

Matemáticas Especiales para Física Médica (curso 2007)

Series de Fourier (Resumen)

Introducción:

Veremos ahora un nuevo tipo de desarrollo en serie válido para funciones definidas en un intervalo finito $[-L, L]$, $L > 0$, o equivalentemente, funciones *periódicas* de período $2L$, tal que $f(x+2L) = f(x) \forall x$. El desarrollo convergerá en cualquier caso a la extensión *periódica* de f , pues es en sí mismo periódico.

Desde el punto de vista matemático, el desarrollo en serie de Fourier puede considerarse una generalización de la expansión de un vector v del espacio euclideo tridimensional \mathbb{R}^3 en una base formada por vectores ortogonales (perpendiculares). Recordemos que $v = (x, y, z)$ puede escribirse como $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ son tres vectores perpendiculares de longitud 1: $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, donde el punto denota producto escalar. De este modo, $x = e_1 \cdot v$, $y = e_2 \cdot v$, $z = e_3 \cdot v$. y se cumple $v \cdot v = x^2 + y^2 + z^2$, donde $v \cdot v$ es la longitud al cuadrado del vector.

En general, un vector $v = (x_1, \dots, x_n)$ de un espacio euclideo n -dimensional puede escribirse en la forma

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

donde los vectores e_i forman un conjunto ortogonal ($e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$) y son de longitud 1 ($e_i \cdot e_i = 1 \forall i$). Los coeficientes x_i están dados por

$$x_i = e_i \cdot v, \quad i = 1, \dots, n$$

Se cumple además que $v \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (generalización del teorema de Pitágoras).

Si consideramos la expansión anterior con vectores e_i ortogonales pero de longitud arbitraria no nula, entonces $e_i \cdot v = \sum_{j=1}^n x_j (e_i \cdot e_j) = x_i (e_i \cdot e_i)$ y por lo tanto

$$x_i = (e_i \cdot v) / (e_i \cdot e_i), \quad i = 1, \dots, n$$

En tal caso, $v \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i^2 (e_i \cdot e_i)$.

El conjunto de funciones reales derivables definidas en el intervalo $[-L, L]$ puede también considerarse como un conjunto de vectores, pero en un espacio vectorial V de dimensión infinita. En este espacio el producto escalar está dado por

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$$

Un conjunto ortogonal es un conjunto $\{f_1, f_2, \dots\}$ de funciones no nulas de este espacio que satisfacen $(f_i, f_j) = 0$ si $i \neq j$, es decir, $\int_{-L}^L f_i(x)f_j(x)dx = 0$ si $i \neq j$. Si el conjunto es completo, una función arbitraria f de V puede escribirse como una serie

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x)$$

donde, debido a la ortogonalidad de los f_i , se cumple que $(f_i, f) = c_i (f_i, f_i)$, de forma que los coeficientes c_i están dados por

$$c_i = \frac{(f_i, f)}{(f_i, f_i)} = \frac{\int_{-L}^L f_i(x)f(x)dx}{\int_{-L}^L f_i^2(x)dx}$$

y determinan completamente la función f . En tal caso se cumple

$$(f, f) = \int_{-L}^L f^2(x)dx = \sum_{i,j} (c_i f_i, c_j f_j) = \sum_{i=1}^n c_i^2 (f_i, f_i)$$

El desarrollo en serie de Fourier es un caso particular de este tipo de desarrollo, en el cual $f_i(x)$ es de la forma $\cos(n\omega x)$ o $\sin(n\omega x)$, con $i = n$ natural ($n = 0, 1, 2, \dots$) y $\omega = \pi/L$.

Desde el punto de vista físico, el desarrollo en serie de Fourier puede verse como la descomposición de una señal periódica de período $2L$ (y por lo tanto frecuencia angular $\omega = 2\pi/(2L) = \pi/L$) en términos de señales periódicas armónicas simples de la forma $\cos(n\omega x)$ y $\sin(n\omega x)$. De esta manera, cualquier señal periódica (véase luego las condiciones necesarias estrictas para convergencia) puede escribirse como una serie de señales armónicas simples, y aproximarse por una suma finita de señales armónicas simples con un grado de precisión arbitrario.

