

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Las *ecuaciones diferenciales* son ecuaciones en las que la incógnita es una función (escalar o vectorial) que aparece derivada o diferenciada. Sabemos que al estudiar un fenómeno físico, no resulta fácil hallar leyes que vinculen directamente las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno, aunque en muchos casos es posible establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas o diferenciales, lo que dará origen a una ecuación diferencial o a un sistema de ecuaciones diferenciales.

Las *ecuaciones diferenciales ordinarias* son aquellas en las que la función incógnita depende de *una sola variable*. Pueden escribirse en la forma

$$f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

donde la incógnita es la función $u(t)$. Se denomina *orden* de la ec. diferencial al grado de la derivada máxima de la función incógnita. La ec. (1.1) es pues de orden n .

Un ejemplo de (1.1) es la ec. de movimiento clásica para una partícula en una dimensión,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1.2)$$

donde $F(t, x, \frac{dx}{dt})$ es una fuerza general dependiente del tiempo t , posición x y velocidad $\frac{dx}{dt}$. La incógnita es la función escalar $x(t)$ y la ec. es de orden 2. Por ejemplo, para una partícula de masa m colgada de un resorte en un medio viscoso,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - kx - c \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

con x la coordenada vertical y $k > 0$, $c > 0$.

La ec. de movimiento clásica de una partícula en 3 dimensiones,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \quad (1.4)$$

es también una ec. diferencial ordinaria de orden 2, pero la incógnita es ahora la función *vectorial* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La ec. (1.4) representa en realidad un *sistema* de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias *acopladas* para $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Un ejemplo corriente de ecuación diferencial ordinaria de orden 1 es la ec. del decaimiento radioactivo,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1.5)$$

donde la incógnita $N(t)$ es la cantidad de sustancia no desintegrada y $\lambda > 0$ la constante de decaimiento o desintegración. Si $\lambda < 0$, (1.5) representa la ec. que determina el crecimiento de una población N . En ambos casos se asume que el incremento dN de la cantidad N en un intervalo de tiempo pequeño dt es proporcional a N .

Se denomina *solución* de la ec. diferencial a una función que sustituida en la misma la convierte en una identidad. El problema fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales es la determinación de soluciones, o más precisamente, de métodos que permitan hallar todas las soluciones posibles, lo que en general no es fácil. El proceso de determinación de las soluciones de una ec. diferencial se denomina *integración* de la misma. Si bien en ciertos casos (incluidos algunos muy importantes para la física) es posible hallar soluciones exactas en forma analítica, en muchos otros sólo es factible obtener soluciones *aproximadas* en forma *numérica*.

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial es *lineal* si ambos miembros de ella son funciones *lineales* de la función incógnita y sus derivadas (aunque no necesariamente de la variable independiente), como por ejemplo (1.3) y (1.5). Las ec. (1.2) y (1.4) serán lineales sólo cuando F sea una función lineal de x y $\frac{dx}{dt}$ o \mathbf{r} y $d\mathbf{r}/dt$. En general, (1.1) será lineal si f es una función lineal de u y sus derivadas. En tal caso, para u escalar podrá escribirse como

$$a_n(t) \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) u = f(t) \quad (1.6)$$

La ec. (1.6) suele escribirse en la forma

$$L[u] = f(t), \quad L = \sum_{m=0}^n a_m(t) \frac{d^m}{dt^m}$$

donde L es un operador diferencial *lineal*: si c_1 y c_2 son constantes y $u_1(t)$, $u_2(t)$ funciones derivables,

$$L[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 L[u_1(t)] + c_2 L[u_2(t)] \quad (1.7)$$

$\forall c_1, c_2, u_1(t), u_2(t)$. Esta propiedad *define* la linealidad.

Si $f(t) = 0$ en (1.6), la ec. se denomina *homogénea*. Si u_1 y u_2 son dos soluciones de la ec. homogénea (es decir, $L[u_1] = L[u_2] = 0$) $\Rightarrow u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ es también solución de la ec. homogénea $\forall c_1, c_2$, debido a (1.7) (*principio de superposición*). La ec. (1.5) es un ejemplo de ec. diferencial lineal homogénea de orden 1.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Consideremos ahora ecuaciones de la forma

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \quad (1.8)$$

Una ec. diferencial ordinaria de primer orden puede siempre reducirse a esta forma tras resolver la ecuación original respecto a la derivada. Veremos en la próxima clase un importante teorema de *existencia y unicidad* de la solución para las ecuaciones del tipo (1.8). Pero primero repasaremos algunos métodos elementales de resolución para casos particulares, que permitirán apreciar varias propiedades generales.

1) Si $f(t, u)$ no depende de u , (1.8) se reduce a

$$\frac{du}{dt} = f(t) \quad (1.9)$$

cuya solución general es (asumiendo $f(t)$ continua)

$$u(t) = \int f(t)dt + c \quad (1.10)$$

La constante c se denomina *constante de integración*, y puede determinarse conociendo el valor de u en un cierto tiempo t_0 (es decir, el valor inicial): Si $u(t_0) = u_0 \Rightarrow$

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(t')dt' + u_0 \quad (1.11)$$

En general, una ecuación diferencial ordinaria de orden n dependerá de n constantes de integración, que pueden ser determinadas por n condiciones iniciales (posición, velocidad, aceleración, etc). La solución con las constantes indeterminadas, como (1.10), se denomina *solución general*, mientras que aquella en que una o mas constantes toman algún valor especial, como en (1.11), se denomina *solución particular*. La solución general es el conjunto de soluciones particulares.

