Matemáticas Especiales
(Física Médica)

Sucesiones y Series

R. Rossignoli
Universidad Nacional de La Plata

5.1 Sucesiones

Una sucesión es un conjunto de números reales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

donde a_n está definido para todo n natural. Una sucesión es equivalente a una función f cuyo dominio es *el conjunto de los números naturales*, si identificamos $a_n = f(n)$. Por ejemplo, si $a_n = n$, obtenemos la sucesión de números naturales $1, 2, 3\ldots$, si $a_n = \frac{1}{n}$, obtenemos la sucesión de los inversos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. y si $a_n = r^n$, con $r \in \Re$ y $n \geq 0$, se obtiene la *sucesión geométrica*

$$1, r, r^2, \ldots, r^n, \ldots$$

La expresión para a_n puede estar dada también por una relación *recursiva*,

$$a_{n+1} = f(a_n)\,, \tag{2}$$

con un valor inicial a_1, donde f es una cierta función. Se obtiene así la sucesión $a_1, f(a_1), f(f(a_1)), f(f(f(a_1))), \ldots$. Por ejemplo, $a_{n+1} = 1 + a_n$, con $a_1 = 1$, es la sucesión de números naturales $a_n = n$. Si $a_{n+1} = ra_n$, $a_1 = 1$, se obtiene la sucesión *geométrica*. Si $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, con $a_1 = 1$, se obtiene la sucesión

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots \tag{3}$$

En el caso más general la función que define la relación recursiva puede también depender de n y de los términos anteriores, es decir, $a_n = f_n(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

El *límite* de una sucesión, si existe, es el valor al cual se aproxima a_n para $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \ \text{ tal que si } \ n > n_\varepsilon, \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

es decir, $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ si $n > n_\varepsilon$. En este caso se dice que la sucesión es *convergente*.
Para dos sucesiones convergentes, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_b$, es fácil mostrar que:
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L_a + L_b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = L_a L_b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = L_a/L_b$ (si $L_b \neq 0$).
Si $a_n \leq b_n\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow L_a \leq L_b$.
Si $a_n = f(n)$, con f definida en $(0, \infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

El límite de una sucesión es $+\infty$ si a_n toma valores arbitrariamente grandes cuando n crece:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{si} \quad \forall R > 0,\ \exists\ n_R \ \text{ tal que si } \ n > n_R, \quad a_n > R$$

Analogamente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ corresponde al caso en que a_n toma valores arbitrariamente grandes pero negativos cuando n crece. El comportamiento de a_n para n grande puede ser también oscilante o errático, en cuyo caso el límite no existe.
Por ejemplo, $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \nexists$. Para $a_n = r^n$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ 1 & r = 1 \\ +\infty & r > 1 \\ \nexists & r \leq -1 \end{cases}$$

Para sucesiones que dependen de funciones no directamente generalizables a argumentos reales, tales como $n!$, es útil el sig. resultado:
Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1 \\ \infty & r > 1 \end{cases}$.
En efecto, $\forall\ n > n_\varepsilon$, $||\frac{a_{n+1}}{a_n}| - r| < \varepsilon$ y entonces, si $0 \leq r < 1$, $|a_{n+1}| \leq s|a_n|$, con $s = r + \varepsilon < 1$ para ε suf. pequeño. Se obtiene así $|a_{n+k}| \leq s^k |a_n|$ y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} |a_{n+k}| = 0$, lo que implica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En cambio, si $r > 1$, $|a_{n+1}| \geq s|a_n|$, con $s = r - \varepsilon > 1$. En tal caso $|a_{n+k}| > s^k|a_n|$ y $\lim_{k\to\infty} |a_{n+k}| = \infty$, lo que implica $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Ejemplo: Hallar $\lim_{n\to\infty} b^n/n!$, con $b \neq 0$.
Se tiene $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n+1} = 0\ \forall\ b \in \Re$, por lo que $\lim_{n\to\infty} b^n/n! = 0$.
El resultado anterior puede obtenerse también directamente.

Notemos que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (finito), también $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ por lo que

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = L - L = 0 \tag{4}$$

La diferencia entre dos términos sucesivos de una sucesión convergente debe pues tender a 0 para n grande (condición *necesaria*). En una sucesión convergente de la forma (2), con f *continua*, esto implica que $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$. El límite, si existe, debe pues satisfacer

$$L = f(L) \tag{5}$$

Ejemplo: La sucesión (3) es convergente, como probaremos en breve. El límite se obtiene pues de la ecuación $L = 1 + \frac{1}{1+L}$, es decir, $L(1+L) = 2 + L$ o, $L^2 = 2$. Se obtiene $L = \pm\sqrt{2}$. Como $a_n > 0$, el límite debe ser $L = \sqrt{2}$.

Una sucesión es *creciente* si $a_{n+1} \geq a_n\ \forall n$ y *decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n$. Se dice que una sucesión es *monótona* si es o bien creciente o decreciente.

Una sucesión es *acotada* si $|a_n| \leq K\ \forall n$, con K un número real ≥ 0.
Un resultado importante relativo a los números reales es que toda sucesión *monótona y acotada* de números reales es *convergente*, a un número real L. Es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Lo mismo ocurre si es mónotona a partir de un cierto n.