Formalismo

Consideremos una función $f : [-L, L] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua que posee un número finito de máximos y mínimos en $[-L, L]$, con $L > 0$. Entonces $f(x)$ admite un desarrollo del tipo

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)], \quad \omega = \frac{\pi}{L} \quad (1)$$

$\forall x \in (-L, L)$, donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega x) dx. \quad (2)$$

Si además $f[-L] = f[L]$, la serie converge a f en $[-L, L]$. La serie (1) se denomina *serie de Fourier*, y es obviamente una función periódica de período $2L = 2\pi/\omega$. Así, ω representa frecuencia angular del modo fundamental, y $n\omega$ la frecuencia angular de los armónicos sucesivos. Para $x \in \mathfrak{R}$ convergerá a la extensión periódica de f , definida por $f(x + 2L) = f(x) \forall x$.

Obviamente, si $f(x)$ es par ($f(x) = f(-x)$), $b_n = 0 \forall n$, mientras que si $f(x)$ es impar ($f(-x) = -f(x)$), $a_n = 0 \forall n$. Notemos también que

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

es el *valor medio* de f en $[-L, L]$.

Asumiendo válida la expansión (1), resulta obvio que los coeficientes a_n, b_n deben estar dados por (2), debido a la ortogonalidad de las funciones $\cos(n\omega x), \sin(n\omega x)$ en el intervalo $[-L, L]$: Se verifica, para n, m naturales, que

$$\int_{-L}^L \cos(m\omega x) \cos(n\omega x) dx = L\delta_{mn}(1 + \delta_{m0}\delta_{n0}) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \geq 1 \\ 2L & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \cos(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = L\delta_{m,n}$$

donde recordamos nuevamente que el símbolo $\delta_{m,n}$ se denomina *delta de Kronecker* y está definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Es decir, que las integrales de estos productos son todas nulas excepto cuando $n = m$ y las dos funciones del producto son iguales, en cuyo caso vale L si $n = m \geq 1$ (y $2L$ si $n = m = 0$ para el caso del producto de cosenos). De esta forma, el resultado (2) se obtiene reemplazando a $f(x)$ por el desarrollo (1) en los integrandos de (2).

Si f satisface las condiciones establecidas salvo en un número *finito* de puntos aislados x_c donde f es discontinua, en los que existen, sin embargo, los límites y derivadas laterales $f(x_c^\pm) \equiv \lim_{x \rightarrow x_c^\pm} f(x)$, entonces la serie de Fourier converge a $f(x)$ en los x donde f es continua, pero converge al *punto medio*

$$\frac{1}{2}[f(x_c^+) + f(x_c^-)] \quad (3)$$

en los valores x_c donde f es discontinua.

Convergencia uniforme: Si f posee derivada continua en $[-L, L]$, y $f[-L] = f[L]$, puede demostrarse que la convergencia de la serie de Fourier es *absoluta y uniforme* para $x \in [-L, L]$ (es decir, $|S_m(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in [-L, L]$ y $m > m_\varepsilon$). En este caso la serie de Fourier es derivable término a término, convergiendo la serie derivada a $f'(x)$ para $x \in (-L, L)$.

Si $f(x)$ es discontinua en un punto x_c o $f[-L] \neq f[L]$ entonces la convergencia *no es uniforme*. En tal caso, si derivamos la serie término a término obtendremos una serie que no necesariamente es convergente punto a punto, aunque si converge en forma débil como distribución (véase el ejemplo 4). Otra de las manifestaciones de la convergencia no uniforme es el fenómeno de Gibbs en los bordes de una discontinuidad, discutido en clase.

Otras condiciones de convergencia. Puede también demostrarse que sólo asumiendo que $\int_{-L}^L [f(x)]^p dx$ existe para $p = 1$ y $p = 2 \Rightarrow$ la serie de Fourier converge *en media* a $f(x)$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0$$

donde $S_n(x)$ denota la suma parcial de la serie de Fourier, aún si f no es continua. Este tipo de convergencia es menos restrictiva que la convergencia puntual.

Aún menos exigente es la convergencia como distribución (convergencia débil): Se dice que S_n converge a f como distribución si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

para cualquier función de prueba g , aún si la serie $S_n(x)$ no converge puntualmente en ningún punto (véase el ejemplo 3). Este es el tipo de convergencia aplicable cuando lo que se desarrolla en serie de Fourier son distribuciones (se discutirán en las próximas clases) y es muy utilizado en física e ingeniería.

