Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 7 — Transformadas integrales

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Transformadas integrales.** Definición y propiedades generales.

b) **Transformada de Fourier.** Integral de Fourier. Definición de transformada de Fourier y su inversa para funciones integrables en la recta real. Propiedades. Transformada de Fourier para funciones que no se anulan en infinito. Transformada de algunas distribuciones. Ejemplos de aplicación: ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones integrales, evaluación de integrales definidas. Teorema de muestreo de Shannon: funciones de banda limitada, muestreo discreto y aliasing. Interpretación del fenómeno de Gibbs.

c) **Transformada de Laplace.** Definición. Transformada inversa. Ejemplos y propiedades. Teoremas de Tauber. Respuesta causal. Transformada de Fourier-Laplace.

Bibliografía: Debnath y Bhatta (2007, caps. 1–4)

Problema 1. Transformada de Fourier. Definimos la transformada de Fourier y su inversa por

$$F(k) = \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx \tag{7.1}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k)\, dk \tag{7.2}$$

a) Demuestre las siguientes propiedades de la transformada:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\left\{f(-x)\right\} = F(-k), & \mathcal{F}\left\{f(ax)\right\} = \dfrac{1}{|a|}F(k/a), & \mathcal{F}\left\{f(x+a)\right\} = e^{ika}F(k), \\
\mathcal{F}\left\{e^{iax}f(x)\right\} = F(k-a), & \mathcal{F}\left\{F(x)\right\} = f(-k) & \mathcal{F}\left\{x^n f(x)\right\} = i^n F^{(n)}(k) \\
\text{Derivación:} & \mathcal{F}\left\{f'(x)\right\} = ikF(k), & \mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (ik)^n F(k), \\
\text{Convolución:} & \mathcal{F}\left\{(g \star f)\right\} = \sqrt{2\pi}F(k)G(k) & \mathcal{F}\left\{f(x)g(x)\right\} = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}(F \star G)(k)
\end{array}$$

b) La transformada de Fourier de una función real puede ser compleja. Demuestre que

$$f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \qquad F(-k) = F^*(k), \tag{7.3}$$

$$f(x) \text{ par } \Rightarrow \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx\, dx, \qquad \text{par, real si } f(x) \text{ real} \tag{7.4}$$

$$f(x) \text{ impar } \Rightarrow \qquad F(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx, \qquad \text{impar, imaginaria si } f(x) \text{ real} \tag{7.5}$$

$$\tag{7.6}$$

c) Demuestre que la transformada de Fourier conserva el producto escalar:

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g^*(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, G^*(k) f(k) = (G, F), \tag{7.7}$$

y observe que se obtiene así, como caso particular, el *teorema de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |F(k)|^2. \tag{7.8}$$

Problema 2. Calcule las transformadas de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$$
$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0, \qquad f(x) = x^2 e^{-ax^2}, \quad a > 0$$
$$f(x) = \Theta(x), \qquad f(x) = \cos bx.$$

Problema 3. Encuentre las funciones $f(x)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} f(x-t)\, dt = e^{-bx^2}, \qquad a, b > 0 \tag{7.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t)\, dt = \frac{b}{x^2+b^2} \tag{7.10}$$

Problema 4. Teorema de muestreo y aliasing. Suponga que se quiere digitalizar una señal dada por $f(t) = \exp[-x^2/2a^2]$. Grafique la señal reconstruida luego de muestrear con un intervalo $\Delta t = n\pi/a$ para $n = 1, 5, 10$. ¿Aplicaría un filtro pasabajos antes de muestrear? ¿Con qué frecuencia de corte?

***Problema 5. Transformada de Laplace.** Dada la transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx, \tag{7.11}$$

demuestre a partir de la integral de Fourier que la transformada inversa está dada por

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\, e^{sx} F(s). \tag{7.12}$$

Problema 6. Demuestre las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-ax} f(x)\right\} = F(s+a), \qquad \mathcal{L}\{\Theta(x-a) f(x)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(x+a)\}$$
$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F(s/a),$$
$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$
$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\},$$
$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(s) G(s),$$

donde para la convolución debe suponerse que las funciones se anulan sobre el eje negativo:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t) g(t)\, dt. \tag{7.13}$$

Problema 7. Muestre que las funciones que siguen tienen las transformadas de Laplace que se indican:

$$f(x) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s}, \tag{7.14}$$

$$f(x) = e^{ax} \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s-a}, \tag{7.15}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} ax \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{a}{s^2+a^w}, \tag{7.16}$$

$$f(x) = \cos ax \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{s}{s^2+a^w}, \tag{7.17}$$

$$f(x) = x^a \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{\Gamma(s)}{s^{a+1}}. \tag{7.18}$$