2) Ecuaciones con *variables separables*: Corresponde a $f(t, u) = h(t)g(u)$. La ec. (1.8) se convierte en

$$\frac{du}{dt} = h(t)g(u) \quad (1.12)$$

Esta ec. puede reescribirse, asumiendo $g(u) \neq 0$, como

$$\frac{du}{g(u)} = h(t)dt \quad (1.13)$$

cuya solución general es

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int h(t)dt + c \quad (1.14)$$

Esta ecuación, del tipo $\phi(t, u) = c$, determina *implícitamente* la solución $u(t)$. La solución particular para $u(t_0) = u_0$, con $g(u_0) \neq 0$, está dada por

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{g(u')} = \int_{t_0}^t h(t')dt' \quad (1.15)$$

Para $g(u) = 1$ se obtiene por su puesto la ec. (1.11). Si además existen raíces u_r t.q. $g(u_r) = 0$, a la solución (1.14) se deben agregar también las soluciones constantes

$$u(t) = u_r, \quad \text{con } g(u_r) = 0$$

que no necesariamente se obtienen de (1.14) o (1.15), pero que son obviamente solución de (1.12).

El caso en que $f(t, u)$ no depende de t corresponde a $h(t) = 1$ en (1.12). El segundo miembro de (1.15) se reduce entonces a $t - t_0$, y la solución $u(t)$ dependerá pues sólo de la diferencia $t - t_0$, lo que refleja la invarianza en este caso de la ecuación (1.12) frente a traslaciones temporales.

Ejemplo 1: Consideremos la ec. (1.5). En este caso,

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

lo que conduce a

$$\int \frac{dN}{N} = \ln |N| = - \int \lambda dt + c = -\lambda t + c$$

o sea,

$$N(t) = c'e^{-\lambda t}$$

donde $c' = \pm e^c$ se determina de la condición inicial. Si $N(t_0) = N_0 \Rightarrow c' = N_0 e^{\lambda t_0}$ y

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Obtenemos la conocida fórmula para el decaimiento radiactivo si $\lambda > 0$ y para el crecimiento exponencial de una población si $\lambda < 0$. Si bien la deducción anterior es válida para $N(t) \neq 0$, o sea, $N_0 \neq 0$, para $N_0 = 0$ se recupera la solución constante de (1.5), $N(t) = 0 \forall t$, que corresponde a $c' = 0$ ($c \rightarrow -\infty$).

Ejemplo 2:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N^2$$

Procediendo en la forma anterior obtenemos $-\frac{1}{N} = -\lambda t + c$, o sea,

$$N(t) = \frac{1}{\lambda t - c} \quad (1.16)$$

Si $N(t_0) = N_0 \Rightarrow c = \lambda t_0 - N_0^{-1}$ y

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + N_0 \lambda t'}, \quad t' = t - t_0 \quad (1.17)$$

Existe además la solución trivial $N(t) = 0 \forall t$, la cual no es en principio un caso particular de (1.16), aunque puede obtenerse de (1.17) para $N_0 = 0$ ($c \rightarrow \pm\infty$). Para $N_0 > 0$ y $\lambda > 0$, obtenemos un decrecimiento mucho más lento ($N(t) = O(\lambda t')^{-1}$ para $t' \gg (N_0 \lambda)^{-1}$) que en el ej. 1, pues a medida que N disminuye, dN/dt disminuye más rápidamente

Es muy interesante considerar ahora $\lambda < 0$. En lugar de un crecimiento exponencial, obtenemos un crecimiento "explosivo", que *diverge* para $t' \rightarrow t_c = (|\lambda|N_0)^{-1}$, lo que refleja el hecho de que al crecer N , $\frac{dN}{dt}$ aumenta en este caso muy rápidamente. Matemáticamente, este ejemplo muestra que aún cuando $f(t, u)$ sea una función continua y derivable, por ejemplo tan simple como u^2 , no existe necesariamente una solución continua de (1.8) para todo $t > t_0$. Veremos luego esto con mayor detalle. Obsérvese también que frente a pequeños cambios en la condición inicial N_0 , la solución $N(t)$ variará fuertemente para t próximo a t_c .

2') *Ecuaciones que se reducen a variables separables.* En algunos casos es posible reducir la ecuación diferencial a una ecuación del tipo (1.12) mediante un cambio de variables sencillo. Por ejemplo, si

$$\frac{du}{dt} = f(au + bt) \quad (1.18)$$

reemplazando $z = au + bt$, obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = a \frac{du}{dt} + b = af(z) + b$$

que es de la forma (1.12). Por lo tanto, si $af(z) + b \neq 0$,

$$\int \frac{dz}{af(z) + b} = t + c$$

que determina $z(t)$ y $u(t) = (z(t) - bt)/a$. Si $\exists z_0$ t.q. $af(z_0) + b = 0$, deberíamos agregar las soluciones $z = z_0$, o sea $u(t) = (z_0 - bt)/a$.

