Transformada de Laplace

Para una función f definida para $x \geq 0$, la transformada de Laplace (TL) se define como

$$L_f(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx \tag{1}$$

Si $f(x) < e^{\alpha x}$ para $x \to \infty \Rightarrow L_f(p)$ converge para $\mathrm{Re}[p] > \alpha$. Supondremos esta condición en lo sucesivo (que implica $\mathrm{Re}[p] > 0$ si $f(x)$ es acotada para $x > 0$). Notemos que si completamos a f t.q. $f(x) = 0$ para $x < 0 \Rightarrow L_f(ik) = \sqrt{2\pi} F(k)$, con $F(k)$ la T.F. de f.

La propiedad fundamental de (1) es que la TL de las derivadas $f^{(n)}(x)$ quedan expresadas en términos de $L_f(p)$ y las derivadas de f en el punto inicial $x = 0$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} L_{f'}(p) &= \int_0^\infty e^{-px} f'(x) dx = -f(0) + p \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx \\ &= -f(0) + p L_f(p) \end{aligned} \tag{2}$$

Por inducción, obtenemos en forma análoga,

$$\begin{aligned} L_{f^{(n)}}(p) &= \int_0^\infty e^{-px} f^{(n)}(x) dx = -f^{(n-1)}(0) + p \int_0^\infty e^{-px} f^{(n-1)}(x) dx \\ &= -f^{(n-1)}(0) - p f^{(n-2)}(0) - \ldots - p^{n-1} f(0) + p^n L_f(p) \end{aligned} \tag{3}$$

Otra prop. útil se refiere a la TL de la convolución de funciones f y g definidas para argumentos positivos, definida como

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - x') g(x') dx' = (g * f)(x)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} L_{f*g}(p) &= \int_0^\infty \int_0^x f(x - x') g(x') e^{-px} dx' dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^x f(x - x') e^{-p(x-x')} g(x') e^{-px'} dx' dx \\ &= \int_0^\infty f(u) e^{-pu} du \int_0^\infty g(x') e^{-px'} dx' \\ &= L_f(p) L_g(p) \end{aligned} \tag{4}$$

Para hallar la transf. inversa, completando a f en forma nula para $x < 0$, y considerando la TF de $e^{-\alpha x} f(x)$, con $\alpha > 0$, podemos escribir

$$e^{-\alpha x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk \int_0^\infty e^{-ikx'} e^{-\alpha x'} f(x') dx'$$

de donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{x(\alpha+ik)} dk \int_0^\infty e^{-x'(\alpha+ik)} f(x') dx' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zx} L_f(z) dz \end{aligned} \tag{5}$$

con $z = \alpha + ik$. El resultado es en principio indep. de la elección de α si las integrales convergen, es decir, si α es suficientemente grande. Si es posible cerrar la integral (5) con un semicírculo de radio muy grande a la izq. de α, a lo largo del cual la integral tiende a cero, por el teorema de los residuos obtenemos en tal caso

$$[f(x) = \sum_{z_i} \mathrm{Res}[e^{z_i x} L_f(z_i)] \tag{6}$$

donde la suma se extiende sobre los polos z_i de $e^{zx} L_f(z)$.

El mayor inconveniente de la TL es que la relación inversa requiere el conocimiento de $L_f(p)$ para valores complejos de p. Si se dispone tan sólo de una tabla de valores numéricos de $L_f(p)$ para cierto conjunto finito de valores reales de p (y no una expresión analítica de $L_f(p)$), como ocurre en algunos problemas prácticos, no es posible recuperar $f(x)$ con gran precisión (es un típico problema "ill posed").

Propiedades y ejemplos ($a > 0$ en todos los casos):

	$f(x)$	$L_f(p)$
1	$f(ax)$	$L_f(p/a)/a$
2	$f(x+a)$	$e^{pa} L_f(p)$
3	$f'(x)$	$-f(0) + pL_f(p)$
4	$xf(x)$	$-d[L_f(p)]/dp$
5	$(f * g)(x)$	$L_f(p) L_g(p)$
6	e^{-ax}	$\frac{1}{a+p}$
7	$\cos(ax)$	$p/(a^2 + p^2)$
8	$\sin(ax)$	$a/(a^2 + p^2)$
9	$H(x-a)$	e^{-ap}/p
10	$\delta(x-a)$	e^{-pa}

Ejemplo 1: Como $\int_0^\infty e^{-px} e^{iax} dx = \frac{1}{p-ia} = \frac{p+ia}{p^2+a^2}$, obtenemos $\int_0^\infty e^{-px} \cos(ax) dx = \mathrm{Re}[\frac{p+ia}{p^2+a^2}] = \frac{p}{p^2+a^2}$, $\int_0^\infty e^{-px} \sin(ax) dx = \mathrm{Im}[\frac{p+ia}{p^2+a^2}] = \frac{a}{p^2+a^2}$, en acuerdo con las fórmulas 7–8 de la tabla.

Ej. 2: Dado que $\underset{z=\pm ia}{\mathrm{Res}}[\frac{e^{zx} z}{z^2+a^2}] = \frac{e^{\pm ia}}{2}$, la ec. (6) conduce a $\sum_{z=\pm ia} \mathrm{Res}[e^{zx} \frac{z}{z^2+a^2}] = \cos(ax)$ para $L_f(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$.

Ejemplo 3: Hallar $u(t)$ t.q.

$$u'' + k^2 u = f(t)$$

para $t > 0$, con $u(0)$, $u'(0)$ datos conocidos y $k \neq 0$. Multiplicando la ec. anterior por e^{-pt} e integrando, obtenemos, utilizando la ec. (3),

$$-u'(0) - pu(0) + (p^2 + k^2) L_u(p) = L_f(p)$$

de donde

$$L_u(p) = \frac{u'(0) + pu(0)}{p^2 + k^2} + \frac{1}{p^2 + k^2} L_f(p)$$

Utilizando ahora 5, 7 y 8 de la tabla anterior, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{k} u'(0) \sin(kt) + u(0) \cos(kt) + \frac{1}{k} \int_0^t \sin[k(t-t')] f(t') dt'$$

que coincide con el conocido resultado para la solución de esta ecuación obtenido mediante la función $k(x - x')$.