Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 6 — Funciones de Bessel y armónicos esféricos

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Laplaciano en 2-d y 3-d como operador con autovalores degenerados.** Separación de variables en distintos sitemas de coordenadas y relación con problema de autovalores de nuevos operadores. Clasificación de autovectores mediante un segundo operador que conmuta con el primero: operadores de rotación y traslación.

b) **Laplaciano en 2-d.** Separación de variables en coordenadas cartesianas: autofunciones del laplaciano y del operador traslación espacial. Separación de variables en coordenadas polares. Ecuación de Bessel. Representación integral de las funciónes de Bessel a través del desarrollo de Fourier de e^{iky}. Función generatriz. Integral de Schläfli y segunda solución linealmente independiente. Función de Bessel de segunda especie.

c) **Laplaciano en 3-d y Laplaciano sobre el casquete esférico (operador de Beltrami).** Separación de variables en coordenadas esféricas y ecuaciones de Legendre. Soluciones de la ecuación de Legendre y la ecuación asociada a través del desarrollo de Fourier de $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)^n$: representación integral, fórmula de Rodrigues, inexistencia de segunda solución linealmente independiente y acotada. Raíces. Autofunciones del operador de Beltrami: definición de los armónicos esféricos, normalización. Desarrollo en armónicos esféricos y fórmula de adición.

Bibliografía: Duff y Naylor (1966, secs. 8.1, 9.1 y 9.6)

Problema 1. Funciones de Bessel. Representación integral. La ecuación de autovalores del Laplaciano

$$\nabla^2 u = -k^2 u, \tag{6.1}$$

en coordenadas polares se expresa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -k^2 u. \tag{6.2}$$

Resolviendo esta última ecuación por separación de variables $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ se obtiene que $\Theta(\theta) = e^{in\theta}$, con n entero por la condición periódica en θ. La parte radial conduce entonces a la ecuación de Bessel,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0. \tag{6.3}$$

Se puede encontrar una representación de las funciones de Bessel proponiendo una solución desarrollada en serie de Fourier, $u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} R_n(r)$ (de donde se sigue que R_n satisface la ec. de Bessel) y notando que una solución posible es $u(r,\theta) = e^{ikr\operatorname{sen}\theta}$ (puesto que es la representación en coordenadas polares de e^{iky}, que se verifica fácilmente como autofunción en coordenadas cartesianas).

a) Sabiendo cómo se calculan los coeficientes de Fourier, muestre que una solución de la ecuación de Bessel puede escribirse

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta + ikr\operatorname{sen}\theta}\, d\theta. \tag{6.4}$$

b) **Integral de Schläfli.** Haciendo el cambio $t = e^{i\theta}$, $z = kr$ transforme la integral anterior en

$$J_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{-s-1} e^{(t-1/t)z/2}\, dt, \tag{6.5}$$

donde para s entero C es cualquier curva que incluya al origen, mientras que para s real C es un circuito que va de $-\infty - i0$ a $-\infty + i0$ rodeando el origen. Muestre, por sustitución en la ec. de Bessel, que esta última expresión es solución de la misma para cualquier s real.

Problema 2. Función generatriz para las funciones de Bessel. Del desarrollo de Fourier

$$e^{ikr\,\mathrm{sen}\,\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(kr), \tag{6.6}$$

haciendo el cambio $t = e^{i\theta}$, $z = kr$ se obtiene la *función generatriz* (función cuyos coeficientes de Taylor-MacLaurin dan las funciones de Bessel):

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z). \tag{6.7}$$

Utilice la función generatriz para demostrar las siguientes relaciones:

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z), \tag{6.8}$$

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \tag{6.9}$$

$$\int z^{n+1} J_n(z)\, dz = z^{n+1} J_{n+1}(z). \tag{6.10}$$

Problema 3. Desarrollo en serie. El desarrollo en serie se puede obtener proponiendo un desarrollo de Frobenius para la ec. (6.3), o bien desarrollando la exponencial de la integral de Schläfli, obteniéndose

$$J_s(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+s+1)} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^n. \tag{6.11}$$

Problema 4. Segunda solución de la ecuación de Bessel.

