ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2^o ORDEN (RESUMEN)

1- Consideraciones generales

Una ecuación diferencial lineal de 2^o orden puede siempre escribirse en la forma

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

Si $f(x) = 0$ la ecuación se denomina *homogénea*. Consideraremos primero este caso.

Si $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en un cierto intervalo $I = [a, b]$, la ecuación lineal homogénea de 2^o orden

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

posee siempre *dos soluciones linealmente independientes* $y_1(x)$, $y_2(x)$ para $x \in I$, tales que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con c_1 y c_2 dos constantes arbitrarias. En otras palabras, *toda solución de la ecuación diferencial homogénea* es de la forma anterior. Las dos constantes pueden determinarse conociendo las condiciones iniciales $y(x_0)$, $y'(x_0)$ para un punto $x_0 \in [a, b]$ (es decir, conociendo el valor inicial $y(x_0)$ y la "velocidad inicial" $y'(x_0)$).

Recordemos aquí que la independencia lineal de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ significa que ellas no son proporcionales, es decir, si $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \; \forall \; x \in I \Rightarrow$ la única solución para c_1 y c_2 es $c_1 = c_2 = 0$.

Para $a(x)$ y $b(x)$ continuas es también válido el teorema de *unicidad* de la solución, que establece que *existe una única solución $y(x)$ que satisface $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$*. En otras palabras, el sistema algebraico de dos ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) & = & y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c'_2 y'_2(x_0) & = & y'_0 \end{array} \right.$$

donde hemos reemplazado $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0)$, $y'(x_0) = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0)$, *posee siempre una única solución* para las constantes c_1, c_2. En particular, si $y_0 = 0$, $y'_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. Es decir, si una solución $y(x)$ satisface $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in I \Rightarrow y(x) = 0 \; \forall \; x \in I$, pues en tal caso debe coincidir, por unicidad, con la solución nula.

El sistema anterior es pues *siempre compatible y con solución única*. Esto implica que el correspondiente determinante

$$W(y_1, y_2) = \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{array} \right| = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)$$

debe ser no nulo para $x = x_0$. Como x_0 es un punto cualquiera de I, la unicidad implica pues el *teorema*:

Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo $\Rightarrow$

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \;\; \forall \; x \in I$$

El determinante anterior se denomina *Wronskiano* y cumple un rol importante en el tratamiento de ecuaciones diferenciales. Mencionaremos ahora algunas de sus propiedades.

1) Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente dependientes, es decir $y_2(x) = c y_1(x)$ (o $y_1(x) = c y_2(x)$) $\forall \; x \in I \Rightarrow$

$$W(y_1, y_2) = c(y_1(x)y'_1(x) - y_1(x)y'_1(x)) = 0$$

$\forall \; x \in I$. El Wronskiano es pues nulo en tal caso.

2) Si $W(y_1, y_2) = 0 \; \forall \; x \in I$ e y_1, y_2 son ambas no nulas en un cierto intervalo $\Rightarrow$ y_1 e y_2 son *linealmente dependientes*. En efecto, en tal caso $y_1 y'_2 = y_2 y'_1$ y por lo tanto,

$$y'_1/y_1 = y'_2/y_2$$

Integrando, esto conduce a $\ln|y_1| = \ln|y_2| + C$, por lo que $y_1 = c y_2$ en el intervalo (con $c = \pm e^C$), es decir, y_1 e y_2 son *linealmente dependientes*.

3) $W(y_1, y_2)$ puede anularse en un cierto punto aún si y_1 e y_2 son linealmente independientes. Por ejemplo, $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ son linealmente independientes pero $W(y_1, y_2) = x^2$ se anula en $x = 0$. Sin embargo, cuando y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de una ecuación homogénea de 2^o orden, $W(y_1, y_2) \neq 0$ en *todo* punto de I.

