RESOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE POR SEPARACION DE VARIABLES

Armónicos circulares

Consideremos la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, con

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{1}$$

en un sector circular $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \alpha < 2\pi$. Planteando una solución producto $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{R'}{r} - \frac{k^2 R}{r^2} = 0, \qquad \Theta'' = -k^2\Theta$$

con k constante, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} R(r) &= Ar^k + Br^{-k}, \;\; \Theta(\theta) = a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta), \;\; k \neq 0 \\ R(r) &= A + B\ln r = B\ln\frac{r}{r_0}, \;\; \Theta(\theta) = a + b\theta, \;\; k = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(la ec. para R es del tipo de Euler y su solución es de la forma r^λ, con λ determinado por $\lambda(\lambda-1)+\lambda-k^2 = 0$, o sea, $\lambda = \pm k$; si $k=0$ la otra solución l. i. de $r^0 = 1$ es $r^\lambda \ln r = \ln r$). Obsérvese que k puede ser en principio real, imaginario o complejo (si $k = k_r + ik_i$, $r^k = e^{k\ln r} = e^{k_r \ln r}[\cos(k_i \ln r) + i\sin(k_i \ln r)]$).

Como ejemplo, si $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$, con

$$u(r_1,\theta) = f_1(\theta), \quad u(r_2,\theta) = f_2(\theta)$$

$\Rightarrow a = 0$ y $k = n\pi/\alpha$ (real), con $n \geq 1$. La solución general es entonces

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{n\pi/\alpha} + B_n r^{-n\pi/\alpha})\sin(n\pi\theta/\alpha) \tag{3}$$

donde las constantes A_n y B_n pueden obtenerse a partir del desarrollo en serie de senos de $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$. Se dejan los detalles para el lector. Obviamente, si u debe permanecer acotada y $r_1 = 0 \Rightarrow B_n = 0$, mientras que si $r_1 > 0$ y $r_2 = \infty \Rightarrow A_n = 0$.

En el caso de un anillo circular $0 \leq \theta \leq 2\pi$, con $r_1 \leq r \leq r_2$, u debe ser *monovaluada*, lo que implica $k = n$, con n entero (y $b = 0$ si $k = n = 0$). La solución general es pues de la forma

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= A_0 + B_0 \ln r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)] \end{aligned} \tag{4}$$

Nuevamente, si $r_1 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$, $B_n = 0$, mientras que si $r_2 = \infty$, $B_0 = 0$, $A_n = 0$, $n \geq 1$.

Solución de Poisson

Consideremos ahora en detalle el problema de determinar una función armónica u en el interior de un círculo de radio $r_2 = a$ (o sea $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) conociendo los valores de u en el contorno, $u(a,\theta) = f(\theta)$. La solución general debe ser pues de la forma

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)] \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)]$$

de donde, recordando la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier,

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)f(\theta)d\theta, \;\; b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)f(\theta)d\theta, \;\; n \geq 1$$

con $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \langle f\rangle$. Reemplazando en (5), y teniendo en cuenta que $\cos(n\theta)\cos(n\theta') + \sin(n\theta)\sin(n\theta') = \cos[n(\theta-\theta')]$, obtenemos

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos[n(\theta-\theta')]\}f(\theta')d\theta'$$

Definiendo $z = (r/a)e^{i\theta}$, con $|z| < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}[\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n] = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{2d^2(r,a,\theta)}, \quad d^2(r,a,\theta) = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta) \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma la solución de Poisson,

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta')d\theta'}{d^2(r,a,\theta-\theta')}, \quad r < a \tag{6}$$

Notemos que $d(r,a,\theta-\theta')$ es la *distancia* entre el punto (r,θ) del interior del circulo y el punto (a,θ') del borde (recordar dibujo hecho en clase).