Ejemplos:

1) $f(x) = x$, $x \in [-L, L]$. Dado que $f(x)$ es impar, $a_n = 0 \forall n$ y

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin(n\omega x) dx = \frac{-x \cos(n\omega x)}{n\omega L} \Big|_{-L}^L + 0 = \frac{L}{\pi} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

por lo que

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\omega x)}{n}, \quad |x| < L \quad (4)$$

En $x = \pm L$, la serie converge a $\frac{1}{2}[f(L) + f(-L)] = 0$.

La serie converge en realidad a la extensión periódica

$$f(x) = x - 2n\pi \quad \text{si} \quad -\pi + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi$$

siendo discontinua en $x = \pm\pi + 2n\pi$.

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $|x| \leq L$.

En este caso, $b_n = 0 \forall n$ y puede probarse que $a_n = (2L^2/\pi^2)(-1)^n/n^2$ si $n \geq 1$, con $a_0 = L^2/3$ (Probar como ejercicio!) por lo que

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\omega x)}{n^2}, \quad |x| \leq L$$

Notemos que la derivada de esta serie coincide la serie (4).

El desarrollo converge ahora también en $x = \pm L$, ya que $f(L) = f(-L)$. Para $x = 0$ y L , el desarrollo anterior conduce a las identidades (verificar como ejercicio!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3)

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \quad 0 \leq |x| < a < L$$

con $f(x) = 0$ si $|x| > a$. Obtenemos $b_n = 0$ y $a_n = \frac{1}{L} \int_{-a}^a \cos(n\omega x) dx = \sin(n\omega a)/(n\pi a)$ si $n \geq 1$, con $a_0 = 1/L$. Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega a)}{n} \cos(n\omega x), \quad |x| \leq L \quad (5)$$

Para $x = \pm a$, la serie converge al punto medio $\frac{1}{4a}$.

Se pueden extraer dos conclusiones muy importantes:

i) Al disminuir a , aumenta el número de coeficientes a_n con valor apreciable en (5). En efecto, $\sin(n\omega a)/(n\pi a) \approx 1/L$ si $n \ll L/a$, anulándose por primera vez para $n \approx L/a$. El número de coeficientes a_n con valor apreciable aumenta pues como L/a al disminuir a . *Cuanto más corto es el pulso (respecto de L) mayor es el número de frecuencias necesarias para representar correctamente el pulso.*

ii) Para $a/L \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow \delta(x)$ y obtenemos como límite

$$\delta(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega x) \right] = \frac{1}{2L} P \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega x}, \quad |x| \leq \pi$$

que puede obtenerse directamente utilizando las fórmulas usuales para $f(x) = \delta(x)$. La serie anterior *no converge puntualmente*, pero si converge *como distribución* a $\delta(x)$ para $|x| \leq L$.

4) Si derivamos término a término el desarrollo (4) de $f(x) = x$ obtenemos la serie

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(n\omega x) \quad (6)$$

que no converge puntualmente. Esto se debe a que $f(-L) \neq f(L)$, siendo entonces la convergencia de (4) no uniforme. No obstante la serie (6) converge como distribución a

$$f'(x) = 1 - 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - L + 2mL)$$

que es la derivada (como distribución) de la extensión periódica de x (recordar dibujos y comentarios de clase).

5) Ejemplo trivial. Si $f(x) = 1 + 2 \cos(3\omega x)$, con $m \geq 1$, $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$, $a_3 = 2$, $a_0 = 2$ y $a_n = 0$ si $n \neq m$, como el lector podrá fácilmente verificar, por lo que el desarrollo en serie de Fourier de f es obviamente la misma expresión. Lo mismo sucede para cualquier combinación lineal de senos y cosenos de frecuencia ω o múltiplo de ω : El desarrollo en serie de Fourier de la función definida como la suma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

es esta misma expresión.