Análogamente, si

$$\frac{du}{dt} = f(u/t) \quad (1.19)$$

reemplazando $z = u/t$ obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} \frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} = (f(z) - z) \frac{1}{t}$$

que es nuevamente de la forma (1.12). Por lo tanto,

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c \quad (1.20)$$

que determina $z(t)$ y $u(t) = tz(t)$. Si $\exists z_0$ t.q. $f(z_0) = z_0$, se deben agregar las soluciones $z = z_0$, o sea, $u(t) = z_0 t$. La ec. (1.19) se denomina a veces ec. diferencial homogénea de primer orden, y su solución (1.20) es de la forma $F(u/t) = c't$, con $F(z) = e^{\int dz/(f(z)-z)}$. Si $u(t)$ es solución, $w(t) = u(\lambda t)/\lambda$ es también solución si $\lambda \neq 0$.

3) *Ecuaciones en diferenciales totales.* Si

$$\frac{du}{dt} = -\frac{f(t, u)}{g(t, u)} \quad (1.21)$$

con $g(t, u) \neq 0$, podemos reescribir esta ecuación como

$$g(t, u)du + f(t, u)dt = 0 \quad (1.22)$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial g(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \quad (1.23)$$

$\Rightarrow \exists \phi(t, u)$ t.q.

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = g(t, u), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, u) \quad (1.24)$$

y podemos reescribir (1.22) como la diferencial total

$$d\phi = g(t, u)du + f(t, u)dt = 0$$

Las soluciones $u(t)$ de (1.21) quedan entonces determinadas implícitamente por la ecuación

$$\phi(t, u) = c \quad (1.25)$$

con c constante. Si $u(t_0) = u_0 \Rightarrow c = \phi(t_0, u_0)$ y la solución particular queda determinada por

$$\phi(t, u) = \phi(t_0, u_0) \quad (1.26)$$

La condición (1.23) es necesaria y suficiente para que el primer miembro de (1.22) sea la diferencial total de una función ϕ . Esta puede obtenerse como la integral de línea

$$\phi(t, u) = \int_{(t_0, u_0)}^{(t, u)} [g(t', u')du' + f(t', u')dt'] + \phi_0 \quad (1.27)$$

a lo largo de cualquier curva que vaya desde (t_0, u_0) a (t, u) (dentro de una región simplemente conexa donde f y g esten definidas), con $\phi_0 = \phi(t_0, u_0)$ una constante arbitraria. Por ejemplo, eligiendo dos segmentos paralelos a los ejes coordenados,

$$\phi(t, u) = \int_{u_0}^u g(t_0, u')du' + \int_{t_0}^t f(t', u)dt' + \phi_0 \quad (1.28)$$

Esto es equivalente a escribir

$$\phi(t, u) = \int g(t, u)du + c(t)$$

y determinar $c(t)$ a partir de $\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, u)$.

Notemos que la solución (1.14) para variables separables corresponde a $\phi(t, u) = \int \frac{du}{g(u)} - \int f(t)dt$.

Ejemplo:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2t + u}{2u + t} \quad (1.29)$$

En este caso $g(t, u) = 2u + t$, $f(t, u) = 2t + u$, con $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial t} = 1$. Podemos entonces escribir (1.29) como

$$d\phi = (2u + t)du + (2t + u)dt = 0$$

con

$$\begin{aligned} \phi(t, u) &= \int_{u_0}^u (2u' + t_0)du' + \int_{t_0}^t (2t' + u)dt' + \phi_0 \\ &= u^2 + ut + t^2 - (u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2) + \phi_0 \end{aligned}$$

Las solución $u(t)$ queda entonces determinada por

$$u^2 + ut + t^2 = c \quad (1.30)$$

o sea, $u(t) = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4c - 3t^2})$, con $c = u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2$ y el signo determinado por $u(t_0) = u_0$. La solución sólo está definida para $t \in [-t_c, t_c]$, con $t_c = 2\sqrt{c/3}$, anulándose el denominador de (1.29) para $t = \pm t_c$ ($u(\pm t_c) = \mp t_c/2$). La gráfica de $u(t)$ es la parte superior o inferior de una elipse con centro en el origen, rotada 45° .

Notemos que la ec. (1.29) es de la forma (1.19), con $f(z) = -(2+z)/(2z+1)$. Puede comprobar el lector que (1.20) conduce a la solución (1.30).

3') *Factor integrante*. Si la ec. (1.23) no se verifica, es aún posible convertir la ecuación (1.22) en una diferencial exacta multiplicando a la misma por una función $\mu(t, u)$, llamada factor integrante:

$$d\phi = \mu(t, u)g(t, u)du + \mu(t, u)f(t, u)dt = 0 \quad (1.31)$$

con

$$\frac{\partial(\mu g)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu f)}{\partial u} \quad (1.32)$$

Desarrollando la ec. anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u} &= \mu^{-1} \left[f \frac{\partial \mu}{\partial u} - g \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] \\ &= f \frac{\partial \ln |\mu|}{\partial u} - g \frac{\partial \ln |\mu|}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.33)$$

la cual es una ec. en derivadas parciales para $\mu(t, u)$, que puede ser tan difícil de resolver como la ec. original (puede demostrarse que si las derivadas de f y g son continuas y por lo menos f o g es no nula, la ec. anterior posee siempre una solución no nula). Sin embargo, en algunos casos su resolución es sencilla. Por ejemplo, si $\mu(t, u)$ es función de t solamente, obtenemos

$$\frac{\partial \ln |\mu|}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t} \right] / g$$

lo cual es factible sólo si el segundo miembro es función de t únicamente. En tal caso,

$$\mu(t) = c \exp \left[\int \frac{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}}{g} dt \right] \quad (1.34)$$

Podemos fijar $c = 1$ ya que la constante que multiplica a μ es irrelevante. En forma similar pueden considerarse factores integrantes que sean funciones de u , o en general, de alguna función de u y t . Una vez obtenido μ se procede como en el ítem anterior para hallar $\phi(t, u)$.