4) La derivada del Wronskiano respecto de x es

$$W' = (y_1 y'_2 - y_2 y'_1)' = y_1 y''_2 - y_2 y''_1$$

Si y_1 e y_2 son soluciones de la ec. homogénea entonces $y''_i = -a(x)y'_i - b(x)y_i$ para $i = 1, 2$ y

$$W' = -a(x)[y_1 y'_2 - y_2 y'_1] + b(x)[y_1 y_2 - y_2 y_1] = -a(x)W$$

Por lo tanto, como función de x,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x')dx'}$$

lo que implica $W(x) \neq 0 \; \forall \; x \in I$ *si y sólo si* $W(x_0) \neq 0$. Es decir la anulación de W en un sólo punto implica aquí la anulación en todo el intervalo y por lo tanto la dependencia lineal de las dos soluciones.

5) De 4) se desprende además que si $a(x) = 0$ en el intervalo $\Rightarrow W(x) = W(x_0)$, es decir, $W(x)$ es *constante* en el intervalo.

Mencionemos que no existe un método general simple y directo para hallar las dos soluciones independientes de la ecuación homogénea cuando los coeficientes $a(x)$ y $b(x)$ son funciones generales no constantes. Si $a(x)$ y $b(x)$ se pueden desarrollar en serie de potencias alrededor de cierto punto x_0, entonces se puede plantear un desarrollo similar para la solución: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, reemplazar esta serie en la ecuación y obtener así una relación recursiva para los coeficientes a_n. Si existe, en cambio, un método general simple para hallar la segunda solución linealmente independiente $y_2(x)$ si se conoce una solución (no nula) $y_1(x)$:

Método para hallar la 2^a solución: Si $y_1(x)$ es solución de $y''+a(x)y'+b(x)y=0 \Rightarrow$

$$y_2(x)=v(x)y_1(x), \ \text{ con } \ v(x)=\int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

es otra solución de la misma ecuación, linealmente independiente de $y_1(x)$.
Demostración: Planteando $y_2=v(x)y_1$, con v a determinar, tenemos $y_2'=v'y_1+vy_1'$, $y_2''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$ y por lo tanto,

$$v''y_1+v'[2y_1'+a(x)y_1]+v[y_1''+a(x)y_1'+b(x)y_1']=0$$

Pero como $y_1(x)$ es solución, el último término es nulo y entonces

$$v''y_1+v'[2y_1'+a(x)y_1]=0$$

Definiendo $w=v'$ y dividiendo por y_1, tenemos
$w'+[2y_1'/y_1+a(x)]w=0$. Entonces

$$w=e^{-\int[2y_1'/y_1+a(x)]dx}=e^{-2\ln|y_1|-\int a(x)dx}=\frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2}$$

y por lo tanto

$$v(x)=\int w(x)dx=\int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

Como $v'(x)=w(x)$ es no nulo $\Rightarrow v(x)$ no es constante por lo que $y_2(x)$ es linealmente independiente de $y_1(x)$.

Ejemplo: Es fácil ver que $y(x)=e^x$ es solución de $y''-y=0$. La otra solución es por lo tanto

$$y_2(x)=[\int \frac{e^{-\int 0dx}}{e^{2x}}dx]e^x=[\int e^C e^{-2x}dx]e^x=\tfrac{-c}{2}e^{-x}$$

con $c=e^C$. Por lo tanto un par de soluciones linealmente independientes son $y_1(x)=e^x$ e $y_2(x)=e^{-x}$

2- Caso de coeficientes constantes

Consideremos ahora el importante caso en que $a(x)$ y $b(x)$ son *constantes*, es decir,

$$y''+ay'+by=0$$

Es fácil ver que al menos una solución es del tipo $y(x)=e^{\lambda x}$. En tal caso, como $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$, se obtiene

$$e^{\lambda x}[\lambda^2+a\lambda+b]=0$$

o sea, λ debe ser raíz de la ecuación característica

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Por lo tanto,
1) Si $\lambda_i\neq\lambda_2$ (o sea, $a^2\neq 4b$) las dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}, \ \ y_2(x)=e^{\lambda_2 x} \ \ (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

y la solución general es de la forma

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x} \ \ (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