Ejemplo 1: Mostrar que la sucesión

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad a_1 = 1$$

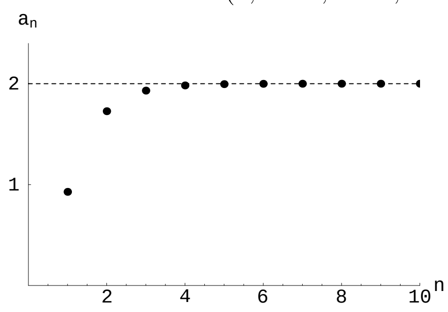
es convergente, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.
Mostraremos primero que es acotada y creciente.
Asumiendo que $a_n \leq 2$, tenemos $a_n + 2 \leq 4$ y por lo tanto, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$.
Como $a_1 \leq 2$, la relación $a_n \leq 2$ vale $\forall n \geq 1$. Como además $a_n \geq 0\ \forall n$, la sucesión es *acotada.*

Notemos ahora que $f(x) = \sqrt{x+2}$ es una función *creciente* para $x \geq -2$. Asumiendo que $a_{n+1} \geq a_n$, obtenemos pues $a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$, es decir, $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. Como $a_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} > a_1$, vemos que la sucesión es *creciente* $\forall\ n$. La sucesión, siendo acotada y creciente, es pues *convergente.*

Para hallar el límite L, utilizamos la relación (5):

$$L = \sqrt{L+2} \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 2 = 0$$

La ecuación cuadrática posee las soluciones $L = 2$ y $L = -1$, pero sólo $L = 2$ es solución de $L = \sqrt{L+2}$. El límite es pues $L = 2$. Los primeros términos son $(1, 1.732, 1.932, 1.983, 1.996, 1.999, \ldots)$.

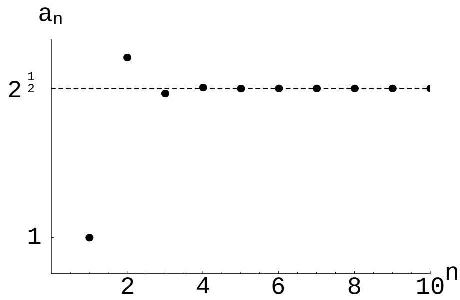


Ejemplo 2: Consideremos ahora la sucesión (3), donde $f(x) = 1 + 1/(1+x)$. La sucesión no es monótona, pues $a_2 > a_1$, $a_3 < a_2$, y en general $a_{n+1} > a_n$ si n impar y $a_{n+1} < a_n$ si n par. No obstante, podemos considerar la sucesión de los términos pares e impares por separado.

$$a_{n+2} = g(a_n), \quad g(a_n) = f(f(a_n)) = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+a_n}} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}$$

con término inicial $a_1 = 1$ para la sucesión impar y $a_2 = f(a_1) = 3/2$ para la sucesión par.
La función $g(x) = \frac{4+3x}{3+2x}$ es *creciente* para $x > -3/2$, pues $g'(x) = 1/(3+2x)^2 > 0$.

Como $a_3 = g(a_1) = 7/5 \geq a_1$, asumiendo $a_{n+2} \geq a_n$ obtenemos $a_{n+4} = g(a_{n+2}) \geq g(a_n) = a_{n+2}$, pues g es creciente. La sucesión de términos impares es pues *creciente*.
Además, como $g(x)$ es creciente y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{3}{2}$, tenemos $a_1 \leq a_n \leq 3/2 \ \forall\ n$ impar.
Siendo creciente y acotada, la sucesión de impares es pues *convergente*.
Como $a_4 = g(a_2) = 17/12 \leq a_2$, asumiendo $a_{n+2} \leq a_n$ obtenemos $a_{n+4} = g(a_{n+2}) \leq g(a_n) = a_{n+2}$. La sucesión de términos pares es pues *decreciente*. Además, es acotada pues $g(x) \geq 0$ si $x > 0$, por lo que $0 \leq a_n \leq a_2 \ \forall\ n$ par. La sucesión de pares es pues también *convergente*.
El límite de ambas sucesiones se obtiene de la ecuación $L = g(L)$, cuyas soluciones son $L = \pm\sqrt{2}$. Como $a_n > 0 \ \forall\ n$, el límite de ambas sucesiones es $L = +\sqrt{2}$. La sucesión original converge pues a $L = \sqrt{2} = 1.41421\ldots$, como habíamos mostrado. Los primeros términos son $1., 1.5, 1.4, 1.41667, 1, 41379\ldots\ldots$.



Se muestra en la siguiente figura el esquema gráfico de convergencia de una sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$, con límite L, correspondiente a una función $f(x)$ creciente (izquierda), como en el ej. 1, y decreciente (derecha), como en el ej. 2. La ec. (5) representa la intersección de las curvas $y = f(x)$ y $y = x$.