Ejemplo:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2 + u(t+1) + t(t+2)}{2u+t}$$

En este caso, $\frac{\partial f}{\partial u} = 2u + t + 1 \neq \frac{\partial g}{\partial t} = 1$. No obstante, $[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}] / g = 1$ y por lo tanto,

$$\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$$

verificándose $\frac{\partial(e^t f)}{\partial u} = \frac{\partial(e^t g)}{\partial t} = e^t(2u + t + 1)$. Obtenemos

$$d\phi = e^t[(2u + t)du + (u^2 + u(t+1) + t(t+2))dt] = 0$$

con $\phi(t, u) = e^t(u^2 + ut + t^2)$. La solución está entonces determinada por

$$(u^2 + ut + t^2)e^t = c$$

o sea, $u = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4ce^{-t} - 3t^2})$, con $c = \phi(u_0, t_0) > 0$. La ec. $\phi(t, u) = c$ origina una curva abierta si $c > c_c \approx 0.41$ y una curva cerrada más una abierta si $c < c_c$, estando las abscisas extremas de las mismas determinadas por la condición $3t^2 \leq 4ce^{-t}$.

4) *Ecuación general lineal de primer orden*. Corresponde al caso en que $f(t, u)$ en (1.8) es una función lineal de u :

$$\frac{du}{dt} = a(t) + b(t)u \quad (1.35)$$

Podemos escribir (1.35) en la forma

$$L[u] = a(t), \quad L = \frac{d}{dt} - b(t) \quad (1.36)$$

donde L es un operador *lineal*.

Consideremos primero $a(t) = 0$. En tal caso la ec. (1.35) es *homogénea* y de variables separables:

$$\frac{du}{u} = b(t)dt$$

de donde $\ln |u(t)| = \int b(t)dt + c'$ y

$$u(t) = ce^{\int b(t)dt} \quad (1.37)$$

Si $u(t_0) = u_0 \Rightarrow$

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t b(t')dt'} \quad (1.38)$$

Si $a(t) \neq 0$, podemos intentar una solución del tipo (1.37), pero con c una función de t a determinar:

$$u = u_h(t)c(t), \quad u_h(t) = e^{\int b(t)dt} \quad (1.39)$$

Este procedimiento se denomina *variación de parámetros*. Se obtiene, notando que $L[u_h(t)] = 0$,

$$L[u] = L[u_h(t)]c(t) + u_h(t)\frac{dc}{dt} = u_h(t)\frac{dc}{dt} = a(t)$$

Por lo tanto,

$$c(t) = \int \frac{a(t)}{u_h(t)} dt + c'$$

y reemplazando en (1.39),

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t)[c' + \int \frac{a(t)}{u_h(t)} dt] \\ &= e^{\int b(t)dt} [c' + \int e^{-\int b(t)dt} a(t) dt] \end{aligned} \quad (1.40)$$

La solución general es pues una solución de la ec. homogénea ($u_h(t)c'$) mas una solución particular de la inhomogénea. La solución particular para $u(t_0) = u_0$ es

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_{t_0}^t b(t')dt'} [u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{t'} b(t'')dt''} a(t') dt'] \\ &= K(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t K(t, t')a(t') dt' \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde $K(t_2, t_1) = e^{\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt} = u_h(t_2)/u_h(t_1)$.

La ec. (1.40) puede también obtenerse por el método del factor integrante. En este caso $f = -[a(t) + b(t)u]$,

$g = 1$ y $(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t})/g = -b(t)$ es función de t , por lo que μ puede obtenerse de (1.34): $\mu(t) = ce^{-\int b(t)dt}$. Finalmente,

$$\phi(t, u) = \mu(t)u - \int \mu(t)a(t)dt$$

La ec. $\phi(t, u) = c$ conduce a (1.40).

Ejemplo: La velocidad de una partícula de masa m en un medio viscoso, sometida a una fuerza $F(t)$, satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v + f(t)$$

con $\lambda = c/m > 0$, $f(t) = F(t)/m$. La solución general es

$$v(t) = e^{-\lambda t}[c' + \int e^{\lambda t} f(t)dt]$$

y la solución para $v(t_0) = v_0$ puede escribirse como

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-t')} f(t')dt'$$

que corresponde a $K(t_2, t_1) = e^{-\lambda(t_2-t_1)}$. Si

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ o } t > t_c \\ f_0 & 0 \leq t \leq t_c \end{cases}$$

se obtiene, para $t_0 = 0$, $v_0 = 0$,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) & 0 \leq t \leq t_c \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})e^{-\lambda(t-t_c)} & t > t_c \end{cases}$$

La solución para $t > t_c$ es equivalente a la solución de la ec. homogénea para $t_0 = t_c$ y $v(t_c) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})$. Si $f_0 \rightarrow \infty$ y $t_c \rightarrow 0$, con $f_0 t_c \rightarrow A$ (finito) $\Rightarrow v(t_c) \rightarrow A$. Notemos también que si $f(t) = f_0 \forall t > 0$ ($t_c \rightarrow \infty$), $v(t) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) \forall t > 0$, con $v(t) \rightarrow f_0/\lambda$ (velocidad límite) para $t \rightarrow \infty$.