En este caso $W(y_1,y_2)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2-\lambda_1)$.
2) Si $\lambda_1=\lambda_2$ ($a^2=4b$) entonces las dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}, \ \ y_2(x)=xe^{\lambda_1 x} \ \ \ (\lambda_1=\lambda_2)$$

y la solución general es de la forma

$$y_1(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_1 x} \ \ \ (\lambda_1=\lambda_2)$$

En este caso $W(y_1,y_2)=e^{2\lambda x}$.
Que $y_2(x)$ es solución puede probarse directamente (se hizo en clase y se deja como ejercicio) o también deducirse por el método general de la sección anterior. En este caso $\lambda_1=-a/2$, con $y_1^2(x)=e^{-ax}$ y dicho método conduce a

$$v(x)=\int\frac{e^{-\int adx}}{e^{-ax}}dx=\int\frac{e^{-ax+C}}{e^{-ax}}dx=\int cdx=cx$$

y por lo tanto (eligiendo por ejemplo $c=1$)

$$y_2(x)=v(x)y_1(x)=xe^{\lambda_1 x}$$

Notemos que si λ_1 y λ_2 son complejos, nada cambia (formalmente) en las soluciones anteriores. Si a y b son reales, las soluciones complejas aparecerán cuando $a^2<4b$ y serán en tal caso pares conjugados: $\lambda_2=\lambda_1^*$. Podemos escribir entonces

$$\lambda_{1,2}=\lambda_r\pm i\lambda_i$$

con $\lambda_{i,r}$ reales. En tal caso

$$y_{1,2}(x)=e^{(\lambda_r\pm i\lambda_i)x}=e^{\lambda_r x}[\cos(\lambda_i x)\pm i\sin(\lambda_i x)]$$

Un par alternativo de soluciones linealmente independientes, que además son *reales*, es

$$\tilde{y}_1(x)=\text{Re}[y_1(x)]=e^{\lambda_r x}\cos(\lambda_i x),$$

$$\tilde{y}_2(x)=\text{Im}[y_1(x)]=e^{\lambda_r x}\sin(\lambda_i x),$$

La solución general puede pues también escribirse como

$$y(x) = \tilde{c}_1 e^{\lambda_r x}\cos(\lambda_i x) + \tilde{c}_2 e^{\lambda_r x}\sin(\lambda_i x)$$

Ejemplo 1):

$$y'' - 4y = 0$$

Reemplazando $y(x) = e^{\lambda x}$ se obtiene $\lambda^2 - 4 = 0$, por lo que $\lambda = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. La solución general es entonces

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

Ejemplo 2:

$$y'' + 4y = 0$$

Reemplazando $y(x) = e^{\lambda x}$ se obtiene $\lambda^2 + 4 = 0$, por lo que $\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. La solución general es entonces

$$y(x) = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$$

Como en este caso $\lambda_r = 0$, $\lambda_i = 2$, la solución general puede también escribirse en la forma

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cos(2x) + \tilde{c}_2 \sin(2x)$$

Ejemplo 3:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Reemplazando $y(x) = e^{\lambda x}$ se obtiene

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

por lo que $(\lambda + 1)^2 = 0$, o sea, $\lambda = -1$. Al existir una sóla raíz, la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Ejemplo 4: La ecuación que describe el movimiento de una partícula unida a un resorte de constante k en un medio viscoso es

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0$$

donde y es la posición medida desde el punto de equilibrio, $y' = dy/dt$ es la velocidad, $y'' = d^2y/dt^2$ la aceleración, $\omega^2 = k/m$ y $\gamma = b/(2m)$, siendo la fuerza de rozamiento por viscosidad $F = -b dy/dt$. Reemplazando $y(t) = e^{\lambda t}$ se obtiene