a) **Wronskiano de J_s y J_{-s}.** Escriba la ec. de Bessel en la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dz}\left[zJ_s'(z)\right] + \left(z - \frac{s^2}{z}\right) J_s(z) = 0, \tag{6.12}$$

y multiplique por $J_{-s}(z)$. Luego escriba la ecuación para $J_{-s}(z)$, multiplique por $J_s(z)$ y calcule la diferencia entre ambas. Esa expresión le permitirá afirmar que $zW(z)$ es igual a una constante, cuyo valor podrá deducir tomando el límite $z \to 0$ (para lo cual será de ayuda la expresión en serie de las $J_{\pm s}(z)$). Obtenga así el valor del Wronskiano,

$$W(z) = J_s(z)J_{-s}'(z) - J_{-s}(z)J_s'(z) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,s\pi}{z\pi}. \tag{6.13}$$

Habrá mostrado de esta manera que $J_s(z)$ y $J_{-s}(z)$ son soluciónes linealmente independientes excepto cuando s es entero.

b) **Relación entre $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$.** Lo anterior muestra que $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$ son proporcionales entre sí. Utilizando la representación integral muestre que la relación es

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z). \tag{6.14}$$

c) **Función de Bessel de segunda especie.** Definamos

$$Y_s(z) = \frac{\cos s\pi J_s(z) - J_{-s}(z)}{\mathrm{sen}\,s\pi}, \tag{6.15}$$

que para s no entero consituye una solución linealmente independiente de $J_s(z)$ alternativa a $J_{-s}(z)$. Para n entero, definamos $Y_n(z) = \mathrm{lím}_{s\to n} Y_s(z)$. Muestre que el Wronskiano de $J_n(z)$ e $Y_n(z)$ es

$$J_n(z)Y_n'(z) - Y_n(z)J_n'(z) = \frac{2}{z\pi}, \tag{6.16}$$

y concluya que $Y_s(z)$ es una solución linealmente independiente de $J_s(z)$ incluso para s entero. Note sin embargo que $J_s(z)$ es la única solución no singular en el origen.

Problema 5. Conjunto completo de autofunciones. En base a los resultados anteriores escriba el conjunto completo de autofunciones del Laplaciano bidimensional en variables polares separadas. Diga cómo es el desarrollo de una función $f(r,\theta)$ y escriba la expresión general de los coeficientes. ¿Cómo puede asegurar que las autofunciones expresadas en variables separadas constituyen *todas* las autofunciones del Laplaciano?

Problema 6. Diagonalización del Laplaciano sobre la superficie esférica. Los armónicos esféricos son autofunciones ortonormales del Laplaciano definido sobre la esfera unidad, llamado a veces operador de Laplace-Beltrami,

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{6.17}$$

y como tales permiten desarrollar la parte angular de un campo escalar en coordenadas esféricas. En mecánica cuántica, el operador de Laplace-Beltrami es proporcional al cuadrado del operador momento angular: $\hat{L} = -\hbar^2\Delta_\Omega$. En este problema y el siguiente construiremos los armónicos esféricos resolviendo la ecuación de autovalores

$$\Delta_\Omega u = -l(l+1)u, \tag{6.18}$$

por el método de separación de variables (que equivale a diagonalizar simultáneamente Δ_Ω y $\partial^2/\partial\phi^2$).

a) Muestre que proponiendo $u = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ la ecuación anterior conduce a

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x) = 0, \tag{6.20}$$

con $\Theta(\theta) = P(\cos\theta)$. La primera ecuación es sencilla: resulta en $\Phi_m = e^{im\phi}$ e impone (por las condiciones periódicas en ϕ) que $m \in \mathcal{Z}$. La segunda es la *ecuación asociada de Legendre,* y tiene puntos singulares regulares en $x = \pm 1$: agregaremos por lo tanto la condición de contorno de que las soluciones sean finitas en $x = \pm 1$.

b) La ecuación de Legendre puede resolverse mediante series de potencias como hemos hecho en el problema 7 de la práctica 2. Aquí lo haremos de otra manera, sabiendo que estamos resolviendo el problema (6.18). Considere la función $u(\boldsymbol{r}) = (z+ix)^l \equiv r^l V_l(\Omega)$ con $V_l(\Omega) = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^l$, $l \in \mathcal{Z}^+$. Muestre que $\nabla^2 u = 0$ (trabajando en cartesianas) y a partir de esto y recordando que en polares $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (2/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\Delta_\Omega$ muestre que $V(\Omega)$ es autofunción de Δ_Ω:

$$\Delta_\Omega V_l(\theta,\phi) = -l(l+1)V(\theta,\phi). \tag{6.21}$$

Conociendo las autofunciones del problema para $\Phi(\phi)$ proponga un desarrollo de Fourier para $V_l(\theta,\phi)$ en cosenos de ϕ (ya que $V_l(\theta,\phi)$ es par en ϕ), sabiendo que entonces los coeficientes (dependientes de θ) tendrán que satisfacer la ecuación de Legendre. Redefina los coeficientes con constantes multiplicativas de modo que

$$V_l(\theta,\phi) = P_l(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{l!}{(l+m)!}e^{-im\pi/2}P_l^m(\cos\theta)\cos m\phi. \tag{6.22}$$