Comentarios:
1) Si $r = 0$, $d^2 = a^2$ y

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')d\theta' = \langle f\rangle$$

El valor de u en el centro del círculo es pues el *promedio* de los valores de u en el borde del círculo. Como esto es válido para cualquier círculo con centro en $(0,0)$ y radio $r < a$, vemos que el valor de una función u, armónica en una región R, en un punto cualquiera $(x,y) \in R$ es igual al *promedio* de los valores de u sobre cualquier circunferencia con centro en (x, y) contenida en R, y por lo tanto, sobre cualquier región circular con centro en (x, y). Una función armónica no puede pues poseer extremos (máximos o mínimos) en el interior de R (ya que en tal caso el valor en el extremo sería superior o inferior al promedio), estando los extremos siempre en el borde de R.

2) Problema exterior: Consideremos ahora el problema de determinar $u(r, \theta)$ en el exterior del círculo, es decir $r \geq a$, conociendo los valores en el borde, $u(a, \theta) = f(\theta)$. Podemos repetir el esquema anterior pero es más fácil emplear el siguiente procedimiento de inversión. Si $u(r, \theta)$ es una función armónica de la forma general (4), entonces

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= u(\frac{a^2}{r},\theta) = A_0 - B_0 \ln \frac{r}{a^2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \frac{a^{2n}}{r^n} + B_n \frac{r^n}{a^{2n}})[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \end{aligned}$$

es armónica pues es también de la forma (4), y cumple $v(a, \theta) = u(a, \theta)$. Además, si u está definida para $r < a$ $\Rightarrow v$ estará definida para $a^2/r < a$, o sea, $r > a$. Por lo tanto, la solución para el exterior del círculo será

$$v(r,\theta) = u(\frac{a^2}{r},\theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta')d\theta'}{d^2(r,a,\theta-\theta')}, \quad r > a$$

(notar que $d(\frac{a^2}{r}, a, \theta) = \frac{a}{r}d(a, r, \theta) = \frac{a}{r}d(r, a, \theta)$). Esto equivale al intercambio $a \leftrightarrow r$ en (6).

En forma análoga se resuelve el problema de Neumann ($\Delta u = 0$, con $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=a} = f(\theta)$ y $\langle f \rangle = 0$) para el interior y exterior del círculo (se deja como ejercicio).

3) La solución (6) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \int_0^{2\pi} K(r,a,\theta-\theta')f(\theta')d\theta' \\ K(r,a,\theta) &= \frac{a^2 - r^2}{2\pi[a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta)]} \end{aligned} \quad (7)$$

donde $K(r, a, \theta)$ representa la solución para $f(\theta) = \delta(\theta)$. Puede comprobarse que $u(r, \theta) = K(r, a, \theta)$ es una función armónica que satisface $\lim\limits_{r \to a^-} K(r, a, \theta) = \delta(\theta)$, con $\lim\limits_{r \to a^-} K(r, a, \theta) = 0$ si $\theta \neq 0$ (o en general, $\theta \neq 2n\pi$, $n \in Z$) y $\lim\limits_{r \to a^-} K(r, a, 0) = \infty$ (recordar el gráfico de K hecho en clase).

Armónicos esféricos y solución de Poisson para la esfera

Consideremos ahora la ec. $\Delta u = 0$ en una región esférica $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, donde (r, θ, ϕ) son las coordenadas polares usuales (definidas por $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$). Emplearemos la notación $\Omega = (\theta, \phi)$, con $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. En estas coordenadas,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_\Omega}{r^2} \\ \Delta_\Omega &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Planteando una solución producto $u(r, \theta) = R(r)Y(\Omega)$, se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{k^2}{r^2}R = 0, \qquad \Delta_\Omega Y = -k^2 Y$$

con k constante. Hemos visto que la solución de la parte angular es acotada y monovaluada sólo si $k^2 = l(l + 1)$, con l natural, con $Y(\Omega) = Y_{lm}(\Omega)$ el armónico esférico de orden l:

$$-\Delta_\Omega Y_{lm}(\Omega) = l(l+1)Y_{lm}(\Omega), \quad -l \leq m \leq l, \quad l = 0, 1, \ldots$$

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$$

donde $P_l^{|m|}(x)$ es el polinomio asociado de Legendre (y $P_l^0(x) = P_l(x)$ el polinomio de Legendre). $Y_{lm}(\Omega)$ son las autofunciones *normalizadas* de Δ_Ω:

$$\int_s Y_{lm}(\Omega)Y^*_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \quad (9)$$

donde $\int_s d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi$ denota la integal sobre toda la superficie esférica y $Y^*_{lm}(\Omega) = (-1)^m Y_{l-m}(\Omega)$ en la presente convención de fases.