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

de donde

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Debemos distinguir tres casos:
1) $\gamma > \omega$ (Movimiento sobreamortiguado).
En este caso las dos raíces $\lambda_{1,2}$ son reales, distintas y *negativas*, y la solución general es pues de la forma

$$y(t) = c_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + c_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$$

La elongación $|y(t)|$ disminuye pues exponencialmente al aumentar el tiempo.
2) $\gamma = \omega$ (amortiguamiento crítico).
En este caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$ y la solución general es

$$y(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}$$

Corresponde también a una disminución tipo exponencial de la elongación.
3) $\gamma < \omega$ (movimiento oscilatorio amortiguado).
En este caso las raíces $\lambda_{1,2}$ son complejas conjugadas y pueden escribirse como

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\tilde{\omega}, \ \ \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

con $\tilde{\omega}$ *real*. La solución general puede escribirse en la forma

$$y(t) = \tilde{c}_1 e^{-\gamma t}\cos\tilde{\omega}t + \tilde{c}_2 e^{-\gamma t}\sin\tilde{\omega}t$$

y corresponde a un movimiento oscilatorio amortiguado, con una amplitud que disminuye exponencialmente y una frecuencia angular de oscilación $\tilde{\omega}$ menor que la original del resorte (ω).

Ecuación de Euler: Es una ecuación del tipo

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$$

con a y b constantes. Aparece frecuentemente en aplicaciones físicas, especialmente para la parte radial de magnitudes cuando se aplica el método de separación de variables. Se supone $x > 0$. Para resolverla, es posible llevarla a una ecuación con coeficientes constantes mediante un sencillo cambo de variables. O también, directamente reemplazar una solución del tipo $y(x) = x^\lambda$. En tal caso, se obtiene

$$x^{\lambda-2}[\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b] = 0$$

por lo que λ deberá ser raíz de la ecuación

$$\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = 0$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

y si $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}\ln x$$

Se deja la demostración de esta última expresión como ejercicio, utilizando el método para hallar la 2^a solución.

Si $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ debe utilizarse la fórmula general $x^\lambda = e^{\lambda \ln x} = e^{(\lambda_r + i\lambda_i)\ln x} = x^{\lambda_r}[\cos(\lambda_i \ln x) + i\sin(\lambda_i \ln x)]$.

Ejemplo:

$$y'' + y'/x - 4y/x^2 = 0$$

Reemplazando $y(x) = x^\lambda$ se obtiene

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 4 = 0$$

de donde $\lambda^2 = 4$, o sea, $\lambda = \pm 2$. La solución general es entonces

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2/x^2$$

Generalización a ecuaciones lineales de orden n

Los resultados anteriores se generalizan inmediatamente para una ecuación lineal homogénea de orden n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Si los coeficientes $a_i(x)$ son continuos en un cierto intervalo I, existen n soluciones $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, linealmente independientes de la ecuación en dicho intervlao tales que toda solución es de la forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

Dichas soluciones satisfacen además

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ & & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

en I. Para $x_0 \in I$, dadas las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

existe una única solución $y(x)$ que las satisface.

En el caso de coeficientes constantes ($a_i(x) = a_i$ para $i = 0, \ldots, n-1$) se puede plantear una solución exponencial del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$, obteniéndose la ecuación característica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Si posee n raíces distintas λ_i, la solución general será entonces

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}$$

y si existen $k < n$ raíces distintas cada una con multiplicidad m_i (tal que $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$) entonces la solución general es

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e^{\lambda_i x} x^{j-1}$$

(demostración dada en clase)

Ejemplo 1: Hallar la solución general de

$$y'''' - y = 0$$

La ecuación característica es $\lambda^4 - 1 = 0$, cuyas 4 raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. La solución general es entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix} \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tilde{c}_3 \cos(x) + \tilde{c}_4 \sin(x) \qquad (1) \end{aligned}$$

