Distribuciones (Resumen)

1. LA DELTA DE DIRAC - INTRODUCCION

Consideremos la función

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & |x| \leq \varepsilon/2 \\ 0 & |x| > \varepsilon/2 \end{cases} \quad \varepsilon > 0 \tag{1.1}$$

Se cumple $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx = 1 \;\forall\; \varepsilon > 0$. Además, si f es una función continua arbitraria,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x) dx = \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon} = \langle f \rangle_\varepsilon$$

donde F es una primitiva de f y $\langle f \rangle_\varepsilon$ el valor medio de f en el intervalo $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ estará concentrada cerca del origen y obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon} = F'(0) = f(0) \tag{1.2}$$

lo cual es también obvio a partir de la relación $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle f \rangle_\varepsilon = f(0)$ para f continua. Podemos entonces definir la distribución o función generalizada $\delta(x)$ (delta de Dirac) como el límite

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} g_\varepsilon(x) \tag{1.3}$$

que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \tag{1.4}$$

Si bién el límite (1.3) no existe estríctamente (es 0 si $x \neq 0$ y ∞ si $x = 0$) el límite de la integral (1.2) $\exists\; \forall\; f$ continua en un entorno de $x = 0$, y eso es lo que simbolizan las ec. (1.3)–(1.4). Puede obtenerse una buena aproximación a $\delta(x)$ mediante (1.1) tomando ε mucho menor que la longitud en la cual f varía apreciablemente. Físicamente, $\delta(x)$ representa la densidad lineal de masa correspondiente a una masa puntual de magnitud 1 localizada en el origen.

Notemos también que si $ab \neq 0$ y $a < b$,

$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^b g_\varepsilon(x) f(x) dx = \begin{cases} f(0) & a < 0 < b \\ 0 & {\scriptstyle a<b<0 \text{ o } \atop \scriptstyle 0<a<b} \end{cases}$$

2. DEFINICION

Consideraremos en lo sucesivo *funciones de prueba* f, que son funciones acotadas y derivables a cualquier orden, y que se anulan fuera de un intervalo *finito* I (recordemos ante todo que tales funciones existen: si $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $x \geq 1$, y $f(x) = e^{-1/x^2} e^{-1/(1-x)^2}$ para $|x| < 1$, f

es derivable a *cualquier* orden en $x = 0$ y $x = 1$). En tal caso existen muchas otras funciones $g_\varepsilon(x)$ que convergen a $\delta(x)$, que pueden ser derivables a cualquier orden. En general, si $g_\varepsilon(x)$ está definida $\forall\ x \in \Re$ y $\varepsilon > 0$, diremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x) = \delta(x) \text{ sii } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = f(0)$$

$\forall$ *función de prueba* f.

Un conocido ejemplo es

$$\delta(x) \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \tag{2.1}$$

En efecto, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} dx = 1\ \forall\varepsilon > 0$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} f(x) dx \ = \ f(0) \tag{2.2}$$

La gráfica de $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$ es la "campana" de Gauss, con área 1 y dispersión $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) x^2 dx = \varepsilon^2$. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ se concentra alrededor de $x = 0$, pero mantiene su área constante.

En general, si $g(x) \geq 0\ \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$.
En efecto, si $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = 1$ y $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon) dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} g(u) du = \left\{\begin{smallmatrix} 1 & a<0<b \\ 0 & a<b<0 \text{ o } 0<a<b \end{smallmatrix}\right.$. Por lo tanto, si $|f(x)| \leq M\ \forall x$ y $ab > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} |\int_a^b g(x/\varepsilon) f(x) dx| \leq M \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon) dx = 0$. De este modo, si $t > 0$ y f es continua y acotada,

$$I_f \equiv \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon) f(x) dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{-t}^{t} g(x/\varepsilon) f(x) dx$$

Si $m_t \leq f(x) \leq M_t$ para $x \in [-t, t] \Rightarrow m_t \leq I_f \leq M_t\ \forall t > 0$, pero por continuidad de f, $\lim\limits_{t\to 0^+} M_t = \lim\limits_{t\to 0^+} m_t = f(0)$, por lo que $I_f = f(0)$.