La ec. para la parte radial es nuevamente del tipo de Euler, con solución r^λ y λ determinado por

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - l(l + 1) = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda = l$, $\lambda = -l - 1$. La solución producto es pues de la forma

$$R(r)Y(\Omega) = (ar^l + br^{-l-1})Y_{lm}(\Omega)$$

Soluciones independientes de ϕ (es decir, invariantes frente a rotaciones alrededor del eje z) corresponden a $m = 0$, con l arbitrario, mientras que soluciones independientes de θ y ϕ (es decir, invariantes frente a rotaciones) se obtienen sólo para $l = 0$, y son de la forma $u(r) = a + b/r$.

La solución *general* para $u(r, \Omega)$ es pues de la forma

$$u(r,\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[a_{lm}r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}]Y_{lm}(\Omega) \quad (10)$$

Para soluciones acotadas, si $r_1 = 0 \Rightarrow b_{lm} = 0$ mientras que si $r_2 = \infty \Rightarrow a_{lm} = 0$.

Consideremos ahora el problema de determinar la función armónica $u(r,\Omega)$ en el interior de una esfera de radio $r_2 = a$, conociendo sus valores en la superficie, $u(a,\Omega) = f(\Omega)$. La función debe ser pues de la forma

$$u(r,\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{l} a_{lm} r^l Y_{lm}(\Omega) \tag{11}$$

La condición de contorno implica

$$u(a,\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{l} a_{lm} a^l Y_{lm}(\Omega) = f(\Omega)$$

que representa el desarrollo en serie de armónicos esféricos de $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta (9), los coeficientes estarán dados por

$$a_{lm} = \frac{1}{a^l}\int_s Y^*_{lm}(\Omega) f(\Omega) d\Omega \tag{12}$$

Si $f(\Omega) = f(\theta) \Rightarrow a_{lm} = 0$ si $m \neq 0$ y $u(r,\Omega) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta_0)$, con $c_l = a_{l0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$. Si $f(\Omega) = c \Rightarrow c_l = 0$ para $l \neq 0$ (por ortogonalidad de P_l, $l \neq 0$, con $P_0 = 1$) y $u(r,\Omega) = c$.

En general, utilizando (12) obtenemos

$$u(r,\Omega) = \int_s [\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r}{a})^l \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Omega) Y^*_{lm}(\Omega')] f(\Omega') d\Omega' \tag{13}$$

Para evaluar esta serie recordemos primero el *teorema de adición* para armónicos esféricos,

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Omega) Y^*_{lm}(\Omega') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta_0) \tag{14}$$

donde θ_0 es el ángulo entre las direcciones determinadas por Ω y Ω', y queda definido por

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0) &= \mathbf{n}(\Omega)\cdot\mathbf{n}(\Omega') \\ &= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \end{aligned} \tag{15}$$

con $\mathbf{n}(\Omega) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. La ec. (14) refleja el hecho de que el primer miembro es un escalar que depende sólo del ángulo θ_0 entre Ω y Ω'. En tal caso, eligiendo $\Omega = (\theta,\phi) = (0,0)$, y dado que $Y_{lm}(0,0) = \delta_{m0} Y_{l0}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ (pues $P_l^m(1) = \delta_{m0}$), obtenemos

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(0,0) Y_{lm}(\Omega') = Y_{l0}(0,0) Y^*_{l0}(\Omega') = \tfrac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta')$$

lo cual conduce a (14) pues $\theta_0 = \theta'$ si $\theta = 0$. Asimismo, (14) refleja el hecho de que como función de Ω, $P_l(\cos\theta_0)$ es también autofunción de Δ_Ω con autovalor $-l(l+1)$, y debe ser por lo tanto *combinación lineal* de las autofunciones $Y_{lm}(\Omega)$ con el *mismo* l:

$$\begin{aligned} P_l(\cos\theta_0) &= \sum_{m=-l}^{l} c_m Y_{lm}(\Omega), \\ c_m &= \int_s Y^*_{lm}(\Omega) P_l(\cos\theta_0) d\Omega = \tfrac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\Omega') \end{aligned}$$