Conociendo la forma de V_l obtenga una expresión integral para los $P_l^m(\cos\theta)$ (integrales de Laplace):

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(l+m)!}{2\pi l!}e^{im\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^l\cos m\phi\, d\phi. \tag{6.23}$$

Estas expresiones constituyen soluciones particulares de la ecuación de Legendre válidas para l y m enteros mayores o iguales a cero. $P_l(x) \equiv P_l^0(x)$ se denomina *polinomio de Legendre,* y $P_l^m(x)$ *polinomio asociado.* Veremos ahora que se trata efectivamente de polinomios y consideraremos también el caso $m < 0$.

c) **Fórmula de Rodrigues.** Notando que en la integral anterior puede reemplazarse $\cos m\phi$ por $e^{-im\phi}$ y haciendo el cambio $t = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}$ (de modo que $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos\phi = (t^2-1)/2(t-\cos\theta)$), muestre que

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos\theta) &= \frac{(l+m)!}{l!}\frac{\operatorname{sen}^m\theta}{2\pi 2^l}(-1)i^{2l+1}\int_C dt\,\frac{(t^2-1)^l}{(t-\cos\theta)^{l+m+1}} \\ &= \frac{(-1)^m(1-\cos^2\theta)^{m/2}}{l!2^l 2\pi i}\frac{d^{(l+m)}}{d\mu^{(l+m)}}\int_C dt\,\frac{(t^2-1)^l}{t-\mu}\bigg|_{\mu=\cos\theta}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde C es una curva cerrada que incluye al origen. Aplicando el teorema de Cauchy a la última expresión, obtenga finalmente las fórmulas de Rodrigues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \qquad P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{(m/2)}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x). \tag{6.25}$$

Éstas fórmulas muestran que $P_l^m(x)$ es un polinomio de grado l, y que es idénticamente nulo para $m > l$.

d) **El caso** $m < 0$**.** Tomar $m < 0$ da una solución linealmente independiente para $\Phi_m(\phi)$, pero la ecuación de Legendre permanece invariada. Es cómodo sin embargo definir $P_l^m(x)$ para $m = -l, -(l-1), \ldots, 0, 1, \ldots, l$ mediante las fórmulas de Rodrigues (y $P_l^m(x) = 0$ para $|m| > l$). Muestre que

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x), \tag{6.26}$$

de modo que para $m < 0$ los polinomios así definidos siguen siendo solución de la ecuación de Legendre (obviamente no independiente de la correspondiente a $-m$).

Problema 7. Armónicos esféricos. Los resultados del problema anterior nos permiten afirmar que las funciones

$$u_{lm}(\Omega) = e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta), \qquad l = 0, 1, \ldots \quad m = -l, -l+1, \ldots, 0, 1, \ldots l \tag{6.27}$$

son autofunciones de Δ_Ω con autovalor $-l(l+1)$. Debemos preguntarnos si no hay más autofunciones que las enumeradas, que podrían provenir de a) otra solución linealmente independiente de la ecuación de Legendre y/o b) de valores no naturales de l. Veremos en este problema que la respuesta es negativa, y que la fórmula anterior comprende a todas las autofunciones de Δ_Ω.

a) Busquemos una solución $Q_l^m(x)$, linealmente independiente de $P_l^m(x)$. Multiplicando la ecuación de Legendre para $P_l^m(x)$ por Q_l^m y restando a la misma la ecuación para $Q_l^m(x)$ multiplicada por $P_l^m(x)$ muestre que el Wronskiano está dado por

$$W(x) = Q_l^m(x)(P_l^m)'(x) - P_l^m(x)(Q_l^m)'(x) = \frac{A}{1-x^2}. \tag{6.28}$$

Como $P_l^m(x)$ es regular en $x = \pm 1$, conluya que $Q_l^m(x)$ o su derivada deben ser singulares. Suponiendo que sólo la derivada es singular, muestre que entonces sería $Q_l^m(x) \sim \operatorname{arctanh} x$, con lo cual forzosamente la segunda solución de la ecuación de Legendre es singular y por lo tanto no hay otras autofunciones para el autovalor $-l(l+1)$.