Ejemplos muy utilizados son (2.1) y también

$$\delta(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{Im}[\frac{1}{x + i\varepsilon}] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{2.3}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2} \tag{2.4}$$

que corresponden a $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ y $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\pi x^2}$. No obstante, existen también funciones $g(x)$ no siempre positivas que satisfacen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$. Por ejemplo la fórmula de Dirichlet,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} dx = f(0)$$

corresponde a $g(x) = \sin(x)/(\pi x)$ e implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} = \delta(x)$$

aún cuando $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \sin(x/\varepsilon)/x$ es no nulo (no existe) para $x \neq 0$ (sólo es nulo el promedio: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon t} \int_{x_0-t}^{x_0+t} g(x/\varepsilon) dx = 0$ si $0 < t < |x_0|$).

3. PROPIEDADES BASICAS

La composición de $\delta(x)$ con otras funciones se define de modo tal que se sigan cumpliendo las reglas usuales de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)f(u+x_0)du = f(x_0) \tag{3.1}$$

Asimismo, si $a \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)f(x)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)f(\frac{u}{a})du = \frac{1}{|a|}f(0)$$

por lo que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \quad a \neq 0 \tag{3.2}$$

En particular, $\delta(-x) = \delta(x)$.

Para una función invertible y derivable $g(x)$ que posee una sóla raíz x_1 ($g(x_1) = 0$), con $g'(x_1) \neq 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(g(x))f(x)dx = \int_{r_-}^{r_+}\delta(u)\frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|}du = \frac{f(x_1)}{|g'(x_1)|}$$

donde $(r_-, r_+) \subset$ en la imagen $g(\Re)$, con $r_\pm \gtrless 0$ y $g^{-1}(0) = x_1$. Por lo tanto, en este caso,

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x-x_1)}{|g'(x_1)|} \tag{3.3}$$

En general, para una función $g(x)$ derivable con raíces aisladas x_n y $g'(x_n) \neq 0$ tenemos

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|} \tag{3.4}$$

Sin embargo $\delta(x^2)$ y en general, $\delta(x^n)$, $n > 1$, no están definidas para funciones de prueba arbitrarias. Tampoco lo está el producto $\delta(x)\delta(x) = [\delta(x)]^2$. Notemos también que si $g(x)$ es una función de prueba,

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x) \tag{3.5}$$

4. DERIVADAS DE $\delta(x)$

Si queremos que se siga cumpliendo la integración por partes, podemos definir también la derivada $\delta'(x)$ t.q. (recordar que f se anula fuera de un intevalo finito)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$$

y en general, la derivada enésima $\delta^{(n)}(x)$ t.q.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) f(x) dx & (4.1) \\ f^{(n)}(x_0) &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) dx & (4.2) \end{aligned}$$

Notemos también que si $a \neq 0$,

$$\delta^{(n)}(ax) = \frac{1}{a^n |a|} \delta^{(n)}(x)$$

En particular, $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$.

Se deja al lector probar que:

$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x)$,

$[\delta(x)g(x)]' = \delta'(x)g(x) + \delta(x)g'(x) = g(0)\delta'(x)$,

$[\delta(g(x))]' = \delta'(g(x))g'(x)$.

5. FUNCION DE HEAVISIDE

Consideremos la función "escalón"

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Mostraremos que efectivamente $H'(x) = \delta(x)$ (lo que es intuitivamente razonable) de modo que $H(x)$ representa la "primitiva" de $\delta(x)$, al menos en forma simbólica. En efecto, para una función de prueba $f(x)$, obtenemos, integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x) f'(x) dx = -\int_{0}^{\infty} f'(x) dx = f(0)$$

de modo que

$$H'(x) = \delta(x)$$

Mediante $H(x)$ podemos escribir una integral en un intervalo finito como una integral en toda la recta, donde los límites quedan determinados por el integrando:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(b - x) f(x) dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [H(b - x) - H(a - x)] f(x) dx$$

6. TRATAMIENTO FORMAL. TEORIA DE DISTRIBUCIONES

Consideremos primero un espacio V de vectores de dimensión *finita*, tal como R^n. Podemos definir una forma o funcional lineal como una función $L : V \to \Re$ que asigna a c/vector $\boldsymbol{u} \in V$ un número real $L(\boldsymbol{u})$ y que satisface

$$L(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2) = c_1 L(\boldsymbol{u}_1) + c_2 L(\boldsymbol{u}_2)$$