Debemos ahora evaluar la serie

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\frac{r}{a})^l P_l(\cos\theta_0), \quad r < a \tag{16}$$

Para ello, recordemos la expansión

$$\frac{1}{d(r,a,\theta_0)} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta_0), \quad r < a \tag{17}$$

$$d(r,a,\theta_0) = (a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta_0)^{1/2} \tag{18}$$

que puede obtenerse reconociendo que el primer miembro es una función armónica tridimensional de r,θ_0 para $r < a$ y que por lo tanto debe ser de la forma $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta_0)$. Para $\theta_0 = 0$, $d^{-1}(r,a,0) = (a-r)^{-1} = a^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(r/a)^l$, por lo que $c_l = 1/a^{l+1}$. Derivando ahora (17) respecto de r obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} l\frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta_0) &= r\frac{\partial}{\partial r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta_0) \\ &= \frac{-r(r-a\cos\theta_0)}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta_0)^{3/2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\frac{r}{a})^l P_l(\cos\theta_0) = \frac{a^2 - r^2}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta_0)^{3/2}} \tag{19}$$

Utilizando (13), (14), (19) obtenemos finalmente la solución de Poisson para el interior de la esfera,

$$u(r,\Omega) = \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_s \frac{f(\Omega') d\Omega'}{d^3(r,a,\theta_0)}, \quad r < a \tag{20}$$

donde θ_0 está determinado por (15) y $d(r,a,\theta_0)$, dado por (18), es la distancia entre el punto $\mathbf{r}$ de coordenadas polares (r,Ω) situado en el interior de la esfera y el punto $\mathbf{r}' = (a,\Omega')$ de la superficie (recordar el dibujo en clase). Si $\Omega = (\theta,\phi) = (0,0) \Rightarrow \theta_0 = \theta'$.

Comentarios:
1) Nuevamente, en el centro de la esfera ($r = 0$), el valor de u es el *promedio* de sus valores en la superficie, pues en este caso $d = a$ y entonces

$$u(0) = \frac{1}{4\pi}\int_s f(\Omega') d\Omega' = \langle f\rangle$$

El valor de una función armónica u en un punto es pues el promedio de los valores en cualquier superficie esférica con centro en ese punto, contenida en la región R donde u está definida, y por lo tanto en cualquier esfera con centro en el punto. No puede pues poseer extremos en el interior de R.

2) Problema exterior: Consideremos el problema de determinar u armónica en el exterior de la esfera ($r > a$), concociendo sus valores en la superficie, $u(a, \Omega)$. A partir de (10) vemos que si u es armónica, entonces

$$\begin{aligned} v(r,\Omega) &= \frac{a}{r}u(\frac{a^2}{r},\Omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[a_{lm}\frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} + b_{lm}\frac{r^l}{a^{2l+1}}]Y_{lm}(\Omega) \end{aligned}$$

es también armónica pues es de la forma (10), y satisface $v(a, \Omega) = u(a, \Omega)$. Además, si u está definida para $r < a$ $\Rightarrow v$ estará definida para $r > a$. Por lo, tanto, la solución para el exterior de la esfera es

$$v(r,\Omega) = \frac{a}{r}u(\frac{a^2}{r},\Omega) = \frac{a(r^2-a^2)}{4\pi}\int_s \frac{f(\Omega')d\Omega'}{d^3(r,a,\theta_0)}, \quad r > a$$

3) La solución (20) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(r,\Omega) &= \int_s K(r,a,\theta_0)f(\Omega)d\Omega \\ K(r,a,\theta_0) &= \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi d^3(r,a,\theta_0)} \end{aligned} \qquad (21)$$

donde $K(r, a, \theta_0)$ es la solución para $f(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega') \equiv \delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')/\sin(\theta)$. Puede comprobarse que K es armónica y satisface $\lim_{r\to a^-} K(r, a, \theta_0) = \delta(\Omega - \Omega')$.

