Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 5 — Desarrollos en autofunciones

Método variacional, series de Fourier

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) Problema de autovalores en 3 dimensiones y problema variacional asociado: funcional “energía” y cociente de Rayleigh. Casos de las distintas condiciones de contorno. Aproximación de Rayleigh-Ritz.

b) Desarrollos en serie generales en espacios vectoriales de dimensión infinita. Desarrollos ortogonales: coeficientes de Fourier y desigualdad de Bessel. Tipos de convergencia: puntual, absoluta, uniforme, en media (o métrica), débil (como distribución). Sistema completo de vectores (base de un espacio de Hilbert).

c) Desarrollos en serie de autofunciones: existencia de conjuntos completos para ciertos tipos de operadores. Identidad de Parseval. Operador de Fredholm como inversa del operador SL. Desarrollo en serie de autofunciones del operador de S-L: funciones con derivada segunda, desarrollo de la función de Green.

d) Series de Fourier. Coeficientes de Fourier. Tres teoremas de Fourier sobre convergencia. Convergencia uniforme, derivación e integración término a término, fenómeno de Gibbs. Series de Fourier pares e impares. Forma compleja de la serie.

Bibliografía: Duff y Naylor (1966, cap. 6, sec. 2.7), Naón et al. (2012, sec. 1.3 y 1.4).

Problema 1. Encuentre la función de Green del operador de Sturm-Liouville del problema 8 de la práctica 4 como un desarrollo en las respectivas autofunciones.

Problema 2. Derivada de un funcional. Dado un funcional $F[u]$ definimos su derivada mediante

$$\frac{\delta F[u]}{u(x_0)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[u(x) + \epsilon\delta(x - x_0)] - F[u]}{\epsilon}. \tag{5.1}$$

Dado $F[u] = \int_{-1}^{1} u(x)\,dx$, muestre que

$$\frac{\delta F[u]}{u(x_0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x_0 < 1 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta F[u^2]}{\delta u(x_0)} = \begin{cases} 2u(x_0) & \text{si } -1 < x_0 < 1 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\frac{\delta^2 I[u^3]}{\delta u(x_0)\delta u(x_1)} = \begin{cases} 6u(x_1)\delta(x_1 - x_0) & \text{si } x_0, x_1 \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\frac{\delta u(x)}{\delta u(x_0)} = \delta(x - x_0), \tag{5.5}$$

$$\frac{\delta u'(x)}{\delta u(x_0)} = \delta'(x - x_0). \tag{5.6}$$

***Problema 3. Problema variacional asociado al problema de autovalores.**

a) Dado el funcional “energía”

$$E[u] = \int_a^b [p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)]\, dx, \tag{5.7}$$

considere el problema de minimizar $E[u]$ restringiéndose a las funciones de norma unidad $\|u\|^2 = \int_a^b u^2(x)\, dx = 1$ y suponga que el mínimo se alcanza para alguna $u_1(x)$. Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar $u_1(x)$: defina

$$F[u] = E[u] - \lambda\|u\|^2 \tag{5.8}$$

y muestre que

$$\delta F = 2\int_a^b \{-(pu')' + [q(x) - \lambda]\}\, \delta u(x)\, dx + 2pu'\delta u\big|_a^b . \tag{5.9}$$

Considerando separadamente las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neumann, muestre que $u_1(x)$ es autovector del operador L-S con autovalor λ y que $E[u_1] = \lambda$. Analice qué condiciones de contorno deben imponerse al problema variacional para obtener las condiciones de Dirichlet o Neumann en las autofunciones.

b) Muestre que es equivalente considerar el problema variacional anterior o el de minimizar el *cociente de Rayleigh*

$$H[u] = \frac{E[u]}{\|u\|^2}. \tag{5.10}$$

Problema 4. El estudio de los estados estacionarios de un oscilador cuántico unidimensional conduce a la ecuación:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\varphi = E\varphi. \tag{5.11}$$

Proponga un desarrollo en serie para resolver la ecuación y muestre que la necesidad de cortar la serie conduce a la cuantización de los niveles de energía (autovalores).

Problema 5. Utilizando la solución del problema anterior en el método variacional, obtenga una cota para el oscilador armónico con una perturbación cuártica

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{4}\mu^4x^4\right]\varphi = E\varphi. \tag{5.12}$$

***Problema 6. Series de Fourier.** Demuestre, siguiendo los pasos que se indican, que una función definida en $[-\pi, \pi]$ admite un desarrollo (convergente puntualmente donde la función es continua) de la forma

$$f(x) = \overline{f} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dx'\, f(x')\cos[n(x - x')], \tag{5.13}$$

donde $\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$.

a) Demuestre que la suma parcial de la serie de Fourier se puede escribir

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}\, dt. \tag{5.14}$$

b) **Lema de Riemann-Lebesgue.** Demuestre que si $g(t)$ es continua y acotada, excepto en un número finito de puntos en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^n g(t)\operatorname{sen}(nt + \alpha)\, dt = 0. \tag{5.15}$$

Para esto defina una partición $x_0 = a, x_1, \ldots x_m = b$ de $[a, b]$ tal que m sea mayor que el número de discontinuidades y que un subconjunto de los x_i coincida con los puntos de discontinuidad. Muestre entonces que

$$\left|\int_a^b g(t)\operatorname{sen}(nt+\alpha)\, dt\right| = \left|\sum_i \left\{g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{sen}(nt+\alpha)\, dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(t) - g(x_i)]\operatorname{sen}(nt+\alpha)\, dt\right\}\right|$$
$$\leq \frac{2Mm}{n} + M_m(b-a), \tag{5.16}$$

donde $M = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$, $m_i = \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |g(x) - g(x_i)|$ y $M_m = \max_i m_i$. Observe que tomando $n \to \infty$ la cota es proporcional a M_m, que puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando una partición más refinada (puesto que g es continua en los intervalos definidos por la partición) y obtenga finalmente el lema.

c) Muestre finalmente que la diferencia entre la suma parcial y la función en un punto x_0 es

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \left[f(x+t) - f(x^-)\right] K_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) - f(x^+)\right] K_n(t)\,dt + \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, \quad (5.17)$$

con $K_n(t) = \operatorname{sen}(n+1/2)t/2\operatorname{sen} t/2$. Observe entonces que si $f(x)$ es continua y derivable en $[-\pi,\pi]$ salvo un número finito de puntos en donde existen los límites y derivadas laterales, entonces puede utilizar el lema de Riemann-Lebesgue para asegurar que la serie de Fourier converge puntualmente a $f(x)$ en donde esta es continua y al promedio de los límites laterales donde no lo es.

Problema 7.

a) Obtenga la serie de Fourier y grafique la suma a la cual converge la serie para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0] \\ x, & x \in [0,\pi] \end{cases}, \qquad f(x+2\pi) = f(x,) \quad (5.18)$$

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \end{cases}, \qquad g(x+3) = g(x). \quad (5.19)$$

b) Usando la serie de Fourier de $f(x)$, pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (5.20)$$

Problema 8.

a) Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a < \pi \\ 0, & \text{si no} \end{cases}. \quad (5.21)$$

b) Pruebe que en el límite $a \to 0$, la serie obtenida no converge puntualmente, pero sí converge como distribución a $\delta(x)$.