Si f es derivable y x está próximo al límite $L = f(L)$, podemos aproximar $f(x)$ por la *recta tangente*,

$$f(x) \approx f(L) + f'(L)(x - L) = L + f'(L)(x - L)$$

(aproximación lineal). Para a_n próximo a L obtenemos pues $a_{n+1} = f(a_n) \approx L + f'(L)(a_n - L)$, o sea,

$$a_{n+1} - L \approx f'(L)(a_n - L),$$

lo que consituye una sucesión *geométrica* de razón $f'(L)$ para la diferencia $a_n - L$ (es decir, $a_{n+k} - L \approx [f'(L)]^k(a_n - L)$). Esta converge a 0 si $|f'(L)| < 1$. Se concluye que para a_1 suficientemente próximo (pero distinto) a L, la sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$ convergerá a L si $|f'(L)| < 1$, pero tenderá a alejarse de L si $|f'(L)| > 1$. La convergencia es monótona si $0 \leq f'(L) < 1$ y alternada si $-1 < f'(L) < 0$.
En el ej. 1 ($f(x) = \sqrt{2+x}$, $L = 2$), $f'(L) = \frac{1}{2\sqrt{2+L}} = \frac{1}{4}$, mientras que en el ej. 2 ($f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $L = \sqrt{2}$) $f'(L) = -\frac{1}{(1+L)^2} = -\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$. En ambos casos se verifica $|f'(L)| < 1$.

Un sucesión famosa es

$$a_{n+1} = k a_n(1 - a_n), \quad 0 < a_1 < 1, \quad 0 < k < 4$$

que surge en diversos contextos (economía, ecología, etc.). La sucesión es acotada pues si $f(x) = kx(1-x)$, $0 < f(x) \leq k/4 < 1 \ \forall\ x \in (0,1)$. La ecuación $L = f(L)$ conduce a los posibles limites $L = 0$ o $L = 1 - 1/k$.
Si $0 < k \leq 1 \Rightarrow L = 0 \ \forall\ a_1 \in (0,1)$. En este caso, $f'(L) = k \leq 1$.
Si $1 < k \leq 3 \Rightarrow L = 1 - 1/k \ \forall\ a_1 \in (0,1)$. En este caso, $f'(L) = 2 - k$, con $|f'(L)| \leq 1$.
Si $3 < k < 4$, el límite de la sucesión *no existe*, excepto para valores particulares de a_1. Si $3 < k \lesssim 3,6$, a_n exhibe para n grande un comportamiento *oscilatorio*, alternando entre dos valores fijos si $k \lesssim 3,45$, entre 4 valores si $3,45 \lesssim k \lesssim 3,55$, etc. En cambio, si $3.6 \lesssim k < 4$, el comportamiento de a_n se torna *caótico*, es decir, errático, sin oscilaciones fijas. En este caso, a_n depende fuertemente del valor inicial a_1 aún para n grande.

5.2 Series

Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, podemos formar la sucesión de *sumas parciales*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A tal sucesión se la denomina *serie*. La *suma* de la serie es *el límite de la sucesión de sumas parciales*, si este límite existe:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Si el límite anterior es ∞ o no existe, se dice que la serie *diverge* (o no converge).

Condición necesaria (pero no suficiente) para convergencia: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{6}$$

En otras palabras, si $\lim_{n\to\infty} a_n$ es distinto de 0 o no existe, la serie *no converge*. Esto resulta obvio a partir de (4), ya que $S_n - S_{n-1} = a_n$. Si la serie converge, entonces $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$, que equivale a (6).

Ejemplo: Consideremos la sucesión de números naturales $a_n = n$, $n \geq 1$. Las sumas parciales son

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = n(1+n)/2$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ obviamente diverge ($\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$), lo que puede verse de (6) pues $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$.
A partir de la expresión de S_n, es posible obtener a_n como $a_n = S_n - S_{n-1}$. Por ej., $\frac{n(1+n)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series *convergentes*, se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

5.2.1 Serie geométrica

La *serie geométrica* es la sucesión de sumas parciales asociada a la sucesión geométrica, dadas por

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Estas pueden evaluarse explícitamente. Multiplicando S_n por r, obtenemos

$$rS_n = r + r^2 + \ldots + r^{n+1}$$

Restando,

$$rS_n - S_n = (1-r)S_n = 1 + r + \ldots r^n - (r + r^2 + \ldots r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}$$

obteniéndose, si $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \quad r \neq 1 \tag{7}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

de modo que la serie *converge* si $|r| < 1$. Si $r > 1$ o $r \leq -1$, el límite de (7) es ∞ o no existe, por lo que la serie *no converge*. Si $r = 1$, $S_n = 1 + 1^1 + \ldots + 1^n = n + 1$, con $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, por lo que la serie tampoco converge. Esto está de acuerdo con (6), pues si $|r| \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
La serie geométrica converge pues *si y sólo si* $|r| < 1$.

Ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^n=\frac{1}{1-1/2}=2,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2})^n=\frac{1}{1+1/2}=\frac{2}{3}.$$

En general, si $|r|<1$ y $m\geq 0$,

$$ar^m+ar^{m+1}+ar^{m+2}+\ldots=\sum_{n=m}^{\infty}ar^n=ar^m\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{ar^m}{1-r}.$$

donde ar^m representa *el primer término de la serie.*
Por ejemplo, $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{5^n}=-2\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^n}=-2(\frac{-2}{5})^4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{5})^n=-2\frac{(2/5)^4}{1+(2/5)}$.
El error cometido al estimar la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n$ con n términos es

$$\frac{1}{1-r}-S_n=\frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Para obtener un error $<\varepsilon$, se necesita n tal que $|\frac{r^{n+1}}{1-r}|\leq\varepsilon$, es decir, $n\geq\frac{\ln[\varepsilon(1-r)]}{\ln|r|}-1$. Si $\varepsilon=10^{-3}$, $n\geq 10$ para $r=\frac{1}{2}$, mientras que $n\geq 1145$ para $r=0.99$.

La serie geométrica surge frecuentemente en diversas aplicaciones. Por ejemplo, si todos los meses se deposita en una cuenta el 90% de lo depositado el mes pasado, con un depósito inicial de $a_1=a$ pesos, el monto depositado en el segundo mes es $a_2=ra_1=ra$, con $r=0,9$, en el tercer mes es $a_3=ra_2=r^2a$ y en el mes enésimo es $a_n=ra_{n-1}=r^{n-1}a$. El monto total depositado al cabo de n meses es

$$S_n=a(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

el cual nunca podrá superar el límite $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}=10a$.

Otro caso es el de una pelota que se deja caer desde una altura h_0, y que rebota hasta una altura $h_1=rh_0$, con $0<r<1$. La altura alcanzada despues de n rebotes es $h_n=rh_{n-1}=r^2h_{n-2}=\ldots=r^nh_0$. La distancia total recorrida después de n rebotes es

$$h_0+2h_1+2h_2+\ldots+2h_n=h_0[1+2(r+r^2+\ldots+r^n)]=h_0[1+2\frac{r(1-r^n)}{1-r}]$$

La distancia total recorrida hasta detenerse ($n\to\infty$) permanece pues *finita*:

$$H=\lim_{n\to\infty}h_0[1+\frac{2r(1-r^n)}{1-r}]=h_0[1+\frac{2r}{1-r}]=h_0\frac{1+r}{1-r}$$

Si $r=0$, la pelota se detiene al primer rebote y $H=h_0$. Si $r\to 1^-$, $H\to\infty$.

El tiempo de caída desde una altura h es $\sqrt{2h/g}$ donde $g=9.8m/s^2$ es la aceleración de la gravedad (dado que g constante, la altura en función del tiempo de cualquier objeto que se deja caer desde una altura h_0 es $h(t)=h_0-\frac{1}{2}gt^2$. Por lo tanto, $h(t)=0$ cuando $t=\sqrt{2h_0/g}$. El tiempo necesario para llegar a esa altura desde el piso es el mismo). El tiempo de caída desde la altura h_n es pues

$$t_n=\sqrt{2h_n/g}=\sqrt{2r^nh_0/g}=\sqrt{2h_0/g}(\sqrt{r})^n=t_0\alpha^n$$

donde $t_0=\sqrt{2h_0/g}$, $\alpha=\sqrt{r}$. El tiempo total transcurrido despues de n rebotes es

$$t_0+2t_1+2t_2+\ldots+2t_n=t_0[1+2(\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n)]=t_0[1+2\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}]$$

y el tiempo total transcurrido hasta detenerse es (nótese que si $0<r<1\Rightarrow 0<r<\alpha<1$)

$$T=\lim_{n\to\infty}t_0[1+2\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}]=t_0[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}]=t_0\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$$

Como $\alpha=\sqrt{r}>r$, $T/t_0>H/h_0$, pues $\frac{1+x}{1-x}$ es una función creciente de x para $x\in[0,1]$.

5.2.2 Series con términos positivos

Consideremos una serie en la que $a_n \geq 0\ \forall n$. Las sumas parciales son entonces positivas y crecientes:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \geq 0, \qquad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Una condición *suficiente* para la convergencia es pues que S_n este *acotada* $\forall n$, es decir, que $S_n \leq C$ $\forall n$. En efecto, al ser S_n creciente y estar acotada, S_n no puede oscilar ni tomar valores arbitrariamente grandes para $n \to \infty$, por lo que S_n se aproxima necesariamente a un límite finito (en el conjunto de números reales) que es la mínima cota superior de los S_n. Por otro lado, si la serie diverge, entonces $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$.

Ejemplo: Probaremos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + (\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2}) + \ldots \\
&\leq 1 + (\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^2}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2}) + \ldots = 1 + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{4}{4^2} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots \leq \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

es decir, $\sum\limits_{n=1}^{2^m-1} \frac{1}{n^2} \leq \sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{1}{2^n} \leq 2$. Al estar todas las sumas parciales acotadas por la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, la serie *converge.*

Ejemplo : Probaremos ahora que la serie (denominada serie armónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, a pesar de que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tenemos

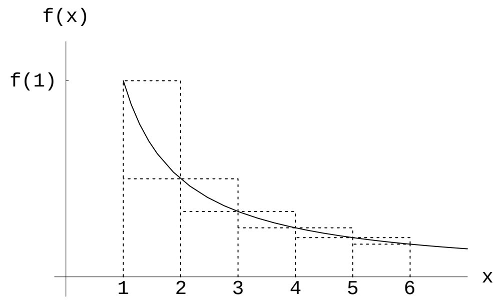
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots \\
&\geq 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots
\end{aligned}$$

es decir, $\sum\limits_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m}{2}$, lo que muestra que la serie diverge.