La ecuación característica es $\lambda^4 - 1 = 0$, cuyas 4 raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. La solución general es entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix} \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tilde{c}_3 \cos(x) + \tilde{c}_4 \sin(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Hallar la solución general de

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

La ecuación característica es $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$, o sea, $(\lambda + 1)^3 = 0$, por lo que laúnica solución es $\lambda = -1$. La solución general es entonces

$$y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$$

3- Ecuaciones no homogéneas

Consideremos ahora el caso general no homogéneo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

donde asumiremos $f(x)$ continua. Es fácil ver que si $y(x)$ y $y_p(x)$ son dos soluciones de esta ecuación $\Rightarrow$ la resta $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$ satisface la ecuación *homogénea*:

$$y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h = 0$$

Por lo tanto, $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ y entonces

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Toda solución de la ecuación inhomogénea puede pues escribirse como la suma de una solución particular $y_p(x)$ de la misma más una solución de la ecuación *homogénea*. La solución general es entonces la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Además, si $y_{p1}(x)$ es solución de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$ es solución de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_2(x)$$

$\Rightarrow c_1 y_{p1}(x) + c_2 y_{p2}(x)$ es solución de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

como podrá el lector probar fácilmente. Una inhomogeneidad $f(x)$ (que físicamente representa normalmente un agente o fuerza externa aplicada al sistema) puede pues descomponerse en sumandos simples, obteniéndose luego la solución como suma o combinación lineal de las soluciones para cada sumando.

Métodos para hallar la solución particular
a) Método general:
Si se conocen las dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, puede demostrarse que una solución particular $y_p(x)$ es

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

con

$$v_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx, \quad v_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

donde $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ es el Wronskiano.

Demostración: Planteando una solución particular del tipo

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

tenemos

$$y_p'(x) = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'$$

Podemos exigir que $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$. En tal caso,

$$y_p''(x) = v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea, y teniendo en cuenta que y_1 e y_2 son soluciones de la homogénea (satisfacen $y_i'' + a(x)y_i' + b(x)y_i = 0$), se obtiene

$$v_1' y_2' + v_2' y_2' = f(x)$$

Las dos condiciones anteriores conducen al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1' y_1(x) + v_2' y_2(x) & = & 0 \\ v_1' y_1'(x) + v_2' y_2'(x) & = & f(x) \end{array} \right.$$

cuya *única* solución es

$$v_1' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad v_2' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

ya que $W(x) \neq 0$. Integrando, se obtienen las expresiones para v_1, v_2 dadas anteriormente.

La expresión final para $y_p(x)$ puede escribirse en la forma

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x, x')f(x')dx'$$

con

$$g(x, x') = \frac{-y_1(x)y_2(x') + y_2(x)y_1(x')}{W(x')}$$

Esta solución particular safisface $y_p(x_0) = 0$, $y_p'(x_0) = 0$.

Nótese que como función de x, $y(x) = g(x, x')$ es una solución de la ecuación *homogénea* que satisface las condiciones $y(x') = 0$, $y'(x') = 1$.

Además, si $f(x)$ es una disitribución tipo Delta de Dirac, es decir $f(x) = \delta(x-a)$ entonces, tomando $x_0 < a$, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_{x_0}^{x} g(x, x')\delta(x' - a)dx' = \left\{ \begin{array}{ll} g(x, a)\,, & x > a \\ 0 & x < a \end{array} \right. \\ &= g(x, a)H(x - a) \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos pues que $g(x, x')$ representa, para $x > x'$, la solución en x para una inhomogeneidad impulsiva en x', estando el sistema en reposo para $x < x'$.