Ejemplo 6:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

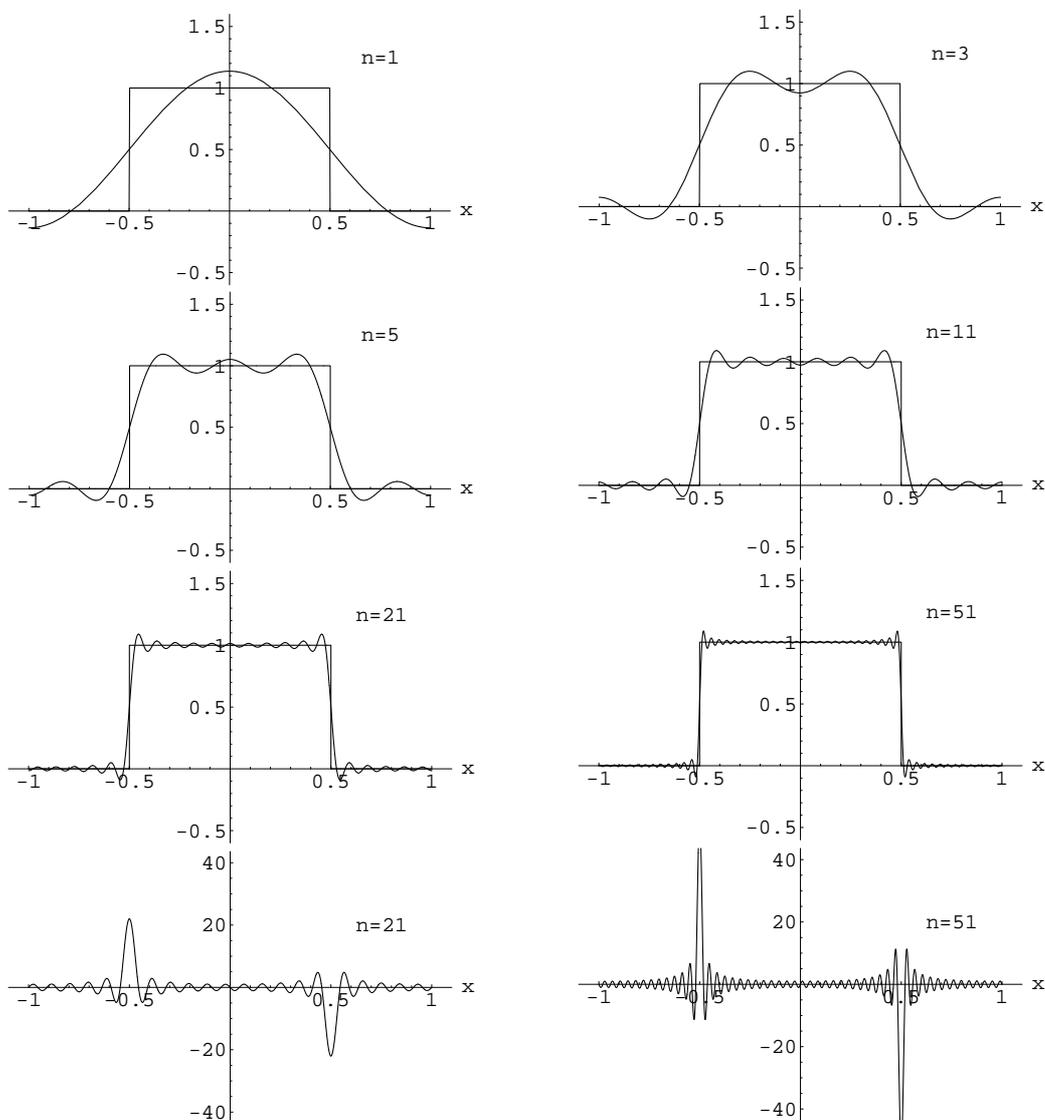
Intervalo: $[-1, 1]$.

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{2}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 0$$

con $a_0 = 1$. Suma parcial de orden n :

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(m\pi x)$$

Se muestran los gráficos de f y S_n para $n = 1, 3, 5, 11, 21, 51$. Los dos últimos paneles muestran la gráfica de la derivada $\frac{dS_n(x)}{dx}$ para $n = 21$ y 51 , que converge como distribución a $\delta(x + \frac{1}{2}) - \delta(x - \frac{1}{2})$ en $[-1, 1]$.



Desarrollos de medio rango

Si $f(x) = f(-x)$ (función *par*) $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega x) dx$$

Si $f(x) = -f(-x)$ (función *impar*) $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$ y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x) dx$$

Una función f definida en $[0, L]$ puede pues desarrollarse tanto en serie de cosenos como en serie de senos en la forma anterior, *convergiendo la serie a la extensión periódica par o impar de f respectivamente*.

Ejemplo: Consideremos $f(x) = 1$ para $x \in [0, L]$. El desarrollo en serie de cosenos es obviamente $f(x) = 1$, ya que la extensión par de f es la función constante 1. El lector podrá comprobar fácilmente que $a_0 = 2$ y $a_n = 0$ para $n \geq 1$.