La corriente I de un circuito eléctrico con autoinducción L , resistencia R y tensión $V(t)$ está descrita por una ec. similar:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = V(t)$$

La solución para $I(0) = I_0$ y L, R constantes, es

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L} + \int_0^t e^{-R(t-t')/L} V(t') dt'$$

4') *Ecuaciones reducibles a ec. lineales.* Algunas ecuaciones pueden ser reducidas a ec. lineales mediante un sencillo cambio de variables. Un conocido ejemplo es la ec. de Bernoulli,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u^n + b(t)u, \quad n \neq 1$$

Sustituyendo $z = u^{1-n}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (1-n)u^{-n} \frac{du}{dt} = (1-n)u^{-n}[a(t)u^n + b(t)u] \\ &= (1-n)[a(t) + b(t)z] \end{aligned}$$

que es una ec. lineal en z .

En general, si $u = g(z)$, con g invertible, y z satisface la ec. lineal $dz/dt = a(t) + b(t)z$, obtenemos para u la ec. no lineal

$$\frac{du}{dt} = g'(z) \frac{dz}{dt} = g'(g^{-1}(u))[a(t) + b(t)g^{-1}(u)]$$

que posee la solución $u(t) = g(z(t))$, con $z(t)$ la solución de la ec. lineal. Por ej., si $u = z^{1/(1-n)}$, $\frac{du}{dt} = \frac{1}{1-n}[a(t)u^n + b(t)u]$, que es la ec. de Bernoulli. Análogamente, si $u = e^z$,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u + b(t)u \ln u$$

cuya solución es $e^{z(t)}$, mientras que si $u = \ln z$,

$$\frac{du}{dt} = a(t)e^{-u} + b(t)$$

cuya solución es $\ln z(t)$.

2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Consideremos la ec. diferencial ordinaria de 1^{er} orden

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \tag{2.1}$$

con la condición inicial $u(t_0) = u_0$. Salvo casos especiales, como los vistos en la clase anterior, no es posible en general resolver esta ecuación en forma analítica. Es necesario entonces recurrir a métodos *aproximados*, que permiten resolver (2.1) en forma numérica. Para ello, se necesita primero estar seguro de que efectivamente *existe* una solución de (2.1) para una determinada f y condición inicial. El siguiente teorema demuestra que dicha solución *existe y es única* para una clase muy amplia de funciones. A la vez, el teorema proporciona un *método de resolución aproximado* de (2.1) (método de Picard), que resulta útil tanto formal como numéricamente.

Teorema: Si $f(t, u)$ es continua en un rectángulo R dado por $|t - t_0| \leq a$, $|u - u_0| \leq b$, y satisface en R la condición de Lipschitz

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq N|u_2 - u_1| \tag{2.2}$$

con N constante, entonces en el intervalo

$$|t - t_0| \leq r, \quad r = \text{Min}[a, b/M] \tag{2.3}$$

con M el valor máximo de $|f|$ en R , *existe una única solución $u(t)$ de (2.1) que satisface $u(t_0) = u_0$.*

Para que se cumpla (2.2) es suficiente que $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ exista y esté acotada en R , dado que por el teorema del valor medio,

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| = |f_u(t, \xi)(u_2 - u_1)| \leq N|u_2 - u_1|$$

con $\xi \in [u_1, u_2]$ y N una cota superior de $|f_u|$ en R .

Demostración: La ec. (2.1) es equivalente a la ec. integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u(t')) dt' \tag{2.4}$$

Podemos plantear ahora una secuencia de aproximaciones sucesivas $u_0, u_1(t), \dots, u_n(t)$ definidas por

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u_{n-1}(t')) dt', \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

con $u_0(t) = u_0$ (método de Picard). La restricción (2.3) asegura que $u_n(t)$ no sale de R para ningún n (o sea, $|u_n(t) - u_0| \leq b$ si $|t - t_0| \leq r$). En efecto, para $n = 0$ esto se cumple trivialmente. Asumiendo que se cumple para $u_{n-1}(t)$, obtenemos, dado que $|f| \leq M$ en R ,

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(t', u_{n-1}(t'))| dt' \leq M|t - t_0| \leq b \quad (2.6)$$

para $|t - t_0| \leq r$.

Probaremos ahora que la sucesión (2.5) converge. Si $n \geq 1$ y $|t - t_0| \leq r$,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(t', u_n(t')) - f(t', u_{n-1}(t'))] dt' \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(t', u_n(t')) - f(t', u_{n-1}(t'))| dt' \\ &\leq N \int_{t_0}^t |u_n(t') - u_{n-1}(t')| dt' \quad (2.7) \end{aligned}$$

Para $n = 1$, (2.6) implica que

$$|u_1(t) - u_0| \leq M|t - t_0|$$

Por lo tanto, (2.7) conduce a

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq NM \int_{t_0}^t |t' - t_0| dt = MN \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

y para n general, a

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{MN^{n-1}|t - t_0|^n}{n!} \quad (2.8)$$

(asumiendo (2.8) como válido, $|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq MN^n \int_{t_0}^t \frac{|t' - t_0|^n}{n!} dt' = MN^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$).