En el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, se tiene

$$g(x, x') = g(x - x')$$

siendo $g(x)$ la solución de la ecuación *homogénea* que satisface

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1$$

La solución particular puede entonces expresarse como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x - x')f(x')dx'$$

Por ejemplo, para raíces diferentes, planteando $g(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ e imponiendo las condiciones iniciales anteriores, se obtiene

$$g(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Si las raíces son iguales, $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda x}$, y se obtiene

$$g(x) = xe^{\lambda_1 x} \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

Ejemplo 1:

$$y'' - 4y = f(x)$$

La solución general es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + y_p(x)$$

con

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (e^{2(x-x')} - e^{-2(x-x')})f(x')dx'$$

En este caso $g(x) = (e^{2x} - e^{-2x})/4$, que es la solución homogénea que satisface $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. El límite inferior de integración fue elegido para que $y_p(x)$ satisfaga $y_p(0) = 0$, $y'_p(0) = 0$.

Por ejemplo, si $f(x) = e^{\lambda x}$ se obtiene

$$y_p(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 - 4} - \frac{1}{4}[\frac{e^{2x}}{\lambda - 2} - \frac{e^{-2x}}{\lambda + 2}]$$

para $\lambda \neq 2$ y

$$y_p(x) = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{16}$$

para $\lambda = 2$. Se deja como ejercicio el caso $\lambda = -2$. Los segundos términos en la expresiones anteriores son soluciones de la ecuación homogénea tales que $y_p(x)$ satisface $y_p(0) = y'_p(0) = 0$.

Ejemplo 2:

$$y'' + 4y = f(x)$$

La solución general puede escribirse como

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cos(2x) + \tilde{c}_2 \sin(2x) + y_p(x)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \sin[2(x - x')]f(x')dx'$$

En este caso $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Ejemplo 3:

$$y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(t)$$

(Partícula unida a resorte en medio viscoso sujeta a una fuerza externa $F(t)$, con $f(t) = F(t)/m$). La solución general para $\gamma \neq \omega$ es

$$y(y) = c_1 e^{-(\gamma - \Delta)t} + c_2 e^{-(\gamma + \Delta)t} + y_p(t)$$

con $\Delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ y

$$y_p(t) = \frac{1}{2\Delta}\int_0^t e^{-\gamma(t-t')}(e^{\Delta(t-t')} - e^{-\Delta(t-t')})f(t')dt'$$

donde $\Delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

Ejercicio: Discutir el muy importante fenómeno de **resonancia** en el ejemplo anterior, para $\gamma = 0$ y $f(t) = A\cos(\omega_{ex}t)$, considerando $\omega_{ex} \neq \omega$ y $\omega_{ex} = \omega$ (recordar discusión dada en clase).

Extensión a ecuaciones de orden n Es inmediata. La solución general de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

puede expresarse como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea y $y_p(x)$ la solución particular, que puede escribirse como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x g(x, x')f(x')dx'$$

donde $h(x) \equiv g(x, x')$ es la solución de la ecuación homogénea que satisface
$h(x') = 0$, $h'(x') = 0, \ldots h^{(n-2)}(x') = 0$, $h^{(n-1)}(x') = 1$.

Si $f(x) = \delta(x - a)$ entonces

$$y_p(x) = g(x, a)H(x - a)$$

En el caso de coeficientes constantes, la solución particular puede escribirse como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x g(x - x')f(x')dx'$$

siendo $g(x)$ la solución de la ec. homogénea que satisface $g(0) = 0$, $g'(0) = 0, \ldots g^{(n-2)}(0) = 0$, $g^{(n-1)}(0) = 1$. Si $f(x) = \delta(x - a)$ entonces

$$y_p(x) = g(x - a)H(x - a)$$

b) Método de coeficientes indeterminados
(válido para ecuaciones con coeficientes constantes)

En el caso de la ecuación con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

y para formas particulares de $f(x)$, puede obtenerse la solución particular simplemente ensayando una solución $y_p(x)$ del mismo tipo que $f(x)$, en los casos en que $f(x)$ no es solución de la ecuación homogénea, y del tipo $xf(x)$ cuando $f(x)$ es solución de la ecuación homogénea.