El desarrollo en serie de senos es en cambio no trivial, ya que la extensión impar de f no es constante (recordar dibujo). Se obtiene

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L 1 \sin(n\omega x) dx = -\frac{2 \cos(n\omega x)}{nL\omega} \Big|_0^L = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

por lo que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega x)}{2n+1}, \quad 0 < x < L$$

En $x = 0$ o L la serie converge a 0 (punto medio), mientras que para $-L < x < 0$ la serie converge a -1 .

Forma compleja del desarrollo

Recordemos que

$$e^{in\omega x} = \cos(n\omega x) + i \sin(n\omega x)$$

Por lo tanto

$$\cos(n\omega x) = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}), \quad \sin(n\omega x) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}),$$

Reemplazando en (1), podemos entonces escribir (1) como una serie de potencias en $e^{i\omega x}$ ($e^{in\omega} = (e^{i\omega})^n$):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad (7)$$

con $P \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m$ el valor principal y

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\omega x} dx \quad (8)$$

con $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$. Es decir, sobreentendiendo en las fórmulas siguientes el valor principal,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \text{con } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Para $f(x)$ real, $c_{-n} = c_n^*$. En tal caso, $a_n = c_n + c_{-n} = 2\text{Re}[c_n]$, $b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\text{Im}[c_n]$.

Esta forma resulta en general muy conveniente. Notemos que se verifica, para n, m enteros cualesquiera,

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{im\omega x} e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\omega(m-n)x} dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad \omega = \pi/L$$

donde hemos tenido en cuenta que $e^{\pm i\omega(m-n)L} = e^{\pm i\pi(n-m)} = (-1)^{n-m}$, de modo que las funciones $e^{in\omega x}$ son *ortogonales* con el producto interno complejo $(f, g) = \int_{-L}^L f^*(x)g(x)dx$. La expresión (8) para c_n se obtiene pues directamente reemplazando $f(x)$ en el integrando de (8) por la última serie de (7).

Como ejemplo trivial, el desarrollo de Fourier complejo de $f(x) = \cos(2\omega x)$ es $\cos(2\omega x) = \frac{1}{2}e^{i2\omega x} + \frac{1}{2}e^{-i2\omega x}$, es decir, $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, con $c_n = 0$ si $n \neq \pm 2$. Mas ej. en la práctica.

Identidad de Parseval

Utilizando la ortogonalidad de las funciones $\sin(n\omega x)$ y $\cos(m\omega x)$, o bien la forma compleja del desarrollo, puede fácilmente demostrarse la identidad de Parseval:

$$\|f\|^2 \equiv \int_{-L}^L f^2(x)dx = L\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right] = 2LP \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

que puede interpretarse como la generalización del teorema de Pitágoras.

Demostración de la convergencia de la Serie de Fourier

Demostremos ahora la convergencia de la serie de Fourier para el caso de $f(x)$ derivable en $[-L, L]$, y asumiremos, para simplificar las expresiones, $L = \pi$. Las sumas parciales están dadas por

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos(mx) \cos(mt) + \sin(mx) \sin(mt) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos[m(t-x)] \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} K_n(s) &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos[ms] = \frac{1}{2} \sum_{m=-n}^n e^{ims} = \frac{e^{i(n+1)s} - e^{-ins}}{2(e^{is} - 1)} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})s} - e^{-i(n+\frac{1}{2})s}}{2(e^{is/2} - e^{-is/2})} \\ &= \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})s]}{2 \sin[\frac{1}{2}s]}, \end{aligned} \tag{9}$$

donde se asume que si $s = 0$ o en general $s = 2k\pi$, con k entero, $K_n(2k\pi) = \lim_{s \rightarrow 2k\pi} K_n(s) = n + \frac{1}{2}$, que es el valor correcto de la suma para $s = 2k\pi$. Además, de la suma que define a $K_n(s)$ se ve que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dt = \pi \tag{10}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(x)) K_n(t-x) dt \\ &= f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n + \frac{1}{2})(t-x)] dt \end{aligned} \quad (11)$$

Necesitamos ahora el lema de *Riemann-Lebesgue*: Si g es continua en $[a, b]$, salvo en todo caso en un número *finito* de puntos en los que permanece *acotada*, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(sx + \alpha) dx = 0 \quad (12)$$

(Recordar interpretación gráfica dada en clase). Si g es derivable en $[a, b]$, la demostración de este lema es inmediata: Integrando por partes,

$$\int_a^b g(x) \sin(sx) dx = -g(x) \frac{\cos(sx)}{s} \Big|_a^b + \int_a^b g'(x) \frac{\cos(sx)}{s} dx$$

lo cual tiende a 0 para $s \rightarrow \infty$ ya que $|\cos(sx)| < 1$. El mismo razonamiento es válido si g es derivable salvo en un número finito de puntos, siempre y cuando existan (y sean finitas) las derivadas laterales.

