Matemáticas Especiales de Física Médica
Series de Potencias (Curso 2007)

Resumen
Una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

donde la variable x representa un número real o complejo, se denomina *serie de potencias*. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

es obviamente una serie de potencias en la variable $x - x_0$, y se la denomina por lo tanto serie de potencias *centrada en* x_0. La serie (1) es una serie de potencias centrada en el origen ($x_0 = 0$). Consideraremos en lo siguiente series de potencias centradas en el origen con x una variable real.

La primera cuestión a determinar es el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge. Una propiedad fundamental de una serie del tipo (1) es que *si converge para* $x = b$*, con* $b \neq 0$*, entonces converge absolutamente para* $|x| < |b|$ (o sea, para $-|b| < x < |b|$).
Demostración: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$ (condición necesaria de convergencia) por lo que $\exists\ M > 0$ tal que $|a_n b^n| \leq M\ \forall\ n$. Por lo tanto,

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n = |a_n b^n||x^n|/|b|^n < M s^n\,, \quad s = |x|/|b|$$

Si $|x| < |b| \Rightarrow 0 \leq s < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} M s^n$ converge (serie geométrica de razón s), por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge por el criterio de comparación. Esto implica a su vez que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < |b|$.

Como consecuencia, si sabemos que una serie de potencias centrada en el origen converge por ejemplo en $x = 1$ y diverge en $x = 2$, entonces converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 2$.

Vemos entonces que **existen tres posibilidades para la región de convergencia**:
1) Existe $r > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x| < r$ y diverge para $|x| > r$. El número r se denomina **radio de convergencia** de la serie. En $x = r$ y $x = -r$, la serie puede converger o diverger.
2) La serie converge $\forall\ x$. En tal caso se dice que el radio de convergencia es *infinito*.
3) La serie converge sólo para $x = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$). En tal caso se dice que el radio de convergencia es nulo ($r = 0$).

El conjunto de valores donde la serie de potencias converge se denomina **intervalo de convergencia**. En el caso 1), el intervalo de convergencia puede ser $[-r, r]$, $(-r, r]$, $[-r, r)$ o $(r, -r)$, según la serie converja en ambos extremos, uno de los extremos o en ninguno. En 2) es obviamente $(-\infty, \infty)$ y en 3) sólo $x = 0$.

El ejemplo más simple de serie de potencias es la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que corresponde a $a_n = 1\ \forall\ n$. Sabemos que converge absolutamente para $|x| < 1$ (convergiendo a $1/(1-x)$) y diverge para $|x| \geq 1$. El radio de convergencia es pues $r = 1$ y el intervalo de convergencia $(-1, 1)$.

Determinación del radio de convergencia:
El método más simple y útil para determinar el radio de convergencia en las series usuales es aplicar el *criterio del cociente*. Si $a_n \neq 0\ \forall\ n$ y $x \neq 0$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

Por lo tanto, si el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

existe, el criterio del cociente implica que la serie *converge absolutamente* para $|x|L<1$, es decir, $|x|<1/L$ si $L\neq 0$, y diverge para $|x|L>1$, o sea $|x|>1/L$ si $L\neq 0$. Si $L=0$, la serie converge $\forall\ x$, mientras que si $L=\infty$ la serie converge sólo en $x=0$. El radio de convergencia es pues

$$r=\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

en el caso en que tal límite exista. Si $L=0\Rightarrow r=\infty$ mientras que si $L=\infty\Rightarrow r=0$.

Cuando r es finito, el criterio del cociente *no decide la convergencia en los bordes* $x=\pm r$, pues en tal caso $|x|L=1$. La convergencia para $x=\pm r$ debe pues determinarse mediante *un criterio diferente*.

Ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

En este caso $a_n=1/n$ y $L=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim_{n\to\infty}n/(n+1)=1$. Por lo tanto $r=1/L=1$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando el criterio del cociente directamente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}/(n+1)|}{|x^n/n|}=|x|\lim_{n\to\infty}n/(n+1)=|x|$$

por lo que la serie converge para $|x|<1$ y diverge para $|x|>1$. El radio de convergencia es pues $r=1$.

Para determinar la convergencia en $x=\pm 1$ debemos aplicar otros criterios. Si $x=1$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que es una serie divergente (serie armónica, o sea, serie p con $p=1$) mientras que si $x=-1$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

que es una serie convergente por el criterio de series alternantes (pues $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$). El intervalo de convergencia es pues $[-1,1)$. La serie converge absolutamente para $|x|<1$ y condicionalmente en $x=-1$.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

En este caso, $a_n=1/n!$ y $L=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, por lo que $r=\infty$. La serie converge $\forall\ x$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando directamente el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\ \ \forall\ x$$

por lo que la serie converge $\forall\ x$ y $r=\infty$.

Ejemplo 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$$

En este caso, $a_n=n!$ y $L=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$, por lo que $r=0$. La serie converge sólo para $x=0$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando directamente el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\{^{\infty\ \ x\neq 0}_{0\ \ x=0}$$

por lo que la serie converge sólo para $x=0$.

Ejemplo 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

En este caso sólo aparecen potencias pares. Aplicando directamente el criterio del cociente, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2(n+1)}/(2(n+1))!|}{|x^{2n}/(2n)!|}=|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}=0\ \ \forall\ x$$

por lo que la serie converge $\forall\ x$.

Derivadas e integrales de series de potencias:
Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $r > 0$ *define* una función $f(x)$ en su intervalo de convergencia, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < r$$

Si la serie converge en uno ambos extremos podemos obviamente incluir dichos puntos en el dominio de $f(x)$. No obstante, las siguientes propiedades fundamentales de $f(x)$, son válidas en general sólo en el intervalo abierto $|x| < r$, donde la serie converge con seguridad en forma absoluta.

1) *$f(x)$ es derivable para $|x| < r$, y su derivada es*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad |x| < r$$

La derivada de $f(x)$ se obtiene pues derivando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee *el mismo radio de convergencia* r que la serie original. La convergencia en los extremos ($x = \pm r$) puede, no obstante, ser distinta que la de la serie original.

Aplicando esta misma propiedad a $f'(x)$, vemos que $f'(x)$ es derivable, con $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ para $|x| < r$, y así sucesivamente. La función $f(x)$ es pues derivable *a cualquier orden* n para $|x| < r$, obteniéndose las derivadas por derivación término a término.

2) *$f(x)$ es integrable para $|x| < r$, con*

$$\int_0^x f(x')dx' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < r$$

La integral de $f(x)$ se obtiene pues integrando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee *el mismo radio de convergencia* r que la serie original.

Ejemplos: En el caso de la serie geométrica, sabemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Entonces 1) implica que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ converge pues a $1/(1-x)^2$ para $|x| < 1$. Análogamente,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1$$

Esto permite evaluar series tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$$

La propiedad 2) implica que

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} x'^n dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x'^n dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

Por lo tanto, hemos obtenido una expresión en forma de serie para el logaritmo que es la que permite evaluar numéricamente el mismo dentro del intervalo de convergencia. Se obtiene $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ si $|x|<1$ y, mediante el cambio de variables $x \to -x$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad |x|<1$$

Puede demostrarse que esta serie converge condicionalmente en $x=1$ (pero no en $x=-1$), y que la igualdad anterior es en realidad válida para $-1 < x \le 1$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

La serie armónica alternante $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ converge pues condicionalmente a $\ln 2$.
(Demostración: Sabemos que $\sum_{n=0}^{m}(-x)^n = \frac{1-(-x)^{m+1}}{1+x}$ para $x \neq -1$ (ver series geométricas). Intregando entre 0 y x, se obtiene $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) + (-1)^m\int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t}dt$. Para $x>0$, el módulo de la última integral es menor que $\int_0^x t^{m+1}dt = \frac{x^{m+2}}{m+2}$, lo cual tiende a 0 para $m\to\infty$ si $0\le x\le 1$ (o sea, incluyendo $x=1$). Por lo tanto, para $m\to\infty$ y $x=1$ obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$).

3) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x|<r$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

es decir, $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0)/2$, $a_3 = f'''(0)/6$, etc. Para $n\ge 1$, los coeficientes a_n representan pues el valor de la derivada de orden n de f en el origen dividida por $n!$, mientras que $a_0 = f(0)$.
Demostración: Como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots, \quad |x|<r$$

se obtiene $f(0)=a_0$. Análogamente,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots, \quad |x|<r$$

de donde $f'(0)=a_1$ y

$$f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4.a_4x^2 + \ldots \quad |x|<r$$

de donde $f''(0)=2a_2$, y en general, $f^{(n)}(0) = n!a_n$.

Por ejemplo, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$ implica que $f^{(n)}(0) = n!$, es decir, $(\frac{1}{1-x})^{(n)}|_{x=0} = n!$, como es fácil verificar: $f(0)=1$, $f'(0) = \frac{1}{(1-x)^2}|_{x=0} = 1$, $f''(0) = \frac{2}{(1-x)^3}|_{x=0} = 2$, $f'''(0) = \frac{2.3}{(1-x)^4}|_{x=0} = 3!$, etc.

Consideremos ahora la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Como la serie converge $\forall\, x$ (radio de convergencia infinito) la función queda definida $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Reemplazando $x=0$, se obtiene inmediatamente $f(0)=1$. Además,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Por lo tanto, $f'(x)=f(x)$, con $f(0)=1$. Tal función debe pues coincidir con la función exponencial, es decir, $f(x)=e^x$, que cumple $e^0=1$ y $(e^x)'=e^x$. Además, $f^{(n)}(x)=e^x$, por lo que $f^{(n)}(0)=e^0=1$, verificándose que $f^{(n)}(0)/n! = 1/n!$. Obtenemos pues la expresión

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

válida $\forall\, x\in\mathbb{R}$, que permite evaluar numéricamente tanto e como e^x. Por ejemplo,

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots, \qquad \sqrt{e} = e^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4.2}+\frac{1}{8.6}+\ldots$$

Polinomio de Taylor y Serie de Taylor

En general, dada una función $f(x)$ que supondremos derivable a cualquier orden en $x=0$, podemos construir el polinomio

$$P_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2}f''(0)x^2+\tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3+\ldots+\tfrac{1}{m!}f^{(m)}(0)x^m$$

que se denomina *Polinomio de Taylor de grado* m de $f(x)$ alrededor de $x=0$.

Tal polinomio cumple las siguientes propiedades fundamentales:

1) Las derivadas de $P_m(x)$ en $x=0$ coinciden con las de $f(x)$ en $x=0$ hasta el orden m:

$$P_m^{(n)}(0)=f^{(n)}(0),\quad n=0,\ldots,m$$

de forma que $P_m(0)=f(0)$, $P'_m(0)=f'(0)$, ..., $P_m^{(m)}(0)=f^{(m)}(0)$. La demostración es similar a la del punto 3) anterior.

2) Como consecuencia de 1), se verifica que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_m(x)}{x^n}=0,\quad n=0,\ldots,m$$

(se demuestra aplicando la regla de L'Hopital hasta orden n). Esto implica que la diferencia

$$R_m(x)=f(x)-P_m(x)$$

denominada resto o error, es muy pequeña para $x\to 0$, ya que no sólo cumple que $\lim_{x\to 0}R_m(x)=0$ sino también $\lim_{x\to 0}R_m(x)/x^n=0$ para $n=0,\ldots,m$. En otras palabras, $|R_m(x)|$ es "más pequeño" que x^n para $x\to 0$. Esto es consecuencia de que las derivadas de $R_m(x)$ en $x=0$ son, por 1), todas nulas hasta el orden m inclusive: $R_m^{(n)}(0)=0$, $n=0,1,\ldots,m$.

En general, podemos escribir entonces

$$f(x)=P_m(x)+R_m(x)$$

con $R_m(x)$ pequeño para $x\to 0$. Tomando ahora el límite $m\to\infty$ obtenemos

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}[\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_m(x)]$$

Para aquellos x en los que $\lim_{m\to\infty}R_m(x)=0$, se obtiene el desarrollo de $f(x)$ como una serie de potencias:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad \textit{sii}\quad \lim_{m\to\infty}R_m(x)=0$$

denominado en general *desarrollo en serie de Taylor de* f *alrededor de* $x=0$. La condición $\lim\limits_{m\to\infty}R_m(x)=0$ se cumple en un cierto intervalo $|x|<r$ para todas las funciones que son *analíticas* en un entorno del origen (la definición más general de analiticidad la daremos más adelante). No obstante, existen también funciones reales derivables a todo orden tanto en $x=0$ como en un entorno $(-a,a)$ del origen, para las cuales $\lim_{m\to\infty}R_m(x)\neq 0\ \forall\ x\neq 0$, y que no son por lo tanto desarrollables en serie de potencias, a pesar de ser "suaves".

Una expresión general para el resto, en el caso de funciones derivables a todo orden, es

$$R_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(c)x^{m+1}}{(m+1)!},\quad c\text{ entre }0\text{ y }x$$

donde c es un cierto número comprendido entre 0 y x. Esta expresión sirve en general para *acotar* el resto pero no para determinarlo exactamente.

Ejemplo: $f(x) = \sin(x)$.
Tenemos $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$, $f'''(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$, por lo que en general,

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

Además, $|R_m(x)| = |\frac{f^{(m+1)}(c)x^{m+1}}{(m+1)!}| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$ por lo que $\lim\limits_{m\to\infty} |R_m(x)| \leq \lim\limits_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0 \;\; \forall\, x$, pues $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall\, x$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \;\forall\, x$. Por lo tanto $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \;\forall\, x$ y

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

La serie converge $\forall\, x \in \Re$, y permite entonces evaluar el seno de cualquier número con precisión arbitraria, aunque por las propiedades $\sin(x) = \sin(x+2\pi)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(\pi/2+x) = \sin(\pi/2-x)$, sólo interesa el intervalo $[0, \pi/2]$. Remarquemos que x representa *radianes* ($\sin(30^o)$ debe evaluarse como $\sin(\pi/6)$).

Para $f(x) = \cos(x)$ podemos proceder en forma similar, pero es más rápido obtener el desarrollo directamente derivando el desarrollo anterior. Se obtiene entonces

$$\cos(x) = (\sin(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

La serie converge $\forall\, x \in \Re$. Dado que $\cos(x) = \cos(-x)$ (función par), sólo aparecen potencias *pares* en el desarrollo de $\cos(x)$, y dado que $\sin(x) = -\sin(-x)$ (función impar), sólo aparecen potencias *impares* en el desarrollo de $\sin(x)$.

De la misma manera, si $f(x) = e^x$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \quad x \in \Re$$

que converge $\forall\, x \in \Re$. Puede comprobarse fácilmente que se cumple $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \;\forall\, x$.

Hemos también obtenido anteriormente el desarrollo de $f(x) = 1/(1-x)$ a partir de la serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots, \quad |x| < 1$$

que es válido sólo para $|x| < 1$ (en este caso $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ sólo si $|x| < 1$).

Integrando el desarrollo anterior y efectuando el cambio de variables $x \to -x$, se obtiene el desarrollo de $f(x) = \ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \quad -1 < x \leq 1$$

que es válido sólo para $-1 < x \leq 1$ (se comprueba que $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ sólo para $-1 < x \leq 1$).

Los cinco casos anteriores constituyen los desarrollos "famosos" que la mayoría de los físicos (e ingenieros, matemáticos, químicos, etc.) siempre recuerdan.

Otro desarrollo muy conocido y útil es el de $f(x) = (1+x)^k$. Obtenemos $f(0) = 1$, $f'(0) = k(1+0)^{k-1} = k$, $f''(0) = k(k-1)(1+0)^{k-2} = k(k-1)$, ... y por lo tanto,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \ldots, \quad |x| < 1$$

que converge en general para $|x| < 1$ ($\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ si $|x| < 1$) y es válido *para cualquier número real* k.
Por ejemplo, si $k = 1/2$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ y

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \ldots, \quad |x| < 1$$

Para $k = -1$ se obtiene $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, el cual puede obtenerse directamente a partir de la serie geométrica $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$, reemplazando $x \to -x$.

Mencionemos también que si $f(x)$ es un *polinomio de grado* m, el desarrollo en serie de Taylor se reduce a un polinomio de grado m que coincide *exactamente* con $f(x)$ ($f(x) = P_m(x)$). Por ejemplo, en la serie anterior, si k es natural ($k = 0, 1, 2, \ldots$) $f(x) = (1 + x)^k$ es un polinomio de grado k y vemos que los coeficientes del desarrollo de $(1 + x)^k$ *se anulan* para $n > k$, obteniéndose la fórmula del binomio de Newton,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + kx^{k-1} + x^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$$

donde $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$.

Contraejemplo: Como se dijo previamente, existen funciones que a pesar de ser derivables a cualquier orden en $x = 0$, no pueden ser desarrolladas en serie de potencias. Un conocido ejemplo es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que f es derivable a cualquier orden en $x = 0$ (se deja como ejercicio), con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y en general, $f^{(n)}(0) = 0 \;\forall\, n$. Por lo tanto, en este caso $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ a pesar de que $f(x) \neq 0$. Lo que sucede es que $\lim_{m\to\infty} R_m(x) \neq 0 \;\forall\; x \neq 0$, siendo en realidad $R_m(x) = f(x) \;\forall\; m$ (y $P_m(x) = 0 \;\forall\; m$). Esta función *no es analítica* en $x = 0$. Intuitivamente, esta función posee un mínimo muy "plano" en $x = 0$ (recordar dibujo hecho en clase), siendo $f(x)$ más pequeña que cualquier potencia x^n para $x \to 0$.

Unicidad. Puede comprenderse fácilmente que el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ alrededor de $x = 0$ *es único* (pues necesariamente $a_n = f^{(n)}(0)/n!$). Esto permite en muchos casos obtener el desarrollo simplemente por métodos indirectos (sustitución, integración, derivación) sin necesidad de calcular todas las derivadas en el origen. El desarrollo obtenido coincidirá de todos modos con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ejemplo 1: $f(x) = e^{x^2}$.
En lugar de evaluar $f^{(n)}(0)$, podemos sencillamente utilizar el desarrollo conocido $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ y efectuar el reemplazo $u = x^2$, obteniéndose

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 2: $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
La función e^{t^2} es integrable, pero su integral no puede expresarse en términos de las funciones elementales conocidas. Podemos, no obstante, obtener el desarrollo en serie de esta función directamente integrando el desarrollo anterior de e^{x^2}, obteniéndose

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 3: $f(x) = \sin(2x)$. Como $\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}$, reemplazando $u = 2x$ obtenemos

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 4: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, con $f(0) = 1$. Esta función es continua y derivable a cualquier orden en $x = 0$. El desarrollo puede obtenerse directamente dividiendo por x el desarrollo de $\sin(x)$:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Análogamente, el desarrollo en serie de $f(x) = x^2 \cos(x/2)$ alrededor de $x = 0$ es

$$x^2 \cos(x/2) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\frac{x}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n}} = x^2 - \frac{x^4}{8} + \ldots, \quad x \in \Re$$

y el de $f(x) = e^x - 1 - x$ es

$$e^x - 1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots) - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \Re$$

El desarrollo en serie de potencias sirve pues tanto para evaluar numéricamente funciones trascendentes como e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, como también para evaluar límites y estimar y/o visualizar funciones en la vecindad de un punto (ver ejemplos en la práctica).
Ejemplo 1: Evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$.
Puede procederse empleando L'Hopital dos veces, o también desarrollando en serie $f(x) = \frac{e^x-1-x}{x^2}$:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x^2}(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$. La ventaja del desarrollo en serie es que permite no sólo evaluar el límite para $x \to 0$, sino también visualizar el comportamiento de la función para $x \to 0$. Vemos aquí que $f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x$ para x pequeño.
Ejemplo 2: Verificar que la energía cinética relativista de una partícula de masa en reposo m_0, dada por

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

se reduce a la energía cinética clásica $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$ si $|v| \ll c$, donde c denota la velocidad de la luz.
Consideremos primero la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$. Utilizando el desarrollo de $f(x) = (1+x)^k$ alrededor de $x = 0$ hasta orden 1 para $k = -1/2$, se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \ldots, \quad |x| < 1$$

Por lo tanto, si ahora $x = -v^2/c^2$, tenemos

$$E_c = m_0 c^2 [\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1] = m_0 c^2 [(1 - \frac{1}{2}(-\frac{v^2}{c^2}) + \ldots) - 1] = m_0 c^2 [\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots] = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \ldots$$

donde los términos siguientes son muy pequeños para $|v|/c \ll 1$. Se deja como ejercicio (ver práctica) determinar el siguiente término del desarrollo en serie de E_c en potencias de $u = v/c$ alrededor de $u = 0$.
Notemos que $u = v/c$ es *adimensional*. Sólo así podemos decir que u es pequeño, independiente de las unidades en que se miden las velocidades. Los desarrollos en serie de magnitudes físicas se deben pues realizar en términos de variables *adimensionales*.

Desarrollo alrededor de un punto arbitrario $x = x_0$.
Si $f(x)$ es derivable a cualquier orden en $x = x_0$, podemos en general escribir

$$f(x) = P_m(x - x_0) + R_m(x - x_0)$$

con

$$P_m(x - x_0) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad R_m(x - x_0) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1},$$

y c entre x_0 y x. Finalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{sii} \quad \lim_{m\to\infty} R_m(x - x_0) = 0$$

El desarrollo anterior se denomina desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = x_0$, y corresponde al desarrollo alrededor de $u = 0$ de la función $g(u) = f(u + x_0)$, con $u = x - x_0$. El desarrollo converge en general a f en un cierto intervalo $|x - x_0| < r$ centrado en $x = x_0$.