5.2.3 Criterio de la integral y estimación de series

Existe una estrecha relación entre una serie y la integral impropia correspondiente. Sea $f(x)$ una función *contínua, positiva y decreciente* en el intervalo $[1,\infty)$. Mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(n) \qquad \textit{converge si y sólo si} \qquad \int_1^{\infty} f(x)dx \qquad \textit{converge}$$



A partir de la figura, podemos inferir la siguiente cadena de desigualdades para $n > 1$:

$$f(2) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \ldots + f(n-1) \tag{8}$$

ya que la primer suma es el área de los rectángulos inscriptos situados bajo la curva entre $x = 1$ y $x = n$, y la segunda la de los rectángulos circunscriptos situados sobre la curva entre $x = 1$ y $x = n$.

Si $\int_1^n f(x)dx$ converge para $n \to \infty$, entonces la primer suma permanece acotada $\forall n$, siendo entonces *convergente* para $n \to \infty$ por ser *creciente* con n. Analogamente, si la segunda suma converge para $n \to \infty$, $I(n) \equiv \int_1^n f(x)dx$ permanece acotada para $n \to \infty$, siendo entonces *convergente* por ser $I(n)$ *creciente* con n. Como además, para un número real r arbitrario, $I(r) = \int_1^r f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx$ si $n \geq r$, entonces $I(r)$ también converge para $r \to \infty$. Para $n \to \infty$ se cumple entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{9}$$

si la serie o la integral converge. Esto implica también

$$\int_2^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \tag{10}$$

El criterio puede también aplicarse si las hipótesis se cumplen sólo para $n \geq n_0 \geq 1$, pues la convergencia de la serie y la integral dependen del comportamiento de $f(x)$ para x grande. En este caso, para $n > n_0$,

$$f(n_0+1) + \ldots + f(n) \leq \int_{n_0}^n f(x)dx \leq f(n_0) + \ldots + f(n-1)$$

y, si $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ converge,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

El método presente sirve también para *estimar* el error cometido al aproximar una serie *convergente* por una suma finita. Escribiendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{n_0} f(n) + \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} f(n)$, el último término satisface, si las hipótesis se cumplen al menos para $n \geq n_0$,

$$\int_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \tag{11}$$

En general, el punto medio del intervalo anterior es una buena estimación del error para n_0 grande, por lo que podemos escribir, en forma aproximada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=1}^{n_0} f(n) + \int_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_{n_0}^{n_0+1} f(x)dx \tag{12}$$

Ejemplo 1: Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Para $\alpha \leq 0$ la serie diverge por razones obvias ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$). Para $\alpha > 0$, podemos aplicar el criterio de la integral pues en tal caso $f(x) = 1/x^{\alpha}$ es positiva y decreciente para $x > 0$. Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(recordar integrales impropias hechas en clase) la serie *converge para $\alpha > 1$ y diverge* $\forall\ \alpha \leq 1$.

De esta forma, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ *convergen*, mientras que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ *divergen.*

La función

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1$$

se denomina *función zeta de Riemann* y posee importantes aplicaciones. Algunos valores son: $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,64493\ldots$, $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,08232\ldots$. Utilizando (10) y notando que $\zeta(\alpha) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, obtenemos

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}(\alpha-1)} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1\,, \qquad \alpha > 1$$

de modo que $\lim\limits_{\alpha\to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$. Puede probarse que para $\alpha \to 1^+$, $\zeta(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha-1} + 0.577$.

Ejemplo 2: Hallar el error al estimar $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mediante una suma de 10 y 20 términos.

Obtenemos $\sum\limits_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = 1,54977\ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{20} \frac{1}{n^2} = 1,59616\ldots$.

Utilizando (11) y $\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n_0}$, el error $R_{n_0} = \zeta(2) - \sum\limits_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2}$ satisface

$$\frac{1}{n_0+1} \leq R_{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$$

es decir $0,09 \leq R_{10} \leq 0,1$ y $0,0476 \leq R_{20} \leq 0,05$. La estimación mejorada (12) resulta en este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_0+1} + \tfrac{1}{2}[\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}] = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2} + \tfrac{1}{2}[\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0}]$$

que da como resultado $1,64522\ldots$ para $n_0 = 10$ y $1,64497\ldots$ para $n_0 = 20$. Los errores son ahora mucho menores: $\approx 0,0003$ para $n_0 = 10$ y $\approx 0,00004$ para $n_0 = 20$.

Ejemplo 3: Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

La función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ es positiva y decreciente para $x \geq 2$. Obenemos, sustituyendo $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}dx$,

$$\lim_{r\to\infty} \int_2^r \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\ln(2)}^r \frac{1}{u^{\alpha}} du = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}}, & \alpha > 1 \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

de modo que la serie converge para $\alpha > 1$ y diverge para $0 < \alpha \leq 1$.