Puede mostrarse que $\exists$ un único vector $\boldsymbol{l}$ t.q.

$$L(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u})$$

$\forall$ $\boldsymbol{u} \in V$, donde $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u})$ denota el *producto interno* de dos vectores ($(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$, con $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ sólo si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^*$, $(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}) = c_1^*(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}) + c_2^*(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$). Por ej., en R^n, podemos considerar $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ (producto escalar) y en C^n, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{u}$.

Expandiendo $\boldsymbol{u}$ en una base *ortonormal* de vectores $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, t.q. $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$, tenemos $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$ y

$$L(\boldsymbol{u}) = \sum_i c_i L(\boldsymbol{v}_i) = \sum_i c_i l_i = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u})$$

donde $l_i = L(\boldsymbol{v}_i)$ y $\boldsymbol{l} = \sum_i l_i^* \boldsymbol{v}_i$. De modo que toda forma lineal L en un espacio de dim. finita con producto interno puede ser identificada con un vector $\boldsymbol{l}$ del espacio.

En espacios de dimensión infinita, tal identificación *no es siempre posible*. Consideremos por ej. el espacio de funciones "de prueba" D formado por funciones reales $f(x)$ que poseen derivadas de cualquier orden y se anulan fuera de un intervalo finito. Podemos definir el producto interno

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Consideremos ahora el funcional lineal L que asigna a c/función un número real, con

$$L[c_2 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2]$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Para toda función $g(x) \in D$ podemos asociar el funcional lineal L_g t.q.

$$L_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Pero podemos también definir el funcional δ t.q.

$$\delta[f] = f(0)$$

aunque es obvio que *no existe* $g \in D$ que satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = f(0)$$

$\forall\ f \in D$. El espacio de funcionales es pues "más grande" que el de las funciones f. No obstante, por comodidad podemos introducir el símbolo $\delta(x)$ asociado al funcional anterior, t.q.

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Se *define* la derivada de L como

$$L'[f] = -L[f']$$

para que se siga cumpliendo formalmente la integración por partes. De esta forma,

$$L_{g'}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f'(x) dx = L'_g[f]$$

y en particular,

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = -f'(0)$$

La funcional de Heaviside se define como

$$H[f] = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

que corresponde a $g(x) = H(x)$, con

$$H'[f] = -H[f'] = -\int_0^{\infty} f'(x) dx = f(0)$$

Por lo tanto, $H' = \delta$.

Por ejemplo, puede demostrar el lector que, considerando a $|x|$ una distribución,

$$\frac{d|x|}{dx} = H(x) - H(-x), \quad \frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x)$$

Las distribuciones son funcionales lineales continuas sobre D. La continuidad significa que si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones $t.q.$ para $n \to \infty$ f_n y sus derivadas tienden a 0 uniformemente $\Rightarrow L[f_n] \to 0$. Las distribuciones forman pues un *espacio vectorial* (denominado el espacio *dual* de D). Para un espacio finito el dual es equivalente al espacio, pero esto no es necesariamente válido para un espacio de dimensión infinita.

Se dice que una distribución L se anula en un intervalo I si $L[f] = 0\ \forall\ f$ que sea no nula sólamente en I. En tal caso, $L[f]$ no dependerá de los valores que tome f en I. Con esta definición, podemos decir que $\delta(x) = 0\ \forall\ x \neq 0$ y que $H(x) = 0$ si $x < 0$. El *soporte* de una distribución es el conjunto cerrado de puntos donde L no se anula (o sea, el conjunto cerrado más chico fuera del cual L se anula). De esta forma, el soporte de $\delta(x)$ es el punto $x = 0$ mientras que el soporte de $H(x)$ es el semieje $x \geq 0$. El *soporte singular* de una distribución L_g es el conjunto cerrado más chico fuera del cual L es equivalente a una función $g(x)$ derivable a cualquier orden. El soporte singular de $\delta(x)$ (y también $H(x)$) es pues el punto $x = 0$.