Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 9 — Ecuaciones parabólicas

La ecuación de difusión

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Ecuación de la difusión del calor en un medio homogéneo.** Deducción. Difusión de calor en una barra: condiciones inicial y de contorno, teorema del valor máximo y unicidad de la solución.

b) **Problemas homogénos.** Solución en todo el espacio: núcleo del calor en dimensión genérica. Condiciones de contorno homogéneas: barra semiinfinta con condiciones de Dirichlet y Neumann (método de las imágenes), regiones finitas.

c) **Problemas inhomogéneos.** Función de Green para todo el espacio. Función de Green en regiones acotadas mediante desarrollos en autofunciones. Expresión general de la solución con inhomogeneidades en la ecuación, en las condiciones iniciales y en las condiciones de contorno.

d) **Problemas relacionados.** La ecuación de radiación. Correcciones a la ley de Fourier.

Bibliografía: Duff y Naylor (1966, cap. 3), Tikhonov y Samarskii (1963, caps. III y VI).

Problema 1. Encuentre la distribución de temperatura $u(x,t)$ de una barra homogénea semi-infinita, sin fuentes externas de calor, en los siguientes casos:

a) $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_x(0,t) = 0,$

b) $u(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = f(t).$

Problema 2. Muestre que si la temperatura en un extremo de una barra semi infinita es de la forma $T = T_0 + A\cos(\omega t)$, entonces, suponiendo que uno puede ignorar las condiciones iniciales, la temperatura a una dada distancia x es $T_0 + Ae^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$, con $\lambda = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$.

Problema 3. Halle la temperatura de una barra homogénea finita ($0 < x < L$) sin fuentes externas, con las condiciones:

a) $u(0,t) = T_0, \quad u_x(L,t) = J, \quad u(x,0) = \phi(x),$

b) $u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + \beta u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = \phi(x).$

Problema 4. Estudie la distribución de temperatura de una placa cuadrada ($0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$), sin fuentes externas, si el borde se mantiene a 0 grados y la temperatura inicial es una dada función $\varphi(x,y)$.

Problema 5. Si a través de una varilla circula una corriente eléctrica que genera calor a razón constante, la ecuación diferencial que satisface la distribución de temperatura de la varilla es

$$u_t = ku_{xx} + C. \tag{9.1}$$

Suponiendo que las condiciones de contorno son $u(0,t) = u(L,t) = 0$, y la condición inicial es $u(x,0) = f(x)$, encuentre la temperatura $u(x,t)$. Estudie en particular a qué se reduce esa distribución en el caso $f(x) = 0$ (varilla que inicialmente está a temperatura 0).

Problema 6. Encuentre la función de Green de la ecuación de radiación en dimensión d,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\nabla^2 u + hu = f(\boldsymbol{r},t), \tag{9.2}$$

para todo el espacio.