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| = 0$. Además, como

$$u_n(t) = u_0 + (u_1(t) - u_0) + \dots + (u_n(t) - u_{n-1}(t))$$

el límite

$$u(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t) - u_{n-1}(t)) \quad (2.9)$$

existe, pues la serie de diferencias es una serie absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^{n-1}|t - t_0|^n}{n!} = M \frac{e^{N|t - t_0|} - 1}{N}$$

La convergencia es también uniforme por el criterio de Weierstrass (si $|f_n(t)| \leq M_n \forall t \in I = [t_1, t_2]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$

converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente sobre I a una función $f(t)$; recordemos que la convergencia es uniforme si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ t.q. si $n > n_0, |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon \forall t \in I$). Por lo tanto, el límite de la integral en (2.5) es la integral del límite, de modo que $u(t)$ es solución de (2.1). Notemos que $u(t)$ es un punto fijo del operador $A[u(t)] = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u(t')) dt'$, (es decir $u(t) = A[u(t)]$), el cual transforma funciones $u(t)$ contenidas en R en funciones $A[u(t)]$ también contenidas en R si $|t - t_0| \leq r$.

Demostremos ahora la unicidad. Si $v(t)$ es otra solución de (2.1) que satisface $v(t_0) = u_0$, entonces, para $|t - t_0| \leq r$,

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(t', u(t')) - f(t', v(t'))| dt' \\ &\leq N \int_{t_0}^t |u(t') - v(t')| dt' \leq KN|t - t_0| \end{aligned}$$

donde K es el máximo de $|u(t) - v(t)|$ para $|t - t_0| \leq r$. Esto implica $|u(t) - v(t)| = 0$ para $|t - t_0| \leq r$. En efecto, aplicando la cota anterior para $|u(t') - v(t')|$, obtenemos

$$|u(t) - v(t)| \leq KN^2 \int_{t_0}^t |t' - t_0| dt' = KN^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

y repitiendo el procedimiento anterior n veces,

$$|u(t) - v(t)| \leq K \frac{(N|t - t_0|)^n}{n!} \quad (2.10)$$

que tiende a 0 para $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1: Consideremos nuevamente la ec. lineal

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u$$

Aplicando el método de Picard para $t_0 = 0$ obtenemos

$$u_1 = u_0 - \lambda \int_0^t u_0 dt' = u_0[1 - \lambda t]$$

$$u_2 = u_0 - \lambda \int_0^t u_1(t') dt' = u_0[1 - \lambda t + \lambda^2 t^2/2]$$

y en general, $u_n = u_0 \sum_{m=0}^n \frac{(-\lambda t)^m}{m!}$, de modo que

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!} = u_0 e^{-\lambda t}$$

La serie anterior converge $\forall t$, pero la condición (2.3) proporciona una estimación muy conservadora del intervalo de convergencia: Para $u_0 > 0, M = |\lambda|(b + u_0)$ y

$$r = \text{Min}\left[a, \frac{b}{|\lambda|(u_0 + b)}\right] \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

si $a > |\lambda|^{-1}$, ya que $b/(u_0 + b) < 1 \forall b > 0$. En general, el intervalo (2.3) es demasiado restrictivo y el desarrollo de Picard converge en un intervalo mayor.

Ejemplo 2: Consideremos ahora

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2$$

con $t_0 = 0$. Obtenemos

$$u_1 = u_0 - \lambda \int_0^t u_0^2 dt' = u_0(1 - \lambda u_0 t)$$

$$u_2 = u_0 - \lambda \int_0^t u_1^2(t') dt' = u_0[1 - \lambda u_0 t + (\lambda u_0 t)^2 - \frac{(\lambda u_0 t)^3}{3}]$$

$$u_3 = u_0 \left[\sum_{n=0}^3 (-\lambda u_0 t)^n + R_4(\lambda u_0 t) \right]$$

donde $R_4(x) = \frac{1}{3}x^4(2 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{63}x^3)$. En general,

$$u_n(t) = u_0 \left[\sum_{m=0}^n (-\lambda u_0 t)^m + R_{n+1}(\lambda u_0 t) \right]$$

con $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$. Para $n \rightarrow \infty$, la solución converge, para $|\lambda u_0 t| < 1$, a

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + \lambda u_0 t} \quad (2.11)$$

que coincide con la solución (1.17). Si $\lambda > 0$ (con $u_0 > 0$) la solución final (2.11) es válida $\forall t > 0$, aunque el desarrollo de Picard converge sólo para $|t| < |\lambda u_0|^{-1}$. En cambio, si $\lambda < 0$ la solución existe sólo para $t < |\lambda u_0|^{-1}$, que coincide con el radio de convergencia del desarrollo. Notemos que la condición (2.3) da en este caso

$$r = \text{Min} \left[a, \frac{b}{|\lambda|(u_0 + b)^2} \right] \leq \frac{1}{4|\lambda|u_0}$$

dado que $b/(u_0 + b)^2 < \frac{1}{4u_0}$, que es nuevamente menor que el radio de convergencia de la serie.