Armónicos rectangulares

Consideremos ahora la ec. de Laplace $\Delta u = 0$ en el interior de un rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Estudiaremos el problema de Dirichlet correspondiente, o sea, la determinación de u a partir de sus valores en el borde del rectángulo,

$$u(x,b) = f_1(x),\;\; u(x,0) = f_2(x),\;\; u(a,y) = f_3(y),\;\; u(0,y) = f_4(y)$$

Debido a la linealidad de la ecuación y el consiguiente principio de superposición, podemos escribir la solución en la forma

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

donde u_1 es la solución para $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ y, en general, u_i aquella para $f_j = 0$ si $j \neq i$.

Consideremos por ejemplo u_1. Planteando una solución del tipo

$$u_1(x) = X(x)Y(y)$$

tenemos $\Delta u_1 = X''Y + XY'' = 0$, o sea, $X''/X + Y''/Y = 0$, obteniéndose las ecuaciones

$$X'' = -k^2X, \qquad Y'' = k^2Y$$

con k constante. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A\cos(kx){+}B\sin(kx),\;\; Y(y) = C\cosh(ky){+}D\sinh(ky)$$

para $k \neq 0$ y $X(x) = A{+}Bx$, $Y(y) = C{+}DY$ para $k = 0$. Como $u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0 \Rightarrow X(0) = X(a) = 0$, lo que implica $k = n\pi/a$ (real), con $n = 1, 2, \ldots$. La condición $u_1(x, 0) = 0$ implica además $C = 0$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = A\sin(k_nx)\sinh(k_ny),\;\; k_n = n\pi/a$$

y la solución general para u_1 es

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(k_nx)\sinh(k_ny)$$

La condición de contorno

$$u_1(x,b) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(k_nx)\sinh(k_nb)$$

determina los coeficientes A_n,

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(k_nb)}\int_0^a f_1(x)\sin(k_nx)dx$$

La solución final puede pues escribirse como

$$u_1(x,y) = \int_0^a [\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(k_nx)\sin(k_nx')\frac{\sinh(k_ny)}{\sinh(k_nb)}]f_1(x')dx' \qquad (22)$$

En forma análoga se procede para los demás casos. Por ejemplo, $u_2(x, y)$ será de la forma

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(k_nx)\sinh[k_n(b-y)]$$

Se dejan como ejercicio los demás casos y detalles, así como el problema de Neumann correspondiente.

Consideremos ahora el caso en que $a \to \infty$, es decir, la franja $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$. Consideremos las condiciones de contorno

$$u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = f(y)$$

Planteando una solución de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, tenemos

$$X'' = k^2X, \quad Y'' = -k^2Y$$

cuyas soluciones conviene escribirlas como

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx},\;\; Y(y) = C\cos(ky) + D\sin(ky)$$

La condición $u(x,0)=u(x,b)=0$ implica $Y(0)=Y(b)=0$, y por lo tanto $C=0$, con $k=n\pi/b$, real, $n=1,2,\ldots$. Si exigimos que u permanezca acotada para $x\to\infty\Rightarrow A=0$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y)=Be^{-k_nx}\sin(k_ny),\quad k_n=n\pi/b$$

y la solución general es

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-k_nx}\sin(k_ny)\tag{23}$$

La condición de contorno

$$u(0,y)=f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(k_ny)$$

determina los coeficientes A_n:

$$A_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin(k_ny)dy$$

La solución final puede escribirse como

$$u(x,y)=\frac{2}{b}\int_0^b[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-k_nx}\sin(k_ny)\sin(k_ny')]f(y')dy'$$

La serie puede en este caso evaluarse fácilmente como suma de series geométricas, escribiendo $\sin(k_ny)=(e^{ik_ny}-e^{-ik_ny})/(2i)$ y recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-k_n(x+iy)}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-k(x+iy)})^n=\frac{1}{1-e^{-k(x+iy)}},\quad k=\pi/b$$

El resultado final es

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-k_nx}\sin(k_ny)\sin(k_ny')=$$
$$\frac{2e^{-kx}(1-e^{-2kx})\sin(ky)\sin(ky')}{(1+e^{-2kx}-2e^{-kx}\cos k(y+y'))(1+e^{-2kx}-2e^{-kx}\cos k(y-y'))}$$

El integrando decrece exponencialmente con x (recordar dibujo). Los factores en el denominador son la distancia al cuadrado entre los puntos de coordenadas polares (e^{-kx},ky) y $(1,\pm ky')$ (ver sección de variable compleja).

