Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 8 — Ecuación de Laplace

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Ecuaciones diferenciales parciales.** Definición y generalidadades. Ecuaciones (cuasi)lineales. Ecuaciones de primer orden en dos variables. Solución general y caracterísiticas.

b) **Ecuaciones de segundo orden**. Curvas características y clasificación en elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Caso de coeficientes constantes: soluciones generales. Generalización a n variables. Tratamiento de términos de primer orden.

c) **Ecuación de Laplace: condiciones de contorno y unicidad de las soluciones.** Algunos problemas que conducen a la ecuación de Laplace. Flujo estacionario de calor y los tres problemas de contorno. Principio de Dirichlet. Unicidad de la solución para los problemas de Robin y Neumann. Teorema del valor máximo y unicidad de la solución del problema de Dirichlet.

d) **Ecuación de Laplace homogénea.** Fórmula de Poisson en el disco (armónicos circulares), en el semiplano y en el rectángulo. Armónicos rectangulares, cilíndricos y esféricos.

e) **Ecuación de Laplace inhomogéa (ec. de Poisson).** Función de Green para el problema de Dirichlet, principio de reciprocidad y solución formal al problema inhomogéno. Desarrollo de la función de Green en autofunciones. Función de Green para todo el espacio en dos y tres dimensiones. Función de Green en el semiplano y en la esfera: método de las imágenes. Función de Green para el problema de Neumann.

Bibliografía: Duff y Naylor (1966, cap. 7), Tikhonov y Samarskii (1963, caps. 1, 4, 5)

Problema 1. Clasifique las siguientes ecuaciones en hiperbólicas, parabólicas o elípticas:

$$u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0 \tag{8.1}$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{8.2}$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0 \tag{8.3}$$

$$xu_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0 \tag{8.4}$$

Problema 2. Problemas de Dirichlet en el disco. Considere la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet,

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}, \quad u(\boldsymbol{r})|_{\partial\mathcal{D}} = f(\boldsymbol{r}). \tag{8.5}$$

a) *Problema de Dirichlet interior:* resuelva el problema (8.5) para el caso en que $\mathcal{D}$ es un disco de radio a. Conviene trabajar en coordenadas polares:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad r < 0, \quad u(a,\theta) = f(\theta). \tag{8.6}$$

Utilizando el método de separación de variables, obtenga la *fórmula de Poisson,*

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\phi)\,d\phi}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2}, \qquad r < a. \tag{8.7}$$

b) *Problema de Dirichlet exterior:* resuelva el mismo problema para la región exterior al disco de radio a ($r \geq a$), pidiendo que $u(r,\theta)$ no sea divergente en $r \to \infty$ y que $u(a,\theta) = f(\theta)$. Encuentre la fórmula de Poisson exterior,

$$u(r,\theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\phi)\,d\phi}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2}, \qquad r > a. \tag{8.8}$$

c) Explique por qué estas fórmulas no pueden escribirse a partir de la autofunción de autovalor nulo encontrada en el problema 5 de la práctica 6.

Problema 3. Problema de Neumann en el disco. Muestre que una función armónica en el interior del disco de radio a que cumple

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial \mathcal{D}} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0, \tag{8.9}$$

tiene la forma

$$u(r,\theta) = A - \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\log\left[1 - 2ar\cos(\theta-\phi) + \frac{r^2}{a^2}\right] d\phi. \tag{8.10}$$

Problema 4. Problema de Dirichlet en el semiplano. Muestre que la solución a la ecuación de Laplace en el semiplano $y \geq 0$, con $u(x,0) = f(x)$ es

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x'),dx'}{(x-x')^2 + y^2}. \tag{8.11}$$

Sugerencia: Utilice la transformada de Laplace.

Problema 5. Problema de Dirichlet en la esfera. Estudie el problema de Dirichlet para el Laplaciano en el interior de una esfera de radio a.

a) Utilizando los resultados obtenidos en la práctica 6 sobre autofunciones del operador Δ_Ω, muestre primero que una función armónica en un casquete esférico se escribe de la forma

$$u(r,\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\Omega). \tag{8.12}$$

b) Utilice el resultado anterior y el teorema de adición de armónicos esféricos para escribir la función armónica en el interior de la esfera con condición de contorno $u(a,\Omega) = f(\Omega)$ como

$$u(r,\Omega) = \int d\Omega'\, f(\Omega') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta_0), \tag{8.13}$$

donde θ_0 es el ángulo entre las direcciones definidas por Ω y Ω'.

c) Sume finalmente la serie en l mediante las consideraciones siguientes: sea $d(r,\theta 0;a) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|$ la distancia entre el punto $\boldsymbol{r}$ definido por el argumento de la función u y un vector de módulo a en la dirección de Ω'. Observe que $1/d$ es una función armónica de r, θ_0 para $r < a$ y por lo tanto admite un desarrollo

$$\frac{1}{d(r,\theta_0;a)} = \sum_l C_l r^l P_l(\cos\theta_0). \tag{8.14}$$

Evaluando lo anterior en $\theta_0 = 0$ encuentre los coeficientes $C_l = a^{-(l+1)}$. Derivando ambos miembros respecto de r obtendrá otro desarrollo en polinomios de Legendre. Combinando estos resultados podrá sumar la serie que aparece en (8.13) para obtener

$$u(r,\Omega) = \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int \frac{\Omega')\, d\Omega'}{d^3(r,\theta_o;a)}. \tag{8.15}$$

Problema 6. Armónicos cilíndricos. Muestre que la función armónica en el interior de una región cilíndrica tal que $u(r,\theta,z=0) = 0$, $u(r,\theta,z=b) = f(r,\theta)$, $u(a,\theta,z) = 0$ se escribe

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(k_{nm}r/a) e^{in\theta}\,\mathrm{senh}(k_{nm}z/a), \tag{8.16}$$

donde k_{nm} es el m-ésimo cero de $J_n(x)$ y

$$A_{nm} = \frac{\int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta\, f(r,\theta) J_n(k_{nm}r/a) e^{-in\theta}}{\pi a^2 J_n'(k_{nm})^2\,\mathrm{senh}(k_{nm}b/a)}. \tag{8.17}$$

Problema 7. Encuentre la función de Green del Laplaciano en todo el espacio en dos y tres dimensiones.

Problema 8. Utilizando el método de las imágenes, muestre que la función de Green para el problema de Dirichlet en la región (x, y, z), $z \geq 0$ es

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{1/2}}\right]. \tag{8.18}$$

Problema 9. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en la esfera mediante el método de las imágenes.