Ejemplo 4: Estimar cuantos términos se necesitan para que $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} > M$, con $M = 10$ y $M = 100$.

Tenemos, por (8),

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \int_{1}^{m+1} \frac{1}{x} dx = \ln(m+1)$$

de donde si, $\ln(m+1) > M \Rightarrow m > e^M - 1$. Para $M = 10$, $m > 22025$ mientras que para $M = 100$, $m > 2,688 \times 10^{43}$, lo que indica la "lentitud" de la divergencia. En realidad, estas estimaciones son seguras pero algo grandes. A partir de

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \int_{1}^{m} \frac{1}{x} dx + 1 = \ln(m) + 1$$

obtenemos que m no puede ser menor a e^{M-1}, es decir, 8.103 para $M = 10$ y $9,89 \times 10^{42}$ para $M = 100$. En general,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \gamma + \psi(m+1), \qquad \gamma = \lim_{m \to \infty} (\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln m) \approx 0,577$$

donde γ es la constante de Euler y $\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ la derivada logaritmica de la función *Gamma* (véase sección 3.5), denominada función *Digamma*. Se obtiene entonces la cota inferior exacta $m > \psi^{-1}(M - \gamma) - 1$ (ψ^{-1} denota la función inversa), obteniéndose $m > 12367$ para $M = 10$ y $m > 1.51 \times 10^{43}$ para $M = 100$.

5.2.4 Criterio de comparación

Consideremos las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad a_n \geq 0, \qquad b_n \geq 0 \tag{13}$$

y supongamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$a_n \leq b_n \qquad \forall\, n \geq n_0$$

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.* Recíprocamente, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*
Demostración: Supongamos primero $n_0 = 1$. Entonces

$$a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n$$

Por lo tanto, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$ es finito, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ permanece acotada $\forall n$, siendo entonces convergente para $n \to \infty$ por ser creciente con n. Se verifica entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Si $n_0 > 1$, la demostración es similar. Para $n > n_0$,

$$a_1 + \ldots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0-1} + b_{n_0} + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n_0-1} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Por lo tanto, dado que $\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} (a_k - b_k)$ es una suma finita, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge y se verifica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} (a_n - b_n) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Este criterio es de fundamental importancia práctica para determinar la convergencia de series. Existe otra formulación del mismo que resulta muy conveniente: Para series del tipo (13) con $b_n > 0$,

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{ambas series convergen o divergen} \tag{14}$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ converge } \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{ converge} \tag{15}$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ diverge } \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{ diverge} \tag{16}$$

Para demostrar (14), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ implica que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ t.q. si $n > n_\varepsilon$, $|a_n/b_n - L| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}L$, obtenemos, para $n > n_\varepsilon$,

$$|\frac{a_n}{b_n} - L| < \tfrac{1}{2}L \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \tfrac{3}{2}L \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}Lb_n \leq a_n \leq \tfrac{3}{2}Lb_n$$

Por el criterio de comparación, de $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ se deduce que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mientras que de $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ se deduce que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Para demostrar (15), se procede en forma similar. El límite implica que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ t.q. si $n > n_\varepsilon$, $|a_n/b_n| = a_n/b_n < \varepsilon$. Por lo tanto, para $n > n_\varepsilon$, $a_n < \varepsilon b_n$, de donde si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Finalmente, para demostrar (16), el límite implica que $\forall\ M > 0\ \exists\ n_M$ t.q. si $n > n_M$, $a_n/b_n > M$. Por lo tanto, para $n > n_M$, $a_n > Mb_n$, de donde, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

Ejemplo 1: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^4 + 3n + 2}$$

La serie *converge*, pues para n grande a_n se comporta como $1/n^2$. Para ver esto en detalle, escribimos

$$\frac{n^2+2n}{n^4+3n+2} = \frac{n^2(1+2/n)}{n^4(1+3/n^3+2/n^4)} = \frac{1+2/n}{n^2(1+3/n^3+2/n^4)} \leq \frac{3}{n^2}$$

para $n \geq 1$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces la serie converge. Esto puede verse también utilizando (14):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^4+3n+2} \Big/ \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2+2n)}{n^4+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n}{1+3/n^3+2/n^4} = 1$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie converge.

Ejemplo 2: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n+2}$$

La serie *no converge*, pues para n grande, a_n se comporta como $1/n$. Para ver esto en detalle, escribimos

$$\frac{n^2+2n}{n^3+3n+2} = \frac{n^2(1+2/n)}{n^3(1+3/n^2+2/n^3)} = \frac{1+2/n}{n(1+3/n^2+2/n^3)} \geq \frac{1}{6n}$$

para $n \geq 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie diverge. Se llega al mismo resultado utilizando (14):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n+2} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2n)}{n^3+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n^2}{1+3/n^2+2/n^3} = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la serie diverge.

Ejemplo 3: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \tag{17}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)/n^\alpha = 0 \ \forall \alpha > 0$, para n suficientemente grande, $\ln(n) < n^\alpha$. Eligiendo por ejemplo $\alpha = \frac{1}{2}$, obtenemos, para n suficientemente grande,

$$\frac{\ln(n)}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la serie (17) también *converge*. Puede llegarse al mismo resultado utilizando (15) y comparando con la serie *convergente* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \Big/ \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} = 0$$

Puede aplicarse también el criterio de la integral: $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \int_0^\infty u e^{-u} du$ converge.