Problema del semiplano

Consideremos ahora el semiplano $y\geq 0$, $x\in\Re$. Resolveremos la ec. $\Delta u=0$ conociendo los valores de u en el eje x, $u(x,0)=f(x)$. Planteando nuevamente separación de variables, $u(x,y)=X(x)Y(y)$, tenemos

$$X''=-k^2X,\quad Y''=k^2Y$$

con k constante, cuyas soluciones escribimos ahora en la forma

$$X(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx},\quad Y(y)=Ae^{-ky}+Be^{ky},\ k\in\Re$$

Si queremos que u permanezca acotada para $y\to\infty\Rightarrow A=0$ si $k<0$ y $B=0$ si $k>0$, los que podemos resumir como $Y(y)=Ce^{-|k|y}$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y)=Ce^{ikx}e^{-|k|y}$$

y la solución general (ahora k es un índice continuo) es

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}e^{-|k|y}dk\tag{24}$$

donde la integral denota valor principal. La condición de contorno

$$u(x,0)=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}dk$$

determina ahora la función $A(k)$, que no es otra cosa que la transformada de Fourier de $f(x)$ dividida por $\sqrt{2\pi}$. Recordando las fórmulas de inversión obtenemos

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$$

Insertando esta expresión en (24) obtenemos

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',y)f(x')dx'$$

con

$$\begin{aligned}K(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}e^{-k[y-ix]}dk\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}[\frac{1}{y-ix}]=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Obtenemos finalmente

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x-x')^2+y^2}\tag{25}$$

El denominador es nuevamente la distancia al cuadrado del punto (x,y) al punto $(x',0)$ del borde. Notemos que

$$\lim_{y\to 0^+}K(x,y)=\delta(x)$$

En efecto, $K(x,y)>0$ si $y>0$, con $\lim\limits_{y\to 0^+}K(x,y)=0$ si $x\neq 0$ y $\lim\limits_{y\to 0^+}K(0,y)=\infty$. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{y})\Big|_{-\infty}^{\infty}=1$$

El resultado (25) puede obtenerse también directamente de la solución de Poisson para el interior del círculo, considerando un radio a muy grande y un punto (x,y) proxímo a la superficie (con y medido desde el borde del círculo, recordar el dibujo), en el límite $a\gg a-r=y$. En tal caso, $d^2(r,a,\theta)\to(x-x')^2+y^2$, $a^2-r^2=(a+r)(a-r)\to 2ay$ y $ad\theta\to dx'$, por lo que

$$\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\theta)d\theta}{d^2(r,a,\theta)}\to\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x-x')^2+y^2}$$

con $f(x')=g(x'/a)$.

El resultado (25) puede obtenerse también por función de Green y por métodos de variable compleja (ver próximas secciones).

Armónicos rectangulares en 3 o más dimensiones

En forma completamente análoga puede tratarse la ecuación $\Delta u = 0$ en regiones del tipo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, etc., en 3 o más dimensiones. Consideremos por ej. las condiciones de contorno

$$u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0,\ u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0$$

$$u(x,y,0) = 0,\ \ u(x,y,c) = f(x,y)$$

Planteando una solución del tipo $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenemos $X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0$ y por lo tanto, dividiendo por XYZ,

$$X''/X + Y''/Y + Z''/Z = 0$$

de donde

$$X'' = -k_x^2 X,\ \ Y'' = -k_y^2 Y,\ \ Z'' = (k_x^2 + k_y^2)Z$$

con k_x, k_y constantes. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x),\ Y(y) = C\cos(k_y y) + D\sin(k_y y),$$

$$Z(z) = E\cosh(k_z z) + F\sinh(k_z z),\ k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Para las presentes condiciones de contorno, $A = C = E = 0$, por lo que la solución producto es de la forma $\sin(k_x)\sin(k_y)\sinh(k_z z)$, con $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$ y n, m naturales > 0. La solución general es pues

