Matemáticas Especiales II

Año 2014

Programa tentativo

Prof. Tomás S. Grigera

1. **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** Introducción a las ecuaciones diferenciales. Ecuaciones ordinarias y parciales. Solución general, solución particular y condiciones adicionales (iniciales o de contorno). Ecuaciones diferenciales ordinarias: forma general. Ecuaciones lineales y principio de superposición. Casos especiales importantes. Solución por series de potencias. Clasifiación de los puntos del dominio y desarrollos posibles en cada caso. Series de Frobenius y teorema de Fuchs-Frobenius. Convergencia de la serie de Taylor de la solución en torno a un punto ordinario. Ecuación de Legendre y polinomios de Legendre. Ecuación asociada de Legendre y armónicos esféricos. Desarrollos en torno a puntos singulares regulares. Ecuación de Bessel. Comportamiento en torno a puntos singulares irregulares. Comportamiento asintótico.

2. **Problemas de valores iniciales.** PVI para una ecuación de primer orden: existencia y unicidad de la solución, teorema de Picard. PVI para un sistema de ecuaciones de primer orden: generalización del teorema de Picard. Sistemas lineales de primer orden homogéneos: matriz fundamental y matriz de Green. Caso de coeficientes constantes. Sistemas de orden n. Reducción de ecuaciones y sistemas de orden n a sistemas de primer orden. Ecuación lineal de orden n. Caso de coeficientes constantes.

3. **Introducción a la teoría de distribuciones.** Funcionales lineales y espacio dual. Espacio de funciones de prueba. Producto interno. Derivada de un funcional. Continuidad. Definición de distribución. La delta de Dirac. La matriz de Green como distribución.

4. **Ecuaciones diferenciales ordinarias: problemas de contorno.** Tipos de condiciones de contorno. Problema de segundo orden homogéneo. Teorema de separación de Sturm. Operador de Sturm-Liouville. autoadjunto. Reducción de EDOs de segundo orden a la forma de Sturm-Liouville. Problema de Sturm-Liouville inhomogéneo: condiciones de existencia del operador inverso y construcción de la función de Green. Problema de autovalores de Sturm-Liouville. Propiedades de autovalores y autovectores. Casos de las distintas condiciones de contorno. Aproximación de Rayleigh-Ritz.

5. **Desarrollos en serie.** Desarrollos en serie generales en espacios vectoriales de dimensión infinita. Desarrollos ortogonales y tipos de convergencia. Sistema completo de vectores (base de un espacio de Hilbert). Desarrollos en serie de autofunciones: existencia de conjuntos completos para ciertos tipos de operadores. Identidad de Parseval. Operador de Fredholm como inversa del operador de S-L. Desarrollo en serie de autofunciones del operador de S-L. Series de Fourier. Coeficientes de Fourier. Tres teoremas de Fourier sobre convergencia. Derivación e integración término a término, fenómeno de Gibbs. Series de Fourier pares e impares. Forma compleja de la serie.

6. **Funciones especiales cilíndricas y esféricas.** Laplaciano en 2-d y 3-d como operador con autovalores degenerados. Separación de variables y relación con problema de autovalores de nuevos operadores. Clasificación de autovectores mediante un segundo operador que conmuta con el primero: operadores de rotación y traslación. Laplaciano en 2-d: Separación de variables en coordenadas cartesianas y polares, autovalores, ecuación de Bessel. Funciones de Bessel de primera y segunda especie, representación integral. Laplaciano en 3-d y Laplaciano sobre el casquete esférico (operador de Beltrami): separación de variables en coordenadas esféricas y ecuaciones de Legendre. Fórmula de Rodrigues, inexistencia de segunda solución linealmente independiente y acotada. Raíces. Autofunciones del operador de Beltrami y armónicos esféricos. Desarrollo en armónicos esféricos.

7. **Transformadas integrales.** Definición y propiedades generales. Transformada de Fourier. Propiedades. Transformada de Fourier para funciones que no se anulan en infinito. Transformada de algunas distribuciones. Ejemplos de aplicación. Teorema de muestreo de Shannon e interpretación del fenómeno de Gibbs. Transformada de Laplace. Teoremas de Tauber. Respuesta causal. Transformada de Fourier-Laplace.

8. **Ecuaciones diferenciales parciales: introducción.** Definición y generalidadades. Ecuaciones (cuasi)lineales. Ecuaciones de primer orden en dos variables. Solución general y caracterísiticas. Ecuaciones de segundo orden en dos variables. Curvas características y clasificación en elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Caso de coeficientes. Generalización a n variables. Las ecuaciones paradigmáticas de la física matemática. Condiciones de contorno y condiciones iniciales. Función de Green.

