$, se obtiene, utilizando nuevam. la prop. 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(k) \sin(kx) dk \tag{0.16}$$

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \tag{0.17}$$

La ec. (0.17) se denomina transformada seno de f, y satisface $F_s(k) = iF(k)$, siendo $F(k)$ la TF de f completada en forma impar.

1 La transformada discreta de Fourier

Consideremos, en lugar de una función $f : \Re \to \Re$, una función definida sólo en un número *finito* n de puntos x_j, $j = 0, \ldots, n-1$, tal que $f_j = f(x_j)$. En tal caso es posible definir una **transformada discreta de Fourier** F_k de la siguiente forma:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \, e^{-2\pi i \, j \, k/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{1.1}$$

Conocidos los n valores F_k, los n valores f_j pueden recuperarse exactamente mediante la transformación inversa, dada por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \, e^{2\pi i \, j \, k/n}, \quad j = 0, \ldots, n-1 \tag{1.2}$$

Esto puede demostrarse fácilmente, reemplazando F_k por su definición:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j'=1}^{n=1} f'_j e^{-2\pi i j' k/n}] e^{2\pi i j k/n} = \sum_{j'=0}^{n-1} f_{j'} [\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k(j-j')}] = f_j$$

donde hemos utilizado el resultado

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k(j-j')/n} = \delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & j = j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases} \tag{1.3}$$

válido para j, j' *enteros*. En efecto, si $j=j'$, $e^{2\pi ik(j-j')/n}=1$ y $\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi ik(j-j')/n}=n$, mientras que si $j\neq j'$ (y $|j-j'|<n$)

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi ik(j-j')/n}=\frac{1-e^{2\pi i(j-j')}}{1-e^{2\pi i(j-j')/n}}=0$$

para $j-j'$ entero.

Ejercicios:

1) Probar que si f_j es constante ($f_j=c\ \forall\ j$) $\Rightarrow F_k=\delta_{k0}c\sqrt{n}$ (o sea, $F_k=0$ salvo para $k=0$).
2) Probar que si $f_j=ce^{i2\pi mj/n}$, con $0\leq m\leq n-1\Rightarrow F_k=c\delta_{km}\sqrt{n}$
3) Probar que si $f_j=c\delta_{jm}$ (o sea, $f_j=0$ salvo para $j=m$, con m entre 0 y $n-1$) $\Rightarrow$ $F_k=ce^{-2\pi imk/n}/\sqrt{n}$, $k=0,\ldots,n-1$ (o sea, $|F_k|=|c|/\sqrt{n}\ \forall\ k$).

2 Transformada de Laplace

Para una función f definida para $x\geq 0$, la transformada de Laplace (TL) se define como

$$L_f(p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx \tag{2.1}$$

Si $f(x)<e^{\alpha x}$ para $x\to\infty\Rightarrow L_f(p)$ converge para Re$[p]>\alpha$. Supondremos esta condición en lo sucesivo. Notemos que $L_f(ik)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(F_c(k)-iF_s(k))$ en el caso en que $L_f(ik)$ existe. Si completamos a f t.q. $f(x)=0$ para $x<0$, $L_f(ik)=\sqrt{2\pi}F(k)$.

La propiedad fundamental de (2.1) es que la TL de las derivadas $f^{(n)}(x)$ quedan expresadas en términos de $L_f(p)$ y las derivadas de f en el punto inicial $x=0$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned}L_{f'}(p)&=\int_0^\infty e^{-px}f'(x)dx=-f(0)+p\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\\&=-f(0)+pL_f(p)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Por inducción, obtenemos en forma análoga,

$$\begin{aligned}L_{f^{(n)}}(p)&=\int_0^\infty e^{-px}f^{(n)}(x)dx=-f^{(n-1)}(0)+p\int_0^\infty e^{-px}f^{(n-1)}(x)dx\\&=-f^{(n-1)}(0)-pf^{(n-2)}(0)-\ldots-p^{n-1}f(0)+p^nL_f(p)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Otra prop. útil se refiere a la TL de la convolución de funciones f y g definidas para argumentos positivos, definida como

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-x')g(x')dx'=(g*f)(x)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}L_{f*g}(p)&=\int_0^\infty\int_0^x f(x-x')g(x')e^{-px}dx'dx=\\&=\int_0^\infty\int_0^x f(x-x')e^{-p(x-x')}g(x')e^{-px'}dx'dx\\&=\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du\int_0^\infty g(x')e^{-px'}dx'\\&=L_f(p)L_g(p)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Para hallar la transf. inversa, completando a f en forma nula para $x<0$, y considerando la TF de $e^{-\alpha x}f(x)$, con $\alpha>0$, podemos escribir

$$e^{-\alpha x}f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ikx}dk\int_0^\infty e^{-ikx'}e^{-\alpha x'}f(x')dx'$$

de donde

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x(\alpha+ik)}dk \int_0^{\infty} e^{-x'(\alpha+ik)} f(x')dx'$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zx} L_f(z)dz \qquad (2.5)$$

con $z = \alpha + ik$. El resultado es en principio indep. de la elección de α si las integrales convergen, es decir, si α es suficientemente grande. Si es posible cerrar la integral (2.5) con un semicírculo de radio muy grande a la izq. de α, a lo largo del cual la integral tiende a cero, por el teorema de los residuos obtenemos en tal caso

$$f(x) = \sum_{z_i} \mathrm{Res}[e^{z_i x} L_f(z_i)]$$

donde la suma se extiende sobre *todos* los polos z_i de $e^{zx}L_f(z)$.

El mayor inconveniente de la TL es que la relación inversa requiere el conocimiento de $L_f(p)$ para valores complejos de p. Si se dispone tan sólo de una tabla de valores numéricos de $L_f(p)$ para cierto conjunto finito de valores reales de p (y no una expresión analítica de $L_f(p)$), como ocurre en algunos problemas prácticos, no es posible recuperar $f(x)$ con gran precisión (es un típico problema "ill posed").

Algunas propiedades y ejemplos (en todos los casos $a > 0$):

	$f(x)$	$L_f(p)$
1	$f(ax)$	$L_f(p/a)/a$
2	$f(x+a)$	$e^{pa}L_f(p)$
3	$f'(x)$	$-f(0) + pL_f(p)$
4	$xf(x)$	$-d[L_f(p)]/dp$
5	$(f * g)(x)$	$L_f(p)L_g(p)$
6	e^{-ax}	$\frac{1}{a+p}$
7	$\cos(ax)$	$p/(a^2+p^2)$
8	$\sin(ax)$	$a/(a^2+p^2)$
9	$H(x-a)$	e^{-ap}/p
10	$\delta(x-a)$	e^{-pa}

Ejemplo: Hallar $u(t)$ t.q.

$$u'' + k^2 u = f(t)$$

para $t > 0$, con $u(0)$, $u'(0)$ datos conocidos y $k \neq 0$. Mult. la ec. anterior por e^{-pt} e integrando, obtenemos, utilizando la ec. (2.3),

$$-u'(0) - pu(0) + (p^2 + k^2)L_u(p) = L_f(p)$$

de donde

$$L_u(p) = \frac{u'(0) + pu(0)}{p^2 + k^2} + \frac{1}{p^2 + k^2} L_f(p)$$

Utilizando ahora las prop. 5, 7 y 8 de la tabla anterior, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{k}u'(0)\sin(kt) + u(0)\cos(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t \sin[k(t-t')]f(t')dt'$$

que coincide con el conocido resultado para la solución de esta ecuación obtenido mediante la función de Green.