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(k_{nm}z)$$

con $k_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$. La condición de contorno

$$u(x,y,c) = f(x,y) = \sum_{n,n} A_{nm}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}y)\sinh(k_{nm}c)$$

determina los coeficientes A_{nm} por medio del desarrollo bidimensional en serie de medio rango de senos:

$$A_{nm} = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\frac{1}{\sinh(k_{nm}c)}\int_0^a dx\int_0^b dy f(x,y)\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}y)$$

La solución para condiciones de contorno no nulas en c/u de los lados se resuelve por superposición (de 6 soluciones en 3 dimensiones).

Armónicos cilíndricos

Consideremos ahora la ec. $\Delta u = 0$ en el interior de un cilindro de radio a y altura b, o sea $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq b$. En coordenadas cilíndricas,

$$\Delta = \Delta_{(r,\theta)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

con $\Delta_{(r,\theta)}$ dado por (1). Planteando una solución del tipo $u = v(r,\theta)Z(z)$ obtenemos las ecuaciones

$$Z'' = k^2 Z, \qquad \Delta_{(r,\theta)}v = -k^2 v$$

La solución de la primera ecuación es

$$Z(z) = E\cosh(kz) + F\sinh(kz)$$

Escribiendo $v = R(r)\Theta(\theta)$, la segunda ecuación implica

$$\Theta'' = -n^2\Theta,\ \ R'' + \frac{R'}{r} + (k^2 - \frac{n^2}{r^2})R = 0$$

cuyas soluciones generales son

$$\Theta(\theta) = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta},\ \ R(r) = CJ_n(kr) + DY_n(kr)$$

donde J_n, Y_n son las funciones de Bessel de primera y segunda especie (recordar clase respectiva). En el presente caso, la condición de R acotado para $r \to 0$ implica $D = 0$, mientras que la de Θ monovaluada, n entero.

Consideremos por ejemplo $u = 0$ en el borde lateral ($u(a,\theta,z) = 0$) e inferior ($u(r,\theta,0) = 0$), con $u(r,\theta,b) = f(r,\theta)$. Esto implica $k = k_{nm}/a$, con k_{nm} los ceros de J_n ($J_n(k_{nm}) = 0$) y $E = 0$. Recordando que para n entero, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, la solución general puede pues escribirse como

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_n(k_{nm}r/a)e^{in\theta}\sinh(k_{nm}z/a)$$

Para $z = b$, esto conduce al desarrollo de Fourier-Bessel de $u(r,\theta,b) = f(r,\theta)$. Recordando que

$$\int_0^a\int_0^{2\pi} J_n(k_{nm}\tfrac{r}{a})J_{n'}(k_{n'm'}\tfrac{r}{a})e^{i\theta(n-n')}rdrd\theta = \delta_{nn'}\delta_{mm'}\pi a^2 J_n'(k_{nm})^2 \tag{26}$$

obtenemos

$$A_{nm} = \frac{\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_n(k_{nm}r/a)e^{-in\theta}rdrd\theta}{\pi a^2 J_n'(k_{nm})^2\sinh(k_{nm}b/a)}$$

En forma análoga se resuelve el caso con dato en la base. En cambio, si el dato es $u(a,\theta,z) = f(\theta,z)$, con $u(r,\theta,0) = u(r,\theta,b) = 0$, tenemos $k = im\pi/b$, con m entero, y debemos plantear una solución de la forma

$$u(r,\theta,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nm}I_n(m\pi r/b)e^{in\theta}\sin(m\pi z/b)$$

donde $I_n(x) = (-i)^n J_n(ix)$ es la función de Bessel modificada de primera especie. Se obtiene un desarrollo en serie de Fourier bidimensional para $u(a,\theta,z) = f(\theta,z)$, dejándose los detalles como ejercicio.