9. **Ecuaciones parciales elípticas: ecuación de Laplace.** Condiciones de contorno y unicidad de las soluciones. Principio de Dirichlet. Unicidad de la solución para los problemas de Robin y Neumann. Teorema del valor máximo y unicidad de la solución del problema de Dirichlet. Problemas homogéneos. Fórmula de Poisson en el disco, semiplano y rectángulo. Armónicos rectangulares, cilíndricos y esféricos. Problemas inhomogénos (ec. de Poisson). Función de Green para el problema de Dirichlet. Desarrollo de la función de Green en autofunciones. Función de Green para todo el espacio en dos y tres dimensiones. Función de Green en el semiplano y en la esfera: método de las imágenes. Función de Green para el problema de Neumann.

10. **Ecuaciones parciales parabólicas: difusión del calor.** Difusión de calor en una barra: condiciones inicial y de contorno, teorema del valor máximo y unicidad de la solución. Problemas homogénos. Solución en todo el espacio: núcleo del calor en dimensión genérica. Condiciones de contorno homogéneas: barra semiinfinta, barra finita. Problemas inhomogéneos. Función de Green para todo el espacio. Función de Green en regiones acotadas mediante desarrollos en autofunciones. Problemas relacionados: la ecuación de radiación y correcciones a la ley de Fourier.

11. **Ecuaciones parciales hiperbólicas: ecuación de ondas.** Condiciones iniciales y superficies caracterísiticas. Ecuación de las características en el caso de más de dos variables. Unicidad de la solución. Dominio de dependencia. Función de Green. Ecuación de ondas en una dimensión espacial. Solución de D'Alembert y función de Green para la recta. Función de Green en la semirrecta por método de las imágenes. Problemas en un segmento. Ecuación de ondas en dos y tres dimensiones espaciales. Función de Green para el espacio tridimensional: soluciones de Poisson y Lorentz. Función de Green en dos dimensiones mediante descenso dimensional. Soporte de la función de Green en distintas dimensiones y caractarísitca de la propagación. Relaciones de dispersión y ecuaciones relacionadas. Función de Green, función respuesta y susceptibilidad. Función de Green en el espacio de Fourier-Laplace: relaciones de dispersión. Función de Green de ecuaciones relacionadas: propagación, velocidad de grupo. Ecuación del telégrafo. Ecuación de ondas con disipación. Ecuación de la cuerda rígida.

12. **Introducción a la teoría de probabilidades.** Definiciones y axiomas. Interpretación y propiedades de las probabilidades. Variables aleatorias discretas y continuas. Distribución de probabilidad. Principio de igual probabilidad a priori. Probabilidad condicional. Dependencia e independencia de eventos. Teorema de Bayes. Momentos de una distribución. Ejemplos de distribuciones de probabilidad importantes. Función generatriz. Función de una variable aleatoria. Distribución de probabilidad conjunta de varias variables aleatorias. Distribución marginal. Variables aleatorias independientes, descorrelacionadas y ortogonales. Valores esperados, covarianza y correlación. Propiedades de combinaciones lineales de varias variables aleatorias: convergencia de sucesiones de variables aleatorias, lema de Tchebishev, ley de los grandes números y teorema central del límite.

13. **Introducción a la Estadística.** Definición de muestra aleatoria. Estimación de parámetros: estimadores sesgados y no-sesgados. Estimadores eficientes. Estimación por máxima verosimilitud. Carácter consistente y asintóticamente eficiente del estimador de m.v. Test estadístico: hipotesis nula y niveles de confianza. Comparación de medias y varianzas: test de Student y de Fisher. Estimación bayesiana.

Bibliografía

Mohammed A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville theory and its applications*, Springer, London (2008).

Carl M. Bender y Steven A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientist and engineers*, McGraw-Hill (1978).

Earl A. Coddington, *An introduction to ordinary differential equations*, Dover, New York (1961).

Harald Cramer, *Mathematical mehtods of statistics*, Princeton University Press (1946).

Lokenath Debnath y Dambaru Bhatta, *Integral transforms and their applications*, Chapman & Hall (2007).

G. F. D. Duff y D. Naylor, *Differential equations of applied mathematics*, John Wiley & Sons (1966).

Enzo Marinari y Giorgio Parisi, *Tratatello di probabilità*, inédito (2002).

Paul L. Meyer, *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, Addison-Wesley (1961).

Carlos M. Naón, Raúl Rossignoli y Eve Mariel Santangelo, *Apuntes de Matemáticas Especiales II*, inédito (2009).

A. N. Tikhonov y A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Pergamon Press, Oxford (1963).