El método puede aplicarse cuando:

1) $f(x) = Ae^{\lambda x}$. En tal caso, si $e^{\lambda x}$ no es solución de la ecuación homogénea, se plantea

$$y_p(x) = Be^{\lambda x}$$

y si $e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación homogénea,

$$y_p(x) = Bxe^{\lambda x}$$

Si $xe^{\lambda x}$ sigue siendo solución de la homogénea $\Rightarrow y_p(x) = Bx^2e^{\lambda x}$.

En el primer caso, se obtiene la ecuación

$$Be^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = Ae^{\lambda x}$$

de donde

$$B = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

Si λ no es raíz de la ecuación característica (o sea, si $e^{\lambda x}$ no es solución de la ecuación homogénea) el denominador es no nulo.

Ejemplo: Hallar una solución particular de

$$y'' - 4y = e^{-x}$$

Planteando $y_p(x) = Be^{-x}$ se obtiene

$$Be^{-x}[1-4] = e^{-x}$$

de donde $B = -1/3$ y $y_p(x) = -(2/3)e^{-x}$.

En general, para $f(x) = e^{\lambda x}$ se plantea $y_p(x) = Be^{\lambda x}$ si $\lambda \neq \pm 2$, obteniéndose

$$Be^{\lambda x}(\lambda^2 - 4) = e^{\lambda x}$$

de donde $B = 1/(\lambda^2 - 4)$. Por lo tanto,

$$y_p(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 - 4}$$

lo que coincide con el primer término de la solución particular hallada con el primer método (la diferencia entre ambas es una solución de la ecuación homogénea). Se deja como ejercicio el caso $\lambda = \pm 2$, en el que se debe plantear $y_p(x) = Bxe^{\lambda x}$.

2) Si $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \Rightarrow$ se plantea

$$y_p(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$$

cuando $i\omega$ no es raíz de la ecuación característica y

$$y_p(x) = x[C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)]$$

cuando sí lo es. Nótese que deben incluirse las dos constantes aún si $C = 0$ o $D = 0$.

Una forma mucho más elegante, simple y efectiva de resolver el problema es escribir $f(x)$ en la forma compleja $f(x) = \mathrm{Re}[Ee^{i\omega x}]$, con $E = |E|e^{i\phi}$ y $|E|\cos\phi = C$, $|E|\sin\phi = -D$, y proceder como en el caso 1) para la función exponencial $f(x) = Ee^{i\omega x}$. Se toma al final la parte real de la $y_p(x)$ así obtenida (cuando a y b son reales).

3) $f(x)$ es un polinomio de grado n. En tal caso, si $f(x)$ no es solución de la ec. homogénea se plantea para $y_p(x)$ un polinomio completo *del mismo grado* n, con coeficientes a determinar.

Ejemplo: Hallar una solución particular de

$$y'' + y' - 4y = 4x^2 - 5/2$$

Planteando

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

se tiene $y_p'(x) = 2Ax + B$, $y_p''(x) = 2A$, obteniéndose

$$-4Ax^2 + (-4B + 2A)x - 4C + B + 2A = 4x^2 - 5/2$$

o sea,

$$-4A = 4, \quad -4B + 2A = 0, \quad -4C + B + 2A = -5/2$$

de donde $A = -1$, $B = A/2 = -1/2$,
$C = (B + 2A + 5/2)/4 = 0$. Por lo tanto,

$$y_p(x) = -x^2 - x/2$$

4) $f(x)$ es suma de funciones del tipo anterior. Obviamente, se plantea entonces la suma de soluciones particulares para cada término, resolviendo separadamente el problema para cada sumando.

Comentario final: Todos los métodos discutidos pueden ser fácilmente extendidos al caso de ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Recordar los ejemplos y discusiones al respecto dados en las clases teóricas y en la práctica.