En general, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

converge $\forall \alpha > 1$, pues $\ln(n)$ es menor que cualquier potencia de n para n suficientemente grande. Puede obtenerse la misma conclusión aplicando el criterio de la integral ($\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \int_0^\infty u e^{-(\alpha-1)u} du = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$ si $\alpha > 1$, de modo que es convergente). En cambio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

no converge, pues $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ para $n \geq 3$.

5.2.5 Criterio de la razón

Es en realidad un caso particular del criterio de comparación. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$$

Si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{a_n + 1}{a_n} \leq r < 1 \quad \forall n \geq n_0$$

entonces la serie *converge*. Por hipótesis,

$$a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq r a_{n_0+1} \leq r^2 a_{n_0}, \qquad a_{n_0+n} \leq r a_{n_0+n-1} \leq \ldots \leq r^n a_{n_0}$$

Por lo tanto,

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+n} \leq a_{n_0}(1 + r + \ldots + r^n).$$

Para $n \to \infty$, el miembro derecho (una serie geométrica) converge a $a_{n_0}/(1-r)$. Por lo tanto, la primer suma permanece acotada para $n \to \infty$, siendo entonces convergente por ser creciente con n. Se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \frac{a_{n_0}}{1-r}$$

Por otro lado, si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{a_n + 1}{a_n} \geq r > 1 \quad \forall n \geq n_0$$

la serie *diverge*, pues

$$a_{n_0+1} \geq r a_{n_0}, \ ; \quad a_{n_0+2} \geq r a_{n_0+1} \geq r^2 a_{n_0}, \qquad a_{n_0+n} \geq r a_{n_0+n-1} \geq \ldots \geq r^n a_{n_0}$$

Como $r > 1$, esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_0+n} = \infty \neq 0$, por lo que la serie es divergente.

El presente criterio se utiliza normalmente evaluando el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$Si \;\; 0 \leq L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; converge$$

pues en tal caso, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \; n_\varepsilon$ tal que si $n \geq n_\varepsilon$, $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \varepsilon$, de donde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon < 1, \quad n \geq n_\varepsilon$$

si ε es suficientemente pequeño.

$$Si \;\; L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; diverge$$

pues en tal caso, de $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \varepsilon$ tenemos

$$1 < L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

para ε suficientemente pequeño. Lo mismo ocurre si $L = \infty$.

Notemos finalmente que si $L = 1$, el criterio no decide: si $a_n = 1/n$, $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) \to 1$ para $n \to \infty$, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. En cambio, si $a_n = 1/n^2$, $a_{n+1}/a_n = n^2/(n+1)^2 \to 1$ para $n \to \infty$, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

El criterio es muy conveniente cuando aparecen factoriales en la expresión de a_n.

Ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a > 1.$$

Tenemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1}$, que tiende a 0 para $n \to \infty$ $\forall$ a. Por lo tanto, la serie *converge.* Para $0 < a < 1$ la convergencia de la serie es obvia, pues $\frac{a^n}{n!} \leq a^n$ y en este caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ converge.

Podemos también aplicar directamente el criterio de comparación para $a > 1$, pues $\frac{a^n}{n!} = \frac{a...a...a}{n(n-1)...n_0(n_0-1)...1} \leq (\frac{a}{n_0})^{n-n_0} \frac{a^{n_0}}{n_0!} \leq (\frac{1}{2})^{n-n_0} \frac{a^{n_0}}{n_0!}$ eligiendo $n_0 > 2a$. Al ser menor que una serie geométrica, la serie converge.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

Aplicando el criterio anterior, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2(1+2/n+1/n^2)}{4n^2(1+2/n)(1+1/2n)} = \frac{1}{4} \frac{1+2/n+1/n^2}{(1+2/n)(1+1/2n)}$$

Para $n \to \infty$, el cociente se aproxima a $\frac{1}{4}$, por lo que la serie *converge.*

Podemos también aplicar directamente el criterio de comparación, pues $\frac{(n!)^2}{(2n)!^2} = \frac{n!}{2n(2n-1)...(n+1)} \leq (\frac{1}{2})^n$, por lo que la serie converge.

Ejemplo 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(1+1/n)^n}$$

Para $n \to \infty$, $(1+1/n)^n \to e$, de modo que el cociente anterior se aproxima a $\frac{1}{e} < 1$ para n grande. Por lo tanto, la serie *converge.*

Puede aplicarse también el criterio de comparación directamente, pues $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)...(n/2)(n/2-1)...1}{n...n...n} \leq 1 \ldots 1 \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{n/2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$, de modo que la serie es convergente.