Otras propiedades

Resulta obvio a partir de (2.1) que si $f(t, u)$ posee derivadas parciales continuas hasta orden k en un entorno de (t_0, u_0) , la solución $u(t)$ posee derivadas continuas hasta orden $k + 1$ en un entorno de t_0 .

Puede probarse también que si f depende en forma continua de un parámetro λ (o sea, $\frac{du}{dt} = f(t, u, \lambda)$) y satisface las condiciones del teorema de unicidad, con N en (2.2) independiente de $\lambda \Rightarrow$ la solución $u(t, \lambda)$ depende en forma *continua* de λ para $|t - t_0| \leq r$ (lo mismo rige para un conjunto de parámetros). En particular, esto implica que $u(t)$ dependerá en forma *continua* de la condición inicial $u(t_0) = u_0$. En efecto, escribiendo $v = u - u_0$, $s = t - t_0$, tenemos $\frac{dv}{ds} = f(s + t_0, v + u_0) = g(s, v)$, con $v(0) = 0$, donde los valores iniciales quedan representados por parámetros de la función g . De todos modos, esto no impide que dos soluciones con condiciones iniciales cercanas se alejen mucho para valores grandes de $|t - t_0|$. Por ejemplo, los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En

los mismos, si dos soluciones $u_1(t)$, $u_2(t)$ difieren inicialmente en una pequeña cantidad δu_0 , para tiempos grandes $|u_1(t) - u_2(t)| \approx |\delta u_0| e^{\Lambda t}$, donde $\Lambda > 0$ es el llamado *exponente de Lyapunov*.

Extensión de la solución: Si bien el teorema demuestra la existencia de solución para $|t - t_0| \leq r$, la misma puede en principio extenderse fuera de este intervalo tomando como nuevos puntos iniciales a $t_0 \pm r$. No obstante, como hemos visto no siempre es posible continuar la solución indefinidamente. Esto puede deberse a que la solución se acerca a un punto donde las condiciones del teorema no se cumplen, o también porque la solución se aproxima una asíntota vertical ($\lim_{t \rightarrow t_c} u(t) = \pm \infty$), como ocurre en (2.11) para $\lambda u_0 < 0$ ($t_c = |\lambda u_0|^{-1}$). Un ejemplo del primer caso es la solución (1.30) de la ec. (1.29), limitada al intervalo $|t| < t_c = \sqrt{4c/3}$. Si $t = t_c$, $u(t) = -\frac{1}{2}t$, anulándose el denominador de (1.29).

Puntos singulares. Los puntos (t_0, u_0) en los que o bien no existe solución de (2.1) o la solución no es única, se denominan *puntos singulares*. Obviamente, en estos puntos no se satisfacen las condiciones del teorema de unicidad, aunque no todo punto en el que las mismas no se cumplan es singular. Los condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, puede demostrarse que si f es continua en un entorno de (t_0, u_0) , existe siempre una solución de (2.1), pero está puede no ser única si no se cumple la condición de Lipschitz. La curva formada por los puntos singulares se denomina *curva singular*. Una solución formada enteramente por puntos singulares se denomina *solución singular*.

Ejemplo 1:

$$\frac{du}{dt} = q \frac{u}{t}, \quad q > 0 \quad (2.12)$$

En este caso $f(t, u)$ no es continua en $t = 0$. Integrando por separación de variables obtenemos

$$\ln |u| = q \ln |t| + c'$$

o sea, si $t > 0$,

$$u(t) = ct^q \quad (2.13)$$

Considerando $t_0 = 0$, vemos que si la condición inicial es $u_0 = 0$, (2.13) es solución de (2.12) para *cualquier* valor de c (incluyendo $c = 0$). No existe pues solución única, obteniéndose una familia de soluciones. Por el contrario, si $t_0 = 0$ y $u_0 \neq 0$, no existe ninguna solución. Este tipo de punto singular se denomina nudo.

Si consideramos ahora $q < 0$ en (2.12), $u(t)$ no permanece finito para $t \rightarrow 0$, excepto para $c = 0$. Si $t_0 = 0$, para $u_0 = 0$ obtenemos en este caso una única solución $u(t) = 0$, mientras que si $u_0 \neq 0$ no existe solución.

Ejemplo 2:

$$\frac{du}{dt} = \lambda \sqrt{u}, \quad \lambda \neq 0 \quad (2.14)$$

Para $u \rightarrow 0^+$, si bien \sqrt{u} es continua, no se cumple la condición de Lipschitz pues $f_u = \frac{\lambda}{2\sqrt{u}} \rightarrow \infty$. Los puntos

$(t, u) = (t, 0)$ pueden ser pues puntos singulares. Por separación de variables, para $u > 0$ obtenemos la solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(\lambda t + c)^2, \quad \lambda t + c > 0 \quad (2.15)$$

No obstante, tenemos también la solución trivial

$$u(t) = 0 \quad (2.16)$$

que no se obtiene de (2.15).