b) Recordando los resultados del problema 7 de la práctica 2 vemos que si l no es entero positivo entonces *ambas* soluciones de la ec. de Legendre son singulares. No existen entonces nuevos autovalores ni autofunciones además de las (6.27).

c) Para definir los armónicos esféricos nos resta sólo normalizar las autofunciones. La ortogonalidad está garantizada pues a menos que $l' = l$ y $m' = m$ las funciones $u_{lm}(\Omega)$ y $u_{l'm'}(\Omega)$ son autofunciones correspondientes a distintos autovalores de Δ_Ω y/o $\partial^2/\partial\phi^2$. Muestre que

$$\int d\Omega\, u_{lm}^*(\Omega)u_{'lm'}(\Omega) = 2\pi\delta_{ll'}\delta_{mm'}\int_{-1}^{1}\left[P_l^m(x)\right]^2\, dx. \tag{6.29}$$

Para calcular la última integral exprese uno de los $P_l^m(x)$ en términos de $P_l^{-m}(x)$ y luego ambos mediante la fórmula de Rodrigues para obtener, despues de integrar por partes $l+m$ veces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[P_l^m(x)\right]^2\, dx &= (-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{(2^l l!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-m}(x^2-1)^l}{dx^{l-m}}\frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}}\,dx \\ &= (2l)!(-1)^l\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\,dx.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ahora resta calcular la integral de $(x^2-1)^l$. Para esto calcularemos una serie de identidades:

I) Haga el cambio $x = \cos^2\theta$ en la expresión (2.13) para la función beta para obtener

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m-1})(\operatorname{sen}\theta)^{2n-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)} = \frac{B(n,m)}{2}. \tag{6.31}$$

II) Demuestre que

$$B(n,n) = 2^{1-2n} B(n,1/2) \tag{6.32}$$

(utilice la ecuación anterior aplicando la fórmula del seno del ángulo doble y el cambio $2\theta = \phi$).

III) Utilizando nuevamente (2.13) obtenga

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = 2^{1-2n} \frac{\Gamma(n)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)}, \tag{6.33}$$

y recordando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ demuestre la *fórmula de duplicación de Legendre,*

$$\Gamma(2n) = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n)\Gamma(n+1/2). \tag{6.34}$$

IV) Finalmente, evalúe

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \, dx = \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(l+3/2)} = \frac{(-1)^l 2^{2l} (l!)^2}{(l+1/2)(2l)!}. \tag{6.35}$$

d) Uniendo los resultados anteriores, escriba los *armónicos esféricos*

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} (-1)^{(m+|m|)/2} e^{im\phi} P_l^{|m|}(\cos\theta), \qquad |m| \leq l, \tag{6.36}$$

autofunciones de Δ_Ω con autovalor $-l(l+1)$ que cumplen

$$\int Y^*_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) \, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{6.37}$$

Problema 8. Desarrollo en armónicos esféricos y teorema de adición. Dado lo anterior, una función $f(\theta,\phi)$ admite un desarrollo

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int d\Omega' \, Y^*_{lm}(\Omega') f(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{6.38}$$

Este desarrollo se puede simplificar mediante el *teorema de adición para armónicos esféricos:*

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}(\Omega') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}'), \tag{6.39}$$

donde $\check{\mathbf{n}}(\Omega)$ es el versor que apunta en la dirección dada por θ, ϕ, $\check{\mathbf{n}}(\Omega) = (\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\theta)$ y $\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}' = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi') = cos\theta_0$ con θ_0 el ángulo entre los dos versores.

a) Demuestre el teorema de adición. Para esto observe que la delta de Dirac se desarrolla en armónicos esféricos de la forma

$$\delta(\check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{n}}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\check{\mathbf{n}}) Y^*_{lm}(\check{\mathbf{n}}'). \tag{6.40}$$

Muestre que si $\check{\mathbf{n}}'$ está en la dirección del eje z, el hecho de que no exista dependencia en el ángulo ϕ' hace que el desarrollo anterior se reduzca a

$$\delta(\check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{z}}) = \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{z}}). \tag{6.41}$$

Como la delta depende de $\check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{z}}$, concluya que

$$\delta(\check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{n}}') = \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}'), \tag{6.42}$$

y comparando los desarrollos (6.42) y (6.40) deduzca (teniendo en cuenta que a distintos valores de l corresponden distintos espacios propios) el teorema de adición.

b) Utilizando el teorema de adición, simplifique el desarrollo (6.38) para obtener

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega' \, P_l(\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}') f(\Omega'). \tag{6.43}$$