Es inmediato demostrar ahora la convergencia del desarrollo para $x \in (-\pi, \pi)$. En este caso, la función $g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]}$ si $t \neq x$, con $g(x) = f'(x)$, es continua $\forall t \in [-\pi, \pi]$, incluyendo $t = x$ si f es derivable:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} = f'(x)$$

por lo que la integral en (11) se anula para $n \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (13)$$

Si $x = \pm\pi$, el denominador de $g(t)$ se anula tanto para $t \rightarrow \pi$ como $t \rightarrow -\pi$. Sin embargo, si $x = \pm\pi$, $K_n(t-x)$ es una función par de t y por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^0 K_n(t-x) dt = \int_0^{\pi} K_n(t-x) dt = \frac{1}{2} \pi$$

Para $x = \pm\pi$ podemos entonces escribir

$$S_n(x) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) - f(\pi)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n + \frac{1}{2})(t-x)] dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t) - f(-\pi)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n + \frac{1}{2})(t-x)] dt$$

donde el primer y segundo cociente permanecen acotados para $t \rightarrow \pi$ y $t \rightarrow -\pi$ respectivamente (tienden a $f'(\pm\pi)$). Aplicando el lema de Riemann, obtenemos pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

coincidiendo con $f(\pm\pi)$ si $f(\pi) = f(-\pi)$.

Cabe destacar que si f es continua en $[a, b]$ pero $f'(x)$ no existe en un número finito de puntos aislados x_c , donde si existen en cambio las *derivadas laterales*

$$f'^{\pm}(x_c) = \lim_{t \rightarrow x_c^{\pm}} \frac{f(t) - f(x_c)}{t - x_c} \quad (14)$$

la serie también converge a $f(x)$ aún para $x = x_c$. En tal caso $g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]}$ es continua para $t \neq x$ y permanece acotada para $t \rightarrow x$, aún si $x = x_c$ ($\lim_{t \rightarrow x_c^{\pm}} g(t) = f'^{\pm}(x_c)$), cumpliendo con las condiciones del lema.

Demostremos finalmente que en caso de discontinuidad de f en $x = x_c$, la serie de Fourier converge al punto medio $\frac{1}{2}[f(x_c^+) + f(x_c^-)]$. En primer lugar, si $x \in (-\pi, \pi)$, combinando (10) con el lema (12) obtenemos, para $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(t-x) dt \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\varepsilon} K_n(t-x) dt = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{\pi} K_n(t-x) dt \end{aligned} \quad (15)$$

por ser $K_n(s)$ par.

Notemos ahora que $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{2 \sin[(t-x)/2]}$ satisface las condiciones del lema para $t \in [-\pi, \pi]$ si $x \neq x_c$, y para $t \neq x_c$ si $x = x_c$. En este caso,

$$S_n(x_c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_c} f(t) K_n(t-x_c) dt + \frac{1}{\pi} \int_{x_c}^{\pi} f(t) K_n(t-x_c) dt \quad (16)$$

La segunda integral podemos escribirla como

$$\frac{f(x_c^+)}{\pi} \int_{x_c}^{\pi} K_n(t-x_c) dt + \int_x^{\pi} \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2\pi \sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]} \sin[(n+\frac{1}{2})(t-x_c)] dt$$

Para $n \rightarrow \infty$, el segundo término se anula por el lema de Riemann, pues $g(t) = \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]}$ permanece acotado para $t \rightarrow x_c^+$ ($\lim_{t \rightarrow x_c^+} g(t) = f'(x_c)$), mientras que el primer término tiende a $\frac{1}{2}f(x_c^+)$. Análogamente, la primera integral en (16) tiende a $\frac{1}{2}f(x_c^-)$. Esto conduce al resultado (3).