Si $t_0 = 0$ y $u_0 > 0$, obtenemos como única solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(2\sqrt{u_0} + \lambda t)^2, \quad (2.17)$$

donde el paréntesis debe ser positivo. La solución (2.17) está definida $\forall t > 0$ si $\lambda > 0$, pero sólo para $t \leq t_c = 2\sqrt{u_0}/|\lambda|$ si $\lambda < 0$. En este caso, $u(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$, y no puede extenderse para $t > t_c$. Si $\lambda < 0$, la solución disminuye pues más rápidamente que en el caso lineal ($\frac{du}{dt} = \lambda u$, con $u(t) = u_0 e^{-|\lambda|t}$ si $\lambda < 0$) “apagándose” en un tiempo *finito*.

Consideremos ahora $u_0 = 0$. La ec. (2.17) se reduce a

$$u(t) = \frac{1}{4}\lambda^2 t^2 \quad (2.18)$$

Si $\lambda > 0$, (2.18) es solución de (2.14) y satisface $u(0) = 0$, al igual que (2.16). Por lo tanto, la solución *no es única*. Lo mismo ocurre obviamente para cualquier valor de t_0 . Los puntos $(0, t)$ son pues singulares y la solución trivial (2.16) es una solución *singular*. Por el contrario, si $\lambda < 0$ (2.18) no es solución de (2.14), obteniéndose como única solución, para $u_0 = 0$ y $t > 0$, la solución trivial (2.16).

Soluciones aproximadas. Si bien no vamos a tratar el tema de aproximaciones numéricas, cabe destacar que existen también otras sucesiones $u_n(t)$ que convergen uniformemente a la solución $u(t)$, y que pueden por tanto utilizarse para aproximar la solución. El más elemental y conocido es el método de la “quebrada de Euler”, que consiste en subdividir el intervalo $[t_0, t_0 + r]$ en n subintervalos de longitud $h = r/n$, y aproximar la solución $u(t)$ por segmentos entre los puntos $(t_0, u_0), (t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n)$ definidos por

$$t_i = t_{i-1} + h, \quad u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n$$

que se obtienen de suponer $f(t, u(t)) = f(t_{i-1}, u_{i-1})$ (constante) en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Cada segmento es pues tangente a la solución exacta en (t_{i-1}, u_{i-1}) . Tal aproximación puede mostrarse que converge, para $h \rightarrow 0$ (o sea, $n \rightarrow \infty$) a la solución exacta $u(t)$ si se cumplen las condiciones del teorema de existencia. Refinamientos del método anterior conducen a aproximar $u(t)$ por una sucesión de polinomios de grado m entre puntos (t_i, u_i) , tales que posean un contacto de orden m con la solución exacta en dichos puntos (métodos de Störmer, Runge, etc.). Estos métodos están en la actualidad directamente incorporados en diversos programas de cálculo numérico o analítico, siendo muy sencilla y rápida su utilización.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones acopladas

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

El teorema de existencia y unicidad se generaliza en forma inmediata a este tipo de sistemas. Podemos reescribir (2.19) en forma concisa como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \quad (2.20)$$

con $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. La condición inicial es $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Si existe una región R definida por $|t-t_0| \leq a$, $|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0| \leq b$, donde se cumplen las condiciones

- $f_i(t, \mathbf{u})$ continua en R
- $|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_2) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_1)| \leq N|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|$,

entonces *existe una única solución* $\mathbf{u}(t)$ de (2.20) que satisface $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$, dentro del intervalo

$$|t - t_0| \leq r = \text{Min}[a, b/M]$$

donde M es el máximo de $|\mathbf{f}|$ en R .

Para que se cumpla la condición de Lipschitz es suficiente que las derivadas parciales $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ sean acotadas en R , pues en tal caso, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_2) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_1)|^2 &= \sum_i |f_i(t, \mathbf{u}_2) - f_i(t, \mathbf{u}_1)|^2 \\ &= \sum_i \left| \sum_j f_{ij}(t, \xi_i)(u_{2j} - u_{1j}) \right|^2 \\ &\leq \sum_i \left(\sum_j N_{ij} |u_{2j} - u_{1j}| \right)^2 \leq N^2 |\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

La demostración del teorema es exactamente igual al caso de una dimensión. Sólo se deben reemplazar f , u y v en (2.4)–(2.10) por \mathbf{f} , \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Esta generalización es muy poderosa. Por ejemplo, la ec. diferencial ordinaria *de orden* n ,

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}) \quad (2.22)$$

puede reducirse a un sistema de n ec. ordinarias de primer orden de la forma (2.20) definiendo

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{dt}, \dots, \quad u_n = \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}$$

con

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = u_3, \dots, \quad \frac{du_n}{dt} = f(t, u_1, \dots, u_n)$$

o sea, $f_1(t, \mathbf{u}) = u_2, f_2(t, \mathbf{u}) = u_3, \dots, f_n(t, \mathbf{u}) = f(t, \mathbf{u})$.

Queda pues garantizada *la existencia y unicidad* de la solución de (2.22) para la condición inicial $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, donde $\mathbf{u}_0 = (u(0), \frac{du}{dt}|_{t=0}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}|_{t=0})$ es el vector que contiene los valores iniciales de la posición, velocidad, aceleración, etc, si f satisface las condiciones del teorema. En forma análoga, un sistema de m ec. diferenciales acopladas de orden n puede reducirse a un sistema de $n \times m$ ec. de primer orden.