5.2.6 Convergencia absoluta y condicional

Consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, donde a_n no es necesariamente positivo. Probaremos que

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \tag{18}$$

En tal caso se dice que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.* Sean

$$a_n^+ = \tfrac{1}{2}(|a_n| + a_n), \qquad a_n^- = \tfrac{1}{2}(|a_n| - a_n)$$

de modo que si $a_n \geq 0$, $a_n^+ = a_n$, $a_n^- = 0$, mientras que si $a_n < 0$, $a_n^+ = 0$, $a_n^- = -a_n = |a_n|$. Entonces

$$0 \leq a_n^{\pm} \leq |a_n|$$

Por el criterio de comparación, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, también convergerán las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Por lo tanto, como $a_n = a_n^+ - a_n^-$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

también converge.

Notemos, sin embargo, que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger aún cuando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge. En tal caso se dice que la convergencia es no absoluta o *condicional.* Si la convergencia es condicional, no se deben reagrupar o reordenar los términos de la serie, ya que el límite de las sumas parciales dependerá en este caso del orden de los mismos. Esto no ocurre cuando la convergencia es absoluta.

Ejemplo: Mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^2}$ converge absolutamente.

Como $|\frac{\text{sen}(n)}{n^2}| = \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall\ n \geq 1$, y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{\text{sen}(n)}{n^2}|$ también converge por el criterio de comparación, por lo que la serie original converge absolutamente.

5.2.7 Series Alternadas

Son aquellas en las que sus términos son alternadamente *positivos y negativos*, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \quad a_n \geq 0 \tag{19}$$

o bien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$. Existe un importante teorema de convergencia para este tipo de series. Si

$$a_{n+1} \leq a_n \;\; \forall n \geq 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{20}$$

entonces (19) *converge.*

Podemos escribir la suma parcial para un número *par* de térmimos en la forma

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Como por hipótesis $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$, vemos que S_{2n} es una función *positiva y creciente* de n. En cambio, para un número impar,

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

es una función *decreciente* de n, pues $a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$. Además,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \tag{21}$$

de donde obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$a_1 - a_2 = S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq \ldots \leq S_3 \leq S_1 = a_1$$

Por lo tanto, S_{2n} está *acotada superiormente*, y S_{2n+1} *acotada inferiormente* $\forall\ n$. Ambas sucesiones son entonces *convergentes* por ser monótonas, es decir,

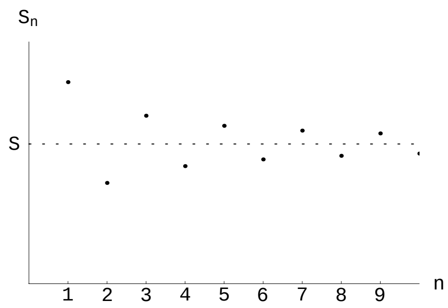
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S_p \leq \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S_i$$

Ahora entra en juego la segunda de las hipótesis en (20). Tenemos, utilizando (21),

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = S_p - S_i = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

de donde $S_p = S_i$. Tanto S_{2n} como S_{2n+1} *convergen pues a un mismo valor* S para $n \to \infty$. Obtenemos

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \leq \ldots S_3 \leq S_1 \tag{22}$$



Obviamente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. resulta también convergente con las mismas hipótesis. Asimismo, si los a_n son decrecientes sólo para $n \geq n_0 \geq 1$, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie (19) también converge, pues lo que sucede para $n \leq n_0$ no es relevante para la convergencia.

Una consecuencia importante de (22) es que

$$S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}, \qquad S_{2n+1} - S \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}$$

pues $S \leq S_{2n}$ y $S \geq S_{2n+2}$. El *error* $|S - S_n|$ es pues *menor o igual que el término siguiente*, tanto para n par o impar:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \tag{23}$$

Ejemplo 1: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge, pues $\frac{1}{n}$ decrece con n y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Sin embargo, no converge absolutamente pues $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Notemos que la serie converge lentamente (al valor $\ln(2)$ como veremos luego). Para estimarla mediante una suma finita S_n con un error $< 10^{-3}$, necesitamos $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$, es decir, $n > 1000$.

Ejemplo 2: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

converge $\forall \alpha > 0$ pues $\frac{1}{n^\alpha}$ decrece con n y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$. Sin embargo, converge absolutamente sólo para $\alpha > 1$ (véase sección 5.2.3).

Ejemplo 3: La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

converge, pues $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha} = 0$ y $\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ decrece para $n \geq 2\ \forall\ \alpha > 0$. Pero converge absolutamente sólo para $\alpha > 1$ (véase ejemplo 2 en 5.2.3).

5.2.8 Series de diferencias

Mostraremos que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, finito,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$$

En efecto, $S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 - L$.

Notemos que no es posible en general escribir la serie como la diferencia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, pues $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ no necesariamente converge. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$$

donde hemos supuesto $a_n = \frac{1}{n}$. También podríamos haber escrito $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}$, con $a_n = \frac{n+1}{n}$, obteniendo el mismo resultado: $a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 - 1 = 1$.

Asimismo, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (finito) y $k \geq 1$ es un número *natural*,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1}) - (a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1} + a_{n+k})] = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k\lim_{n\to\infty} a_n$$

Por ejemplo, para $k \geq 1$ natural,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}) = \frac{1}{k}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k})$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\sum_{n=k+1}^{\infty}(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+k}) = \frac{1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2k}) = \frac